الحساب التكاملي

الكفاءات المستهدفة :

- توظيف خواص التكامل لحساب مساحة سطح معطى.
- توظيف القيمة المتوسطة لدالة.
- استعمال التكامل بالتجزئة.
- توظيف الحساب التكاملي لحساب دوال أصلية.
- حساب حجوم لمجسمات بسيطة.
- توظيف الحساب التكاملي لحل مشكلات بسيطة.

تصميم الدرس

- أنشطة.
- تعريف.
- خواص.
- المكاملة بالتجزئة.
- المساحة و التكامل.
- القيمة المتوسطة لدالة على مجال.
- حساب بعض الحجوم.
- تكنولوجيا الإعلام و الاتصال.
- تمارين ومشكلات.

- الحلول.

أنشطة

النشاط 1 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بالعبارة : $f(x) = x - 1$

1 – أنشئ التمثيل البياني (Δ) للدالة f في معلم متعامد متجانس $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ وحدة الطول cm .

2 – نعتبر النقط $M(x ; f(x)), N(x ; 0), A(1 ; 0)$ من (Δ) حيث x عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

أ- أحسب مساحة المثلث ANM و لتكن $s(x)$

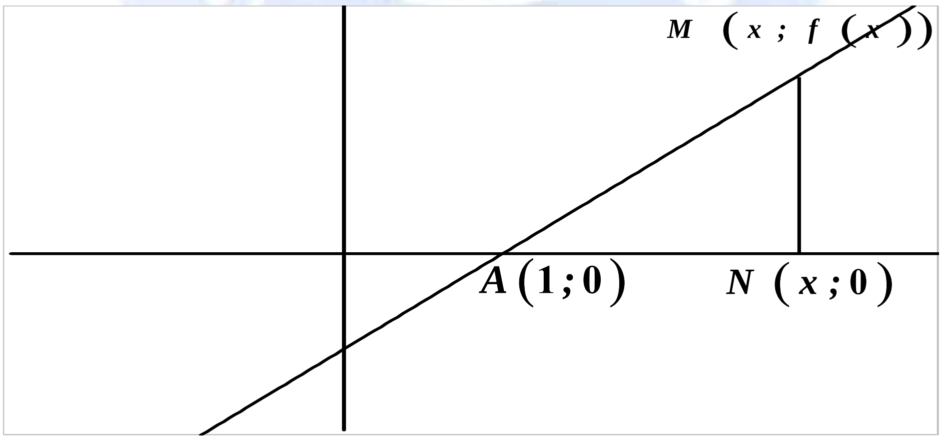
ب – عين الدالة الأصلية g للدالة f التي تنعدم عند 1 ماذا تستنتج بالنسبة إلى الدالتين s و g

جـ - عين دالة أصلية للدالة πf^2 و لتكن G

د – أحسب حجم الجزء المتولد عن دوران $s(x)$ حول محور الفواصل و ليكن $V(x)$. ماذا تستنتج ؟

الحل :

1 – التمثيل البياني (Δ) للدالة f :



2- أ) حساب $s(x)$:

$s(x) = \frac{AN . NM}{2} = \frac{(x - 1).f(x)}{2}$ أي $s(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$

و منه : $s(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) cm^2$

ب) تعيين الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم عند العدد 1: الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و عليه تقبل دوال أصلية g

معرفة كما يلي :

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\lambda$$

لكن : $g(1)=0$ و عليه : $\frac{1}{2}-1+\lambda=0$ و منه : $\lambda=\frac{1}{2}$

وعليه :

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$$

الاستنتاج :

لدينا مما سبق $s(x)=g(x)$ ومنه المساحة s دالة أصلية للدالة f .

ج) تعيين الدالة الأصلية للدالة πf^2 و التي تنعدم عند 1 لدينا :

$$f^2(x)=x^2-2x+1$$

الدالة f^2 مستمرة على $\mathbb{R}$ و دالتها الأصلية G_1 معرفة كما يلي :

$$G_1(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+x+\lambda$$

وعليه الدالة الأصلية للدالة πf^2 هي الدالة G

حيث $G=\pi G_1$ والمعرفة كما يلي:

$$G(x)=\frac{\pi x^3}{3}-\pi x^2+\pi x-\frac{\pi}{3}$$

د) حساب الحجم :

عند دوران $s(x)$ حول محور الفواصل ينتج مخروط دوراني نصف قطر قاعدته $f(x)$ و ارتفاعه $x-1$ وعليه :

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi R^2.h$$

إذن :

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi\left[f(x)\right]^2.f(x)$$

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi\left[f(x)\right]^3$$

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi(x-1)^3=\frac{1}{3}\pi\left(x^3-3x^2+3x-1\right)$$

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi x^3-\pi x^2+\pi x-\frac{\pi}{3}$$

الاستنتاج :

حجم الجزء المتولد عن دوران $s(x)$ حول محور الفواصل هو دالة أصلية للدالة πf^2

النشاط2 :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0 ; 1]$

بالعبارة : $f(x) = x^2$

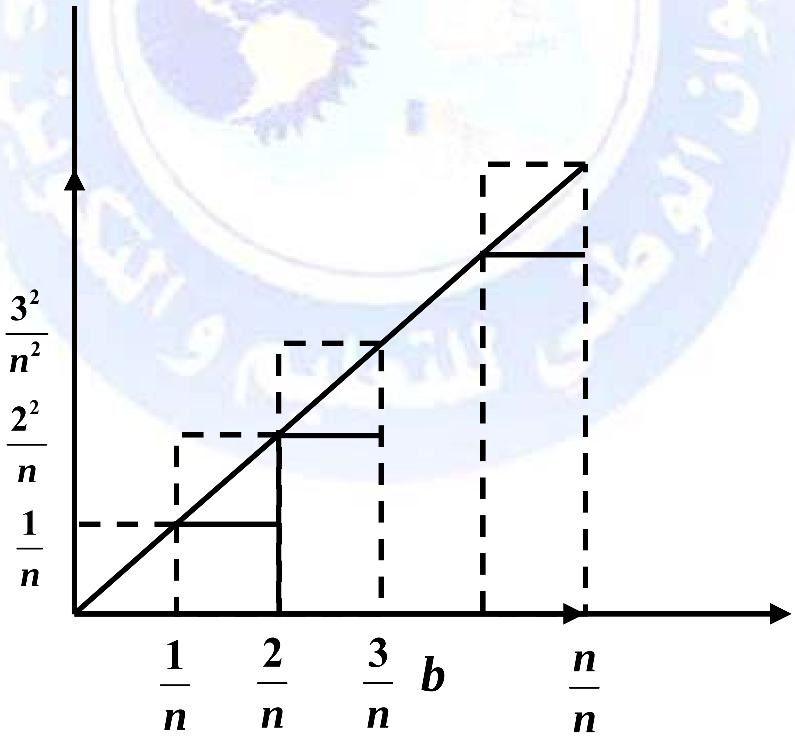
ليكن (C_f) ، تمثيلها البياني في المعلم $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ نريد حساب المساحة A مساحة

السطح المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x = 0$

و $x = 1$

نقسم المجال $[0 ; 1]$ إلى n جزءا متساوية حيث أن كل جزء يساوي $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ كما

هو مبين في الشكل المقابل .



ليكن l جزء المستوى المحدود بالمنحنى (C_f) و المحورين .

نسمي u_n مجموع مساحات المستطيلات المحتواة في l و نسمي V_n مجموع مساحات المستطيلات التي تحوي l .

وعليه لدينا : $u_n \leq A \leq V_n$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم .

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$1^2+2^2+3^2+4^2+.....+n^2=\frac{n(n+1)(2x+1)}{6}$$

2) عين u_n و V_n بدلالة n . 3) عين $\lim_{n\to+\infty} u_n$, $\lim_{n\to+\infty} V_n$ 4) استنتج قيمة A .

5) عين الدوال الأصلية g_λ للدالة f

6) احسب $g_\lambda(1)-g(0)$. ما هو تخمينك ؟

الحل :

1) البرهان بالتراجع على الخاصية :

$$p(n): 1^2+2^2+.....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ ◁

بداية الاستدلال : من أجل $n=0$ لدينا $0^2=0$ وعليه $p(0)$ صحيحة

- نبرهن أن الخاصية وراثية :

نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$p(k): 1^2+2^2+....+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ الفرضية.

$$p(k+1): 1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{6}$$

وهو المطلوب .

$$1^2+2^2+...k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{6}$$

و عليه : $p(k+1)$ صحيحة .

و منه : $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

2) تعيين u_n و V_n :

$$U_n = \frac{1}{n}.\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{1}{n}.\frac{1}{n^3} + ... + \frac{1}{n}.\frac{(n-1)^2}{n^2}$$

$$U_n = \frac{1}{n^3}\left(1 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2\right)$$

$$U_n = \frac{1}{n^3}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]$$

إذن :

$$U_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$V_n = \frac{1}{n}.\frac{1^2}{n^2} + \frac{1}{n}.\frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{1}{n}.\frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{1}{n}.\frac{n^2}{n^2}$$

$$V_n = \frac{1^2}{n^3}\left[1^2 + 2'^2 + ... + n^2\right]$$

و عليه :

$$V_n = \frac{1^2}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$V_n = \frac{n(2n+1)}{6n^2}$$

3) حساب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

إذن :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+n}{6n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{6n^2} = \frac{2}{6}$$

و منه :

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{3}$$

4) استنتاج قيمة A :

لدينا : $U_n \le A \le V_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{3}$

و منه : $A = \frac{1}{3}$

5) تعيين الدوال الأصلية g_λ للدالة f :

لدينا : $f(x) = x^2$

الدالة f مستمرة على ℝ و عليه تقبل دوال أصلية g_λ على ℝ معرفة كما يلي :

$$g_\lambda(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda$$

حيث λ عدد حقيقي .

6) حساب : $g_\lambda(1) - g_\lambda(0)$

$$g_\lambda(1) - g_\lambda(0) = \left(\frac{(1)^3}{3} + \lambda\right) - \left(\frac{(0)^3}{3} + \lambda\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \lambda - 0 - \lambda = \frac{1}{3}$$

التخمين: العدد $g_\lambda(1) - g_\lambda(0)$ مستقل عن λ و كذلك $g_\lambda(1) - g_\lambda(0)$ يمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x = 0$ ، $x = 1$. إذن : $g_\lambda(1) - g_\lambda(0) = A$

تعريف

f دالة مستمرة على مجال I . a و b عددان حقيقيان كيفيان من I. بما أن الدالة f مستمرة على I فإنها تقبل دوال أصلية على I و إذا كانت g و h دالتين أصليتين للدالة f على I فإنه يوجد عدد حقيقي

λ بحيث : من أجل كل عدد حقيقي x من I: $g(x) = h(x) + \lambda$

لدينا : $g(b) - g(a) = [h(b) + \lambda] - [h(a) + \lambda]$

$= h(b) - h(a)$

و عليه العدد الحقيقي $g(b) - g(a)$ مستقل عن اختيار الدالة الأصلية g للدالة f و عليه التعريف الآتي :

تعريف: a و b عددان حقيقيان من مجال I .

f دالة مستمرة على I و g دالة أصلية كيفية لها على هذا المجال .

يسمى العدد الحقيقي $[g(b) - g(a)]$ التكامل من a إلى b للدالة f

و نرمز له كما يلي : $g(b) - g(a) = \int_a^b f(x)dx$.

ملاحظات :

يقرأ $\int_a^b f(x)dx$: " التكامل من a إلى $b \geq$: $f(x)dx$ "

في الكتابة : $\int_a^b f(x)dx$ التي تشمل المتغير x يمكن تبديل x بأي حرف آخر ما عدا a و b و f التي تدل أشياء معينة .

فنكتب : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$

- نكتب عادة : $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) = [g(x)]_a^b$

مثال :

احسب التكامل الآتي : $\int_{1}^{2}\left(x^{2}-4x+5\right)dx$

الحل :

الدالة $f: x\mapsto x^{2}-4x+5$ مستمرة على $\mathbb{R}$ و عليه تقبل دوال أصلية g معرفة بالعبارة :

$$g\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{3}-2x^{2}+5x+\lambda \quad , \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

و عليه :

$$\int_{1}^{2}\left(x^{3}-4x+5\right)dx=\left[g\left(x\right)\right]_{1}^{2}=g\left(2\right)-g\left(1\right)$$

$$=\left[\frac{1}{3}(2)^{3}-2(2)^{2}+5(2)\right]-\left[\frac{1}{3}(1)^{3}-2(1)^{2}+5(1)\right]$$

$$=\frac{8}{3}-8+10-\frac{1}{3}+2-5=\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}$$

مبرهنة :

إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال I فإن دالتها الأصلية التي تنعدم من أجل القيمة a من I هي الدالة g المعرفة على I كما يلي :

$$g\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$$

البرهان :

f مستمرة على I ، a عدد حقيقي من I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على I كما يلي :

$$g\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)d$$

نعلم أنه إذا كانت h دالة أصلية للدالة f على I فإنه من أجل كل عدد حقيقي x من I :

$$g\left(x\right)=h\left(x\right)-h\left(a\right)$$

لدينا من أجل كل عدد x من I : $g'\left(x\right)=h'\left(x\right)$

و لدينا : $g\left(a\right)=h\left(a\right)-h\left(a\right)=0$

و عليه g هي الدالة الأصلية للدالة f على I و التي تنعدم عند a

خواص

خاصية 1 :

f دالة مستمرة على I .مهما تكن الأعداد الحقيقية c,b,a من I لدينا :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

البرهان :

بما أن f مستمرة على I فإنه تقبل دالة أصلية لها g على I . مهما تكن الأعداد c,b,a من I لدينا :

$$g(c) - g(a) = \big(g(c) - g(b)\big) + \big(g(b) - g(a)\big)$$

و عليه : $\int_a^c f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$

و منه : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

حالات خاصة :

أ) إذا كان : $a=b=c$ يكون : $\int_a^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx + \int_a^a f(x)dx$

و بالتالي : $\int_a^a f(x)dx = 0$

ب) إذا كان $c = a$ يكون :

$$\int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx$$

$$0 = \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx$$

و بالتالي : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

خاصية 2 :

f دالة مستمرة على I و λ عدد حقيقي كيفي. مهما يكن العددان

الحقيقيان a و b من I لدينا : $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

البرهان :

بما أن f مستمرة على I فإنها تقبل دالة أصلية g على I. و عليه الدالة الأصلية للدالة λf على I هي λg

ومنه : $\int_a^b \lambda f(x)dx = [\lambda g(x)]_a^b = \lambda g(b) - \lambda g(a)$

$$= \lambda\left(g(b) - g(a)\right) = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

خاصية 3 :

f_1, f_2 دالتان مستمرتان على مجال I .

مهما يكن العددان الحقيقيان a و b من I لدينا :

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

البرهان :

f_1, f_2 مستمرتان على المجال I .و عليه تقبل كل منهما دالة أصلية على I .لتكن g_1, g_2 هاتين الدالتين الأصليتين للدالتين f_1, f_2 على الترتيب في المجال I. مهما يكن العددان الحقيقيان a و b من I لدينا :

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = [g_1(x) + g_2(x)]_a^b$$

لأن الدالة الأصلية للدالة $f_1 + f_2$ هي $g_1 + g_2$ ومنه :

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = [g_1(b)+g_2(b)] - [g_1(a)+g_2(a)]$$

$$= [g_1(b) - g_1(a)] + [g_2(b) - g_2(a)]$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

خاصية 4 :

f دالة مستمرة على مجال I . a و b عددان حقيقيان من I

حيث : $a \leq b$.

إذا كانت الدالة f موجبة على المجال $[a;b]$ يكون :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 .$$

البرهان :

الدالة f مستمرة على I و عليه تقبل دالة أصلية g على I

بما أن الدالة f موجبة على I فإن الدالة g متزايدة على I لأن f هي الدالة المشتقة للدالة g .

و منه نستنتج أنه إذا كان a و b عددان من I فإنه :

إذا كان $a \leq b$ فإن $g(a) \leq g(b)$ أي : $g(b) - g(a) \geq 0$ و عليه :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

ملاحظة :

- إذا كانت الدالة f سالبة على المجال $[a;b]$ فإن : $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

- إذا كان من أجل كل عدد x من $[a;b]$: $f_1(x) \leq f_2(x)$

حيث f_1, f_2 دالتان مستمرتان على $[a;b]$ فإن : $\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx$

خاصية 5 :

الدالة f مستمرة على I . a و b عددان حقيقيان من I.

أ) إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من I يوجد عددان حقيقيان

m و M بحيث : $m \leq f(x) \leq M$

فإن : $m(a-b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(a-b)$

من أجل كل عددان a و b حيث : $a < b$

ب) إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x من I يوجد عدد حقيقي M بحيث :

$$0 \leq \left| f\left(x\right)\right| \leq M$$

فإن : $\left| \int_a^b f\left(x\right)dx \right| \leq M\left(a-b\right)$ ≤ 0 من أجل كل عددان a و b .

البرهان :

لدينا : $m \leq f\left(x\right) \leq M$ من أجل كل عدد حقيقي x من I و a

و b عددان حقيقيان من I حيث : $a < b$ و منه حسب الخاصية و الملاحظة السابقة :

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f\left(x\right)dx \leq \int_a^b M dx$$

إذن :

$$\left[mx\right]_a^b \leq \int_a^b f\left(x\right)dx \leq \left[Mx\right]_a^b$$

و بالتالي :

$$m\left(b-a\right) \leq \int_a^b f\left(x\right)dx \leq M\left(b-a\right)$$

جـ) بما أن : $0 \leq \left|f\left(x\right)\right| \leq M$ فإن : $-M \leq f\left(x\right) \leq M$

من (أ) إذا كان : $a < b$:

$$-M\left(b-a\right) \leq \int_a^b f\left(x\right)dx \leq M\left(b-a\right)$$

و إذا كان : $b < a$:

$$-M\left(a-b\right) \leq \int_b^a f\left(x\right)dx \leq M\left(a-b\right)$$

أي أن :

$$-M\left(a-b\right) \leq -\int_a^b f\left(x\right)dx \leq M\left(a-b\right)$$

و منه :

$$-M\left(a-b\right) \leq \int_a^b f\left(x\right)dx \leq M\left(a-b\right)$$

و عليه : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a|$

مثال :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\frac{1}{x}$ حيث x عدد حقيقي في المجال $[1\,;\,3]$.

- عين حصرا للعدد : $\int_3^1 f(x)dx$ مستنتجا حصرا للعدد $\ln 3$.

الحل :

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}_+^*$ أو على $\mathbb{R}_-^*$ لأنها دالة ناطقة وعليه فهي مستمرة على $[1\,;\,3]$.

و لدينا : $1 \leq x \leq 3$ ومنه : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$

إذن : $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$ وحسب الخاصية 5 :

$$\frac{1}{3}(3-1) \leq \int_1^3 f(x)dx \leq 1(3-1)$$

إذن : $\frac{2}{3} \leq \int_1^3 f(x)dx \leq 2$ وعليه : $\frac{2}{3} \leq \int_1^3 \frac{1}{x}dx \leq 2$

ومنه : $\frac{2}{3} \leq [\ln x]_1^3 \leq 2$ أي أن : $\frac{2}{3} \leq \ln 3 - \ln 1 \leq 2$

وبالتالي : $\frac{2}{3} \leq \ln 3 \leq 2$.

المكاملة بالتجزئة

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على I و دالتاهما المشتقتان f' و g' مستمرتان على I .

a و b عددان حقيقيان من I. لدينا من أجل كل عدد t من I :

$$(f.g)'(t) = f'(t).g(t) + f(t).g'(t)$$

$$\int_a^x (f \times g)'(t)dt = \int_a^x \left[f'(t).g(t) + f(t).g'(t) \right] dt$$

وعليه : $$\left[f(t).g(t) \right]_a^x = \int_a^x f'(t).g(t)dt + \int_a^b f(t).g'(t)dt$$

$$\int_a^x f'(t).g(t)dt = \left[f(t).g(t) \right]_a^x - \int_a^x f(t).g'(t)dt$$

ملاحظة : تستعمل هذه النتيجة لحساب تكاملات و ذلك عندما يكون حساب التكامل الموجود في الطرف الثاني من المساواة أسهل من حساب التكامل المطلوب والموجود في الطرف الأول .

مثال : احسب الدالة الأصلية التي تأخذ القيمة 0 من أجل $x = \frac{\pi}{2}$ للدالة f حيث :

$$f(x) = x \sin x$$

الحل : الدالة f مستمرة على و عليه تقبل دالة أصلية وحيدة g تأخذ القيمة 0 من أجل $x = \frac{\pi}{2}$ وهي معرفة كما يلي : $g(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin t dt$

و باستعمال المكاملة بالتجزئة نجد :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x g'(t).s(t)dt = \left[g(t).s(t) \right]_{\frac{\pi}{2}}^x - \int_{\frac{\pi}{2}}^x s'(t)g(t)dt$$

بوضع : $g'(t) = \sin t$ نجد : $g(t) = -\cos t$

وبوضع: $s(t) = t$ نجد $s'(t) = 1$

ومنه :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t\sin t\,dt = \left[-t\cos t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} -\cos t\,dt$$

$$= \left[-t\cos t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x} + \left[\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x} = \left[-t\cos t + \sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x}$$

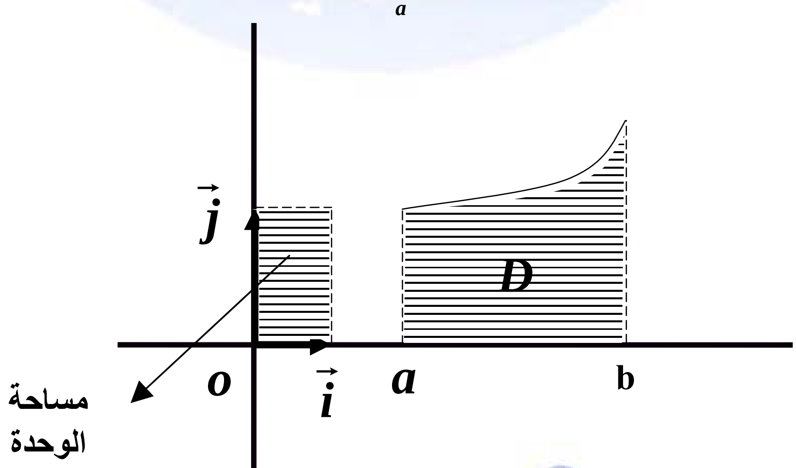
$$= \left[-x\cos x + \sin x\right] - \left[-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} t\sin t\,dt = -x\cos x + \sin x - 1$$

المساحة و التكامل

تعريف :

لتكن f دالة مستمرة و موجبة على مجال $[a\ ;\ b]$ ، (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$. مساحة الحيز المستوى أسفل (C) هو مساحة مجال المستوي D من المستوى المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = a$ و $x = b$ وتعطى العبارة : $\int_a^b f(x)\,dx$



ملاحظات :

1) يعرف D على أنه مجموعة النقط M من المستوى ذات الإحداثيتين $(x\ ;\ y)$ حيث :

$a \le x \le b$ و $0 \le y \le f(x)$

2) تعطى قيمة المساحة بوحدة المساحات و هي مساحة المستطيل المكون من شعاعي الوحدة .

مثال :

المستوى منسوب إلى المعلم متعامد $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ حيث

$\|\vec{i}\| = 3 \quad , \quad \|\vec{j}\| = 2$ (الوحدة هي cm)

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = x^2 + 4$.

(C) تمثيلها البياني في المعلم $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$

احسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمات التي معادلاتها :

$$x = 0 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad y = 0$$

الحل :

الدالة f مستمرة و موجبة على $[0\ ;\ 1]$ وعليه تعطى المساحة A بالعبارة :

$$A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + 4)dx$$

لكن الدوال الأصلية للدالة f تعطى بالعبارة $g(x) = \frac{x^3}{3} + 4x + c$

و منه :

$$A = \left[\frac{x^3}{3} + 4x\right]_0^1 \times 3 \times 2cm^2$$

$$A = \left[\left(\frac{(1)^3}{3} + 4(1)\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 4(0)\right)\right]_0^1 \times 6cm^2$$

$$A = \left(\frac{13}{3}\right) \times 6cm^2$$

$$A = 26cm^2$$

القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف :

a و b عددان حقيقيان حيث : $a < b$. لتكن f دالة مستمرة

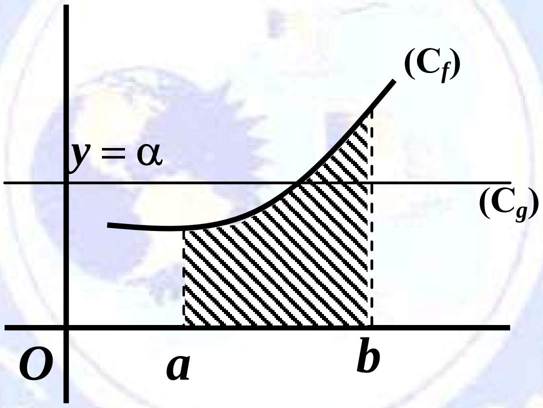
و موجبة على المجال $[a \; ; \; b]$ و لتكن g دالة ثابتة على $[a \; ; \; b]$

أي : $g(x) = \alpha$ حيث $\alpha > 0$

القيمة التي تعطى للعدد α حتى تتساوى المساحة أسفل المنحنى (C_f) و مساحة المستطيل

أسفل (C_g) تسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a \; ; \; b]$ و تعطى

بالعبارة : $\alpha = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$



مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على بالعبارة : $f(x) = x^2$

عين القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0 \; ; \; 2]$.

الحل :

الدالة مستمرة على و عليه فهي مستمرة على المجال $[0 \; ; \; 2]$

و كذلك f موجبة على $[0 \; ; \; 2]$ و منه القيمة المتوسطة α للدالة f على هذا المجال

تعطى كما يلي :

$$\alpha = \frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]$$ إذن : $\alpha = \dfrac{4}{3}$

إذن الدالة g معرفة كما يلي : $g(x) = \frac{4}{3}$

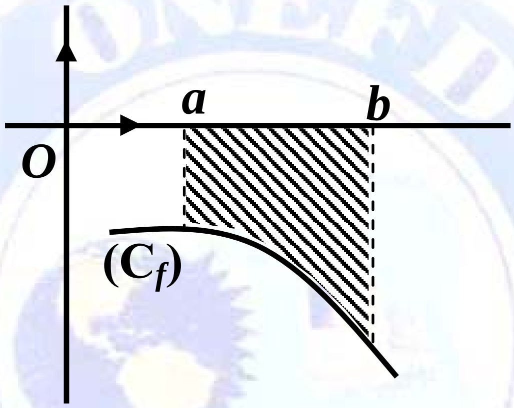
خواص :

أ) إذا كانت الدالة f مستمرة و سالبة على المجال $[a\ ;\ b]$ فإن

مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) الممثل لتغيرات الدالة f

و المستقيمات التي معادلاتها : $x = a \quad , \quad x = b \quad , \quad y = 0$

تعطى بالعبارة : $\int_a^b -f(x)dx$ أو $\int_b^a f(x)dx$



و تكون قيمتها المتوسطة : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

ب) إذا كانت f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a\ ;\ b]$ حيث من أجل كل x من $[a;b]$: $f(x) > g(x)$ فإن مساحة المجال D المحدد بالمنحيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = a \quad , \quad x = b$ تعطى مقدرة بوحدة المساحات بالعبارة :

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

تطبيق :

1) أنشئ التمثيلين البيانيين للدالتين f و g حيث :

$f(x) = x^2 - 2 \quad , \quad g(x) = x - 3$ على المجال $\mathbb{R}$ في معلم متعامد متجانس (الوحدة هي cm)

2) احسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f)

و المستقيمات التي معادلتها : $x=-\sqrt{2}$, $x=0$, $y=0$

و لتكن A_1

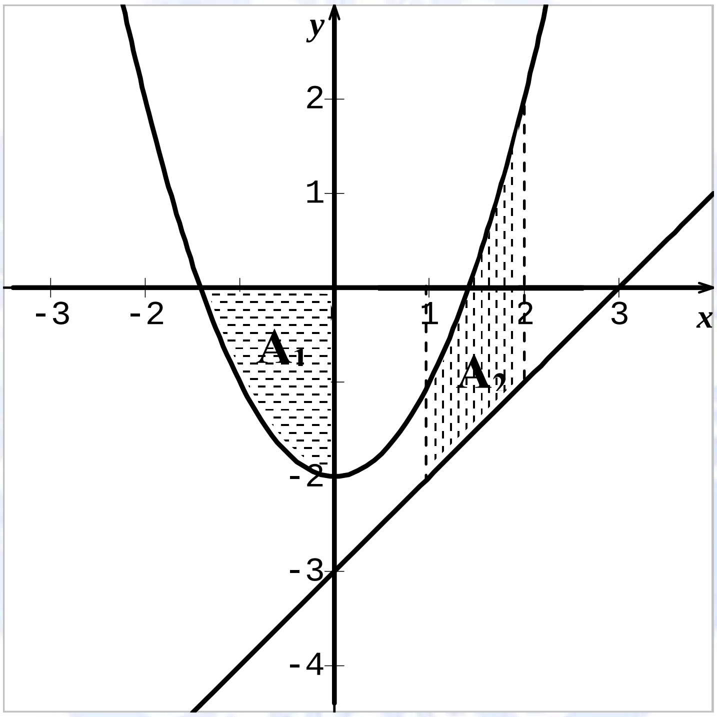
3) احسب مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنيين (C_f)

و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$, $x=2$

و لتكن : A_2

الحل :

1) التمثيل البياني :



3) حساب A_1 :

في المجال $\left[-\sqrt{2}\ ;\ 0\right]$ الدالة f سالبة و عليه :

$$A_1=\int_0^{-\sqrt{2}} f(x)\,dx$$

$$A_1=\int_0^{-\sqrt{2}} (x^2-2)\,dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x \right]_0^{-\sqrt{2}} = \left[\frac{\left(-\sqrt{2}\right)^3}{3} - 2\left(-\sqrt{3}\right) \right] - \left[\frac{0^3}{3} - 2(0) \right]$$

$A_1 = \frac{-2\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3}$ ومنه : $A_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} cm^2$

4) حساب A_2 :

في المجال $[1 \,;\, 2]$ لدينا : $f(x) > g(x)$

و عليه :

$$A_2 = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx$$

$$= \int_1^2 \left(x^2 - 2\right)dx - \int_1^2 (x-3)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x \right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_3^2$$

$$= \left[\frac{(2)^3}{3} - 2(2) \right] - \left[\frac{(1)^3}{3} - 2(1) \right] - \left[\frac{(2)^2}{2} - 3(2) \right] + \left[\frac{(1)^2}{2} - 3(1) \right]$$

إذن : $A_2 = \left(\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 2 - 2 + 6 + \frac{1}{2} - 3 \right) cm^2$

ومنه : $A_2 = \left(\frac{7}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) cm^2$ أي : $A_2 = \frac{11}{6} cm^2$

حساب بعض الحجوم

مبرهنة :

لتكن f دالة مستمرة على المجال I . a و b عددان حقيقيان من I حيث : $a<b$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

(D) مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلتها:

$x=a\ ,\ x=b\ ,\ y=0$

إن حجم الجزء المتولد عن دوران (D) حول محور الفواصل مقدر بوحدة الحجوم يعطى بالعبارة :

$$V=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$$

مثال 1 :

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=x^2$

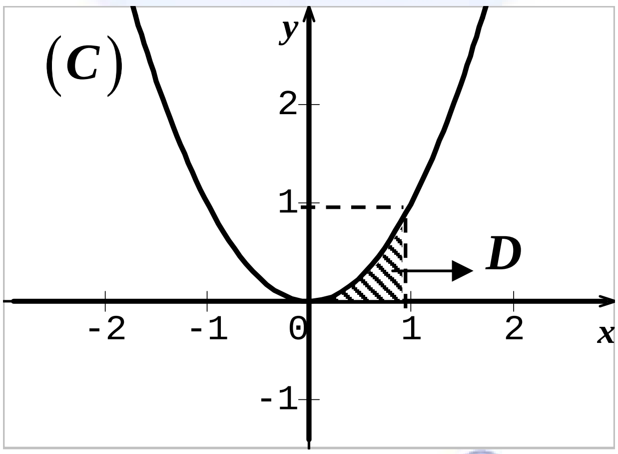
أنشئ تمثيلها (C) في معلم متعامد متجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$. و لتكن (D) مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C) (الوحدة cm) والمستقيمات التي معادلاها:

$x=0\ ,\ x=1,\ y=0$

احسب الحجم V المتولد عن دوران (D) حول محور الفواصل.

الحل :

1) التمثيل البياني :



2) حساب الحجم V :

$$V=\int_0^1 \pi\left[f(x)\right]^2 dx$$

$$V=\pi\int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx=\pi\int_0^1 x^4dx$$

$$V=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$V=\pi\left[\frac{(1)^5}{5}-\frac{(0)^5}{5}\right]=\pi\left[\frac{1}{5}\right]cm^3$$

$$V=\frac{\pi}{5}cm^3$$

مثال 2 :

نعتبر الدالة f : $f(x)=\frac{x}{4x^3+1}$

1- أنشئ التمثيل البياني للدالة f على $\mathbb{R}_+$

و ليكن (C) في معلم متعامد متجانس .

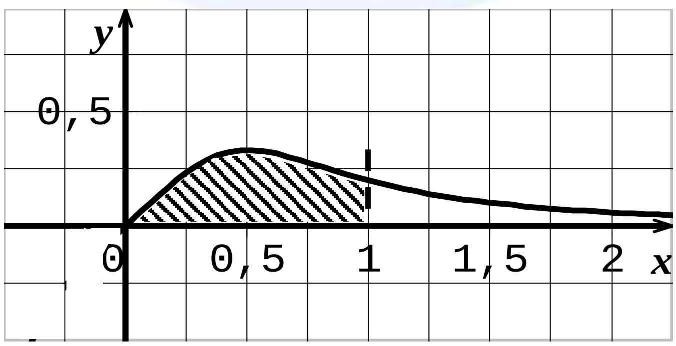
نفرض (D) مساحة الحيز المستوي المحدد بالمحنى (C) و

المستقيمات التي معادلتها : $x=0$, $x=1$, $y=0$.

- احسب الحجم المتولد عن دوران (D) حول محور الفواصل .

الحل :

1- التمثيل البياني :



2- حساب الحجم :

$$V = \int_0^1 \pi \left[f(x) \right]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \frac{x^2}{\left(4x^3+1\right)^2} dx = \pi \int_0^1 \frac{12x^2}{12\left(4x^3+1\right)^2} dx$$

$$V = \frac{\pi}{12} \int_0^1 \frac{12x^2}{\left(4x^3+1\right)^2} dx = \frac{\pi}{12} \left[\frac{-1}{4x^3+1} \right]_0^1$$

$$V = \frac{\pi}{12} \left[\left(\frac{-1}{5} \right) - \left(\frac{-1}{1} \right) \right] = \frac{\pi}{12} \left(\frac{-1}{5} + 1 \right)$$

إذن : $V = \frac{\pi}{12} \times \frac{4}{5}$ وعليه : $V = \frac{\pi}{15} cm^3$

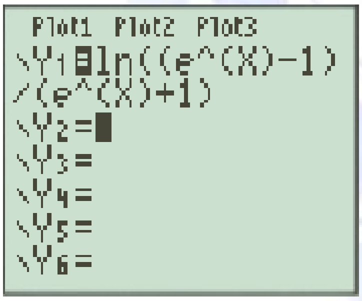
تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

التطبيق 1 :

1) أنشئ بآلة بيانية التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة بالعبارة :

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)$$

2) احسب التكامل الآتي : $\int_1^2 f(x)\, dx$



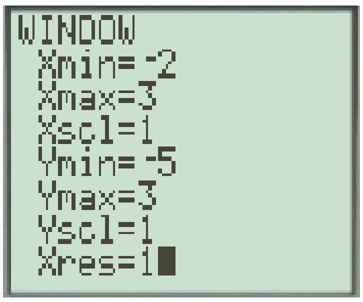
الحل :

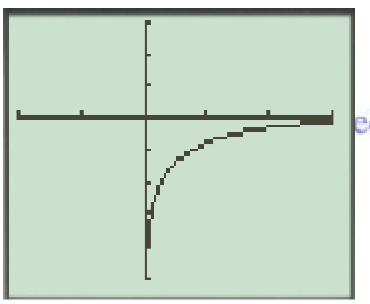
1) نضغط على الزر : 

ونكتب عبارة الدالة f في y_1 كما يلي:

2) نضغط على الزر 

وندخل الأرقام التالية:





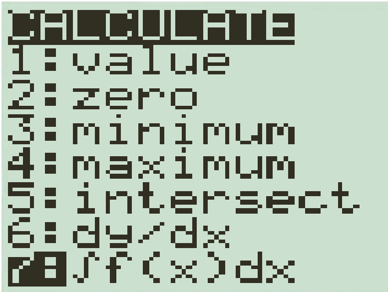
3) نضغط على الزر GRAPH

فنحصل على البيان

4) نضغط على الزر 2nd

ثم على الزر TRACE

ثم نختار العدد 7



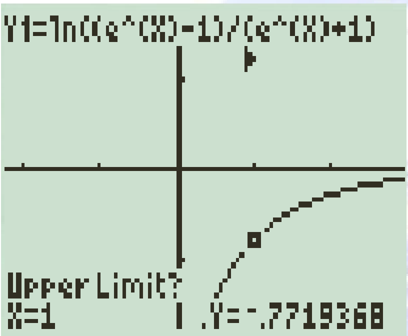
ثم نصادق بالزر ENTER

فيظهر المنحنى عليه نقطة ثم نضغط

على العدد 1 و نصادق بـ ENTER

فتظهر الشاشة المقابلة :

العدد 1 هو حد الأدنى للتكامل

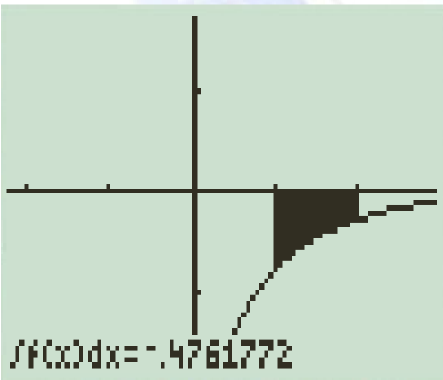


6) نضغط على العدد 2 و نصادق بـ ENTER

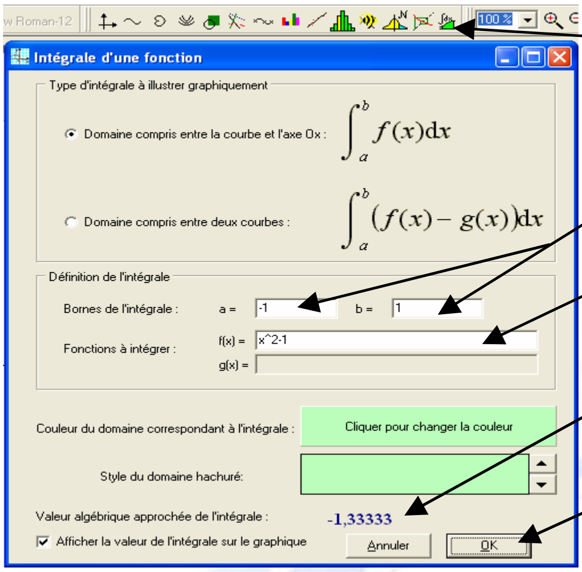
فتظهر الشاشة المقابلة :

العدد 2 هو حد الأعلى للتكامل

فنجد : $\int_{1}^{2} f(x)\,dx = -0,4761772$



تطبيق 2 : حساب $\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1 \right) dx$ باستعمال sinequanon



1) ننقر على

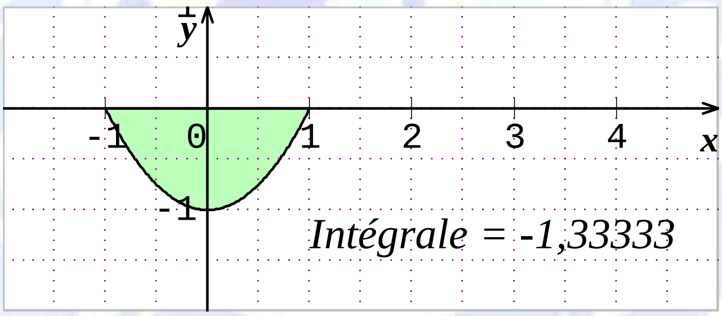
2) نكتب حدود التكامل

3) نكتب عبارة الدالة

فتظهر النتيجة

5) ننقر على

فيظهر الرسم أدناه:



تمـارين و مشكلات

التمرين 1

أذكر صحة أو خطأ ما يلي مع التعليل :

1) العدد $\int_a^b f(x)dx$ يمثل مساحة إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a\ ;\ b]$.

2) التكامل $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2} dx$ يعطى بالعبارة : $\left[\frac{-1}{x}\right]_{-2}^{2} = -1$

3) $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

4) إذا كانت f دالة مستمرة و تحقق $f(x) > 1$ على المجال $[0\ ;\ 1]$ فإن :
$\int_0^1 f(x)dx > 1$

5) $\int_1^2 (x^2 + 2)dx > \int_1^2 x^2 dx$

6) $\int_0^1 (x^4 + x^2 + 1)dx > 0$

7) f دالة مستمرة على المجال $[1\ ;\ 4]$
$1\int_2^4 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$

8) $a - b \leq \int_a^b \sin x dx \leq b - a$

9) $\int_{-\alpha}^{\alpha} x^5 dx = 0$

$$\int_{-a}^{a} x^4 dx = 2\int_{0}^{a} x^4 dx \quad (10$$

$$\int_{\pi}^{3\pi} \sin x dx = \int_{0}^{2\pi} \sin x dx \quad (11$$

$$\int_{a}^{b} xf(x)dx = x\int_{a}^{b} f(x)dx \quad (12$$

التمرين 2

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}$

1- عين مجموعة تعريف الدالة f .

2- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

3- عين الدوال الأصلية g للدالة f على المجال $]-\infty\ ;\ -1[$

4- أحسب التكامل $\int_{-3}^{-2} f(x)dx$

5- استنتج S مساحة الحيز المستوى المحدد بمنحنى الدالة f

والمستقيمات التي معادلتها : $x=-2,\ \ x=-3\ \ ,\ \ y=0$.

التمرين 3

احسب التكاملات الآتية :

1) $\int_{-1}^{1}\left(1-4x+x^{3}\right)dx$ 2) $\int_{1}^{3}(x+1)\left(x^{2}+2x\right)^{2}dx$

3) $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x+2}dx$ 4) $\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{3x+2}}dx$

5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{(1+\sin x)^{2}}dx$ 6) $\int_{-1}^{1}\frac{2e^{2x}+e^{x}}{e^{2x}+e^{x}+1}dx$

7) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$ 8) $\int_{-4}^{3}\frac{|x+2|}{\left(x^{2}+4x+10\right)^{2}}dx$

9) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos x}dx$ 10) $\int_{-\pi}^{0}\cos^{3}x\,dx$

التمرين 4

احسب باستعمال المكاملة بالتجزئة التكاملات الآتية :

1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2x-3)\cos x\,dx$ 2) $\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

3) $\int_{1}^{2}\ln x\,dx$ 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^{2}\cos x\,dx$

التمرين 5

نعتبر التكامل : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$

1) احسب كل من I_0 , I_1 .

2) باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد علاقة تراجعية بين I_n ; I_{n+1} .

استنتج I_2 , I_3 .

التمرين 6

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) ادرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ حيث الوحدة على محور الفواصل $2cm$ و على محور التراتيب $1cm$.

2) احسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C)

و بالمستقيمات التي معادلاتها : $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$

التمرين 7

1) أنشئ في معلم متعامد متجانس التمثيلين البيانيين للدالتين f و g حيث :

$f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x^3 - 1$

2) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g).

3) احسب S مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 2$, $x = 3$

التمرين 8

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{1}{1 + \ln x}$

1 – ادرس تغيرات الدالة f .

2 – أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

3 – لتكن S مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f)

و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x = e$, $x = 1$, $y = 0$

- عين حصرا للمساحة S .

التمرين 9

1– ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = 1 + \cos x$ على

المجال $[0 ; \pi]$ ثم أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد

متجانس (الوحدة هي cm) .

2– احسب مساحة الحيز المستوى (D) المحدد بالمنحنى (C_f)

والمستقيمات التي معادلاتها : $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$

3– احسب (D) حجم الجسم المحصل عليه بدوران حول محور

الفواصل .

التمرين 10

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = x\sqrt{3 - x}$

1– ادرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ تمثيلها البياني (γ) في معلم

متعامد متجانس $(O ; \vec{i} , \vec{j})$ الوحدة هي cm .

2– نعتبر الدالة g حيث : $g(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3 - x}$

- عين a و b و c حتى تكون g الدالة الأصلية للدالة f على

المجال $]-\infty ; 3[$.

3– احسب المساحة A للحيز المستوى (D) المحدد بالمنحنى (γ)

والمستقيمات التي معادلاتها : $x = 3$, $x = 0$, $y = 0$.

4– احسب حجم الجسم المولد عن دوران (γ) حول محور الفواصل .

التمرين 11

نعتبر الدالة f حيث $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ والمعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$.

1- ادرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ تمثيلها البياني (γ) في معلم متعامد متجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ الوحدة هي cm .

2- احسب التكامل : $\int_1^4 \frac{\ln x}{x}dx$.

3- احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;4]$.

التمرين 12

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=\frac{1}{4}x-1+\frac{1}{2}\ln|x-1|$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية .

2- بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α

حيث : $\frac{5}{2}<\alpha<3$.

3- اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم الذي

معادلته : $y=\frac{1}{4}x$.

5- أنشئ (Δ) و (C_f).

6- احسب المساحة $s(\alpha)$ للحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f)

و المستقيمات التي معادلاتها : $y=\frac{1}{4}x\ ,\ x=\alpha\ ,\ y=4$.

7- بين أن : $s(\alpha)=\frac{1}{4}(-\alpha^2-7\alpha-6\ln 3+20)\ Cm^2$.

الحـــلـــول

التمرين 1

1) خاطئة :

حتى تكون مساحة يجب أن تكون f موجبة تماما على $[a \; ; \; b]$

فيكون $\int_a^b f(x)dx > 0$.

2) خاطئة :

لأن التكامل غير موجود لكون الدالة $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ غير معرفة عند 0

وعليه فهي غير مستمرة على $[-2 \; ; \; 2]$.

3) صحيحة لأن:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

4) صحيح لأن:

$f(x) > 1$ أي : $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b dx$

أي أن : $\int_0^1 f(x)dx > [x]_0^1$ وعليه : $\int_0^1 f(x)dx > 1$

5) صحيح لأن:

$x^2 + 2 > x^2$ ومنه : $\int_1^2 (x^2+2)dx > \int_1^2 x^2 dx$

6) صحيح لأن:

$x^4 + x^2 + 1 > 0$ على $[0 \; ; \; 1]$ وعليه : $\int_0^1 (x^4 + x^2 + 1)dx > 0$

7) صحيح لأن:

$$\int_1^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx$$ من خواص التكامل .

8) صحيح لأن:

$-1\le \sin x\le 1$ وعليه : $-1(b-a)\le \int_a^b \sin x dx\le 1(b-a)$

إذن : $a-b\le \int_a^b \sin x dx\le b-a$

9) صحيح لأن : الدالة $x\mapsto x^5$ فردية وعليه : $\int_{-\alpha}^{\alpha} x^5dx=0$

10) صحيح لأن : الدالة $x\mapsto x^4$ زوجية وعليه :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x^4dx=2\int_0^{\alpha} x^4dx$$

11) صحيح لأن : 2π دور للدالة $x\mapsto \sin x$

وعليه : $\int_0^{2\pi} f(x)dx=\int_{0+\pi}^{\pi+2\pi} f(x)dx+\int_{\pi}^{3\pi}\sin x dx$

12) خطأ لأن : x متغير و ليس ثابت .

التمرين 2

1- تعيين مجموعة التعريف :

لدينا : $D_f=\{x\in \mathbb{R} : x^2-1\neq 0\}$ حيث : $D_f=\mathbb{R}-\{-1 ; 1\}$

$$D_f=]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$$

2- كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x+1)^2}$

لدينا : $f(x)=\frac{a(x+1)^2+b(x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2}$

$$f(x)=\frac{a\left(x^2+2x+1\right)+b\left(x^2-2x+1\right)^2}{\left[(x+1)(x-1)\right]^2}$$

$$f(x)=\frac{(a+b)x^2+(2a-2b)x+a+b}{\left(x^2-1\right)}$$

إذن : $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a-2b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a=b \\ 2a=1 \\ a+b=1 \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه : $f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}$

3- تعيين الدوال الأصلية : $f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}$

ومنه : $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{(x+1)^2}$

وعليه : $g(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x+1}+c$

$$g(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]+c \quad , \quad c\in \mathbb{R}$$

4- حساب التكامل : $\int_{-3}^{-2} f(x)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x-1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x+1}\right]_{-3}^{-2}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\times\frac{-1}{-3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{-2+1}\right]-\left[\frac{1}{2}\times\frac{-1}{-3-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{-3+1}\right]$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{4+12-3-6}{24}=\frac{7}{24}$$

5 – استنتاج المساحة :

لدينا : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ ومنه : $f(x)>0$

ومنه : $s=\int_{-3}^{-2} f(x)dx$ إذن : $s=\dfrac{7}{24}us$

us: تعني وحدة مساحة .

التمرين 3

حساب التكاملات :

1) لدينا : $\int_{-1}^{1}(1-4x+x^3)dx$

$$=\left[x-2x^2+\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}=\left(1-2+\frac{1}{4}\right)-\left(-1-2+\frac{1}{4}\right)$$

$$=-1+\frac{1}{4}+3-\frac{1}{4}=2$$

2) لدينا: $\int_{1}^{3}(x+1)(x^2+2x)^2dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}(2x+2)(x^2+2x)^2dx$

$$=\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(x^2+2x)^3\right]_{1}^{3}$$

$$=\frac{1}{6}(15)-\frac{1}{6}(3)=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$$

3) لدينا : $\int_{-1}^{0}\frac{1}{x+2}dx=\left[\ln|x+2|\right]_{-1}^{0}=\ln 2-0=\ln 2$

4) لدينا : $\int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{3x+2}}dx=\frac{2}{3}\int_{1}^{2}\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}dx$

$$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+2}\right]_{1}^{2}=\frac{2}{3}\sqrt{8}-\frac{2}{3}\sqrt{5}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{3}$$

5) لدينا :
$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx = \left[\frac{-1}{1+\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

6) لدينا :
$$\int_{-1}^{2} \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+e^x+1}dx = \left[\ln\left(e^{2x}+e^x+1\right)\right]_{-1}^{2}$$
$$= \ln\left(e^4+e^2+1\right) - \ln\left(e^{-2}+c^{-1}+1\right)$$
$$= \ln \frac{e^4+e^2+1}{e^{-2}+e^{-1}+1}$$

7) لدينا :
$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx = \frac{3}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{3}{2}\left[-\cos x\right]$$
$$= \frac{3}{2}\left[0+0\right] = 0$$

8) لدينا :
$$\int_{-4}^{3} \frac{|x+2|}{(x^2+4x+10)^2}dx$$
$$= \int_{-4}^{-2} \frac{|x+2|}{(x^2+4x+10)^2}dx + \int_{-2}^{3} \frac{|x+2|}{(x^2+4x+10)^2}dx$$
$$= \int_{-4}^{-2} \frac{-(x+2)}{(x^2+4x+10)^2}dx + \int_{-2}^{3} \frac{x+2}{(x^2+4x+10)^2}dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-4}^{-2} \frac{2x+4}{(x^2+4x+10)^2}dx + \frac{1}{2}\int_{-2}^{3} \frac{2x+4}{(x^2+4x+10)^2}dx$$
$$= \left[\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{x^2+4x+10}\right)\right]_{-4}^{-2} + \left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{x^2+4x+10}\right)\right]_{-2}^{3}$$
$$= \left[\frac{-1}{2}\times\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}\right] + \left[\frac{1}{2}\times\frac{-1}{31}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{20} - \frac{1}{62} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} - \frac{1}{20} - \frac{1}{62}$$

$$= \frac{310 - 93 - 60}{1860} = \frac{157}{1860}$$

9) لدينا :

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= -\left[\frac{-1}{\cos x}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$$

10) لدينا :

$$\int_{-\pi}^{0} \cos^3 x dx = \int_{-\pi}^{0} \cos x . \cos^2 x dx$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \cos x\left(1 - \sin^2 x\right) dx$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \left(\cos x - \cos x . \sin^2 x\right) dx$$

$$= \left[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{2}{3}$$

التمرين 4

التكامل بالتجزئة :

1) لدينا :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x - 3)\cos x dx$$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = \left[f(x).g(x)\right]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x) dx$$

بوضع : $f'(x) = \cos x$ و $g(x) = 2x - 3$

نجد: $f(x) = \sin x$ و $g'(x) = 2$

إذن : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2x-3)\cos x\,dx=\left[(2x-3)\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx$

$$=\left[(2x-3)\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-2\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\left[(2x-3)\sin x+2\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=(-2)-(\pi-3)=1-\pi$$

2) لدينا : $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\left[f(x).g(x)\right]_a^b-\int_a^b g'(x)f(x)dx$$

بوضع : $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ و $g(x)=x$

إذن : $f(x)=2\sqrt{x+1}$ و $g'(x)=1$

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\left[2x\sqrt{x+1}\right]_0^1-\int_0^1 2\sqrt{x+1}dx$$

$$=2\sqrt{2}-2\int_0^1(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\sqrt{2}-2\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=2\sqrt{2}-\left[\frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_0^1$$

$$=2\sqrt{2}-\frac{4}{3}\left[2\sqrt{2}+2\right]=-\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{4}{3}$$

3) لدينا : $\int_1^2\ln x\,dx$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx=\left[f(x).g(x)\right]_a^b-\int_a^b g'(x)f(x)dx$$

بوضع : $f'(x)=1$ و $g(x)=\ln x$

نجد : $f(x)=x$ و $g'(x)=\frac{1}{x}$

$$\int_1^2 \ln x dx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 1dx$$

$$= [x\ln x]_1^2 - [x]_1^2 = [x\ln x - x]_1^2$$

$$= (2\ln 2 - 2) - (1\ln 1 - 1)$$

$$= 2\ln 2 - 1$$

4) لدينا : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)f(x)dx$$

بوضع : $f'(x)=\cos x$ و $g(x)=x^2$

نجد : $f(x)=\sin x$ و $g'(x)=2x$

ومنه : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx = [x^2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin dx$$

- حساب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$:

لدينا : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)g(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)f(x)dx$

بوضع : $f'(x)=\sin x$ و $g(x)=x$

نجد : $f(x) = -\cos x$ و $g'(x) = 1$

إذن : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

$= 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

ومنه : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$

التمرين5

1) حساب I_0 :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

- حساب I_1 : $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

لدينا : $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)f(x)dx$

بوضع : $f'(x) = \sin x$ و $g(x) = x$

نجد : $f(x) = -\cos x$ و $g'(x) = 1$

إذن : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$

و مما سبق : $I_1 = 1$

2) إيجاد علاقة تراجعية بين I_n وI_{n+1} : $I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1} \sin x dx$

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)f(x)dx$$

بوضع : $f'(x) = \sin x$ و $g(x) = x^{n+1}$

نجد : $f(x) = -\cos x$ و $g'(x) = (n+1)x^n$

ومنه : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n+1} \sin x dx = \left[x^{n+1} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) x^n \cos x dx$

$$= \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} \cos\frac{\pi}{2} - 0\cos 0 \right) - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx$$

$$= -(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx$$

- حساب : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx$

لدينا : $\int_a^b f'(x) g(x) dx = \left[f(x).g(x) \right]_a^b - \int_a^b g'(x) f(x) dx$

بوضع : $f'(x) = \cos x$ و $g(x) = x^n$

نجد : $f(x) = \sin x$ و $g'(x) = nx^{n-1}$

وبالتالي : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx = \left[x^n \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \sin x dx$

أي : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \sin\frac{\pi}{2} - 0 - n.\mathrm{I}_{n-1}$

ومنه : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\mathrm{I}_{n-1}$

إذن : $\mathrm{I}_{n+1} = -(n+1)\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n\mathrm{I}_{n-1} \right]$

و منه : $\mathrm{I}_{n+1} = -(n+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + n(n+1)\mathrm{I}_{n-1}$

استنتاج I_2 و I_3 :

$$\mathrm{I}_2 = -2\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 + 2\mathrm{I}_0 = -\pi + 2$$

$$I_3 = -3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 6I_1 = \frac{-3\pi^2}{4} + 6$$

التمرين 6

1 – دراسة تغيرات f : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 > 0\}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		-	0	+	0	-	

و منه : $D_f =]-1\ ;\ 1[$

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = +\infty$

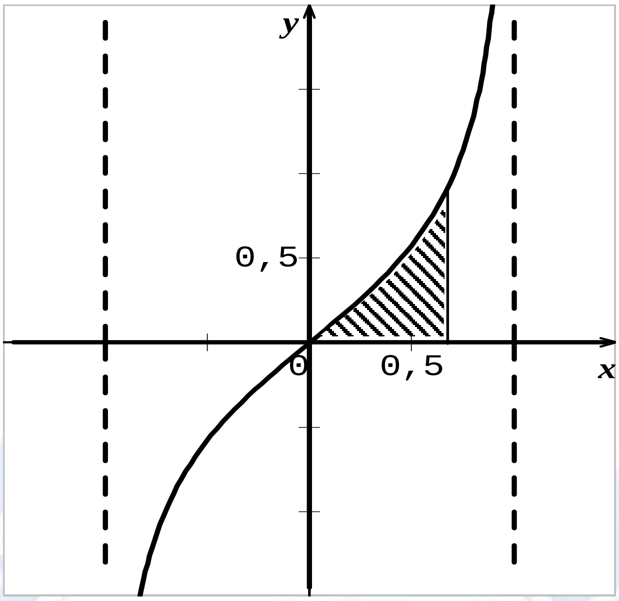
$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{1-x^2} - x \times \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1-x^2+2x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

ومنه : $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما على $]-1\ ;\ 1[$

x	-1		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

هناك فرعين لا نهائيين ومستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=-1$ و $x=1$.



2- حساب المساحة :

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$S=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx$$

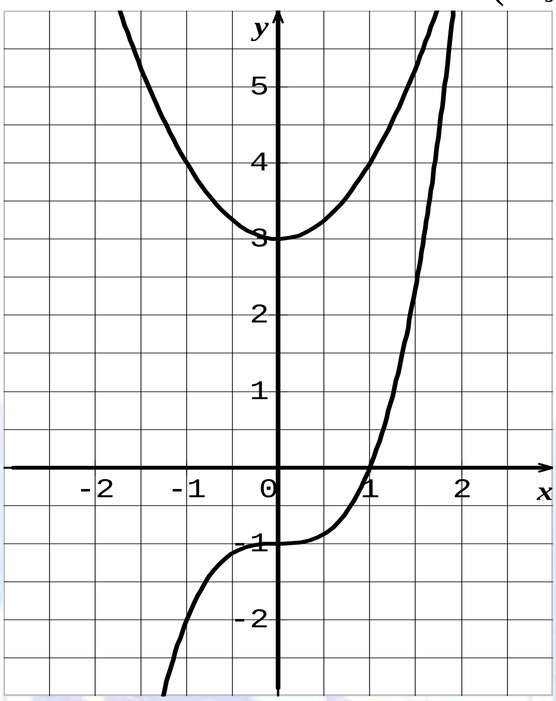
$$S=\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\left(-\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)-\left(-\sqrt{1-(0)^2}\right)$$

ومنه : $S=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\times 4cm^2$ وعليه : $S=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\times 4cm^2$

إذن : $S=2\left(2-\sqrt{3}\right)cm^2$

التمرين 7

1- إنشاء (C_f) و (C_g) :



2- دراسة الوضع النسبي لـ : (C_f) و (C_g) :

$$g(x) - f(x) = x^3 - 1 - x^2 - 3 = x^3 - x^2 - 4$$
$$= (x-2)(x^2 + x + 2)$$

$$g(x) - f(x) = 0$$

معناه : $x - 2 = 0$ ومنه : $x = 2$ لأن : $x^2 + x + 2 > 0$

وعليه : $f(x) - g(x) > 0$ تكافئ : $x > 2$

إذن : (C_f) تقع تحت (C_g) في المجال $]2;+\infty[$ و تقع فوق (C_g) في المجال $]-\infty;2[$

3- حساب المساحة :

في المجال $[2;3]$ لدينا : (C_g) تقع فوق (C_f) ومنه :

$$S = \int_2^3 [g(x) - f(x)]dx$$

$$S = \int_2^3 (x^3 - x^2 - 4)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3$$

$$S = \left[\frac{(3)^4}{4} - \frac{(3)^3}{3} - 4(3) \right] - \left[\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - 4(2) \right]$$

$$S = \frac{81}{4} - \frac{27}{3} - 12 - \frac{16}{4} + \frac{8}{3} + 8$$

$$S = \frac{81}{4} - 9 - 4 - 4 + \frac{8}{3} = \frac{81}{4} + \frac{8}{3} - 17$$

$$S = \frac{243 + 32 - 204}{12} = \frac{71}{12}(us)$$

التمرين 8

1- دراسة تغيرات f :

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \; ; \; 1 + \ln x \neq 0 \}$$

$1 + \ln x = 0$ معناه : $\ln x = -1$ ومنه : $x = \frac{1}{e}$

$$D_f = \left]0 \; ; \; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e} \; ; \; +\infty\right[$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{1 + \ln x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ <}} \frac{1}{1 + \ln x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ >}} \frac{1}{1 + \ln x} = +\infty$$

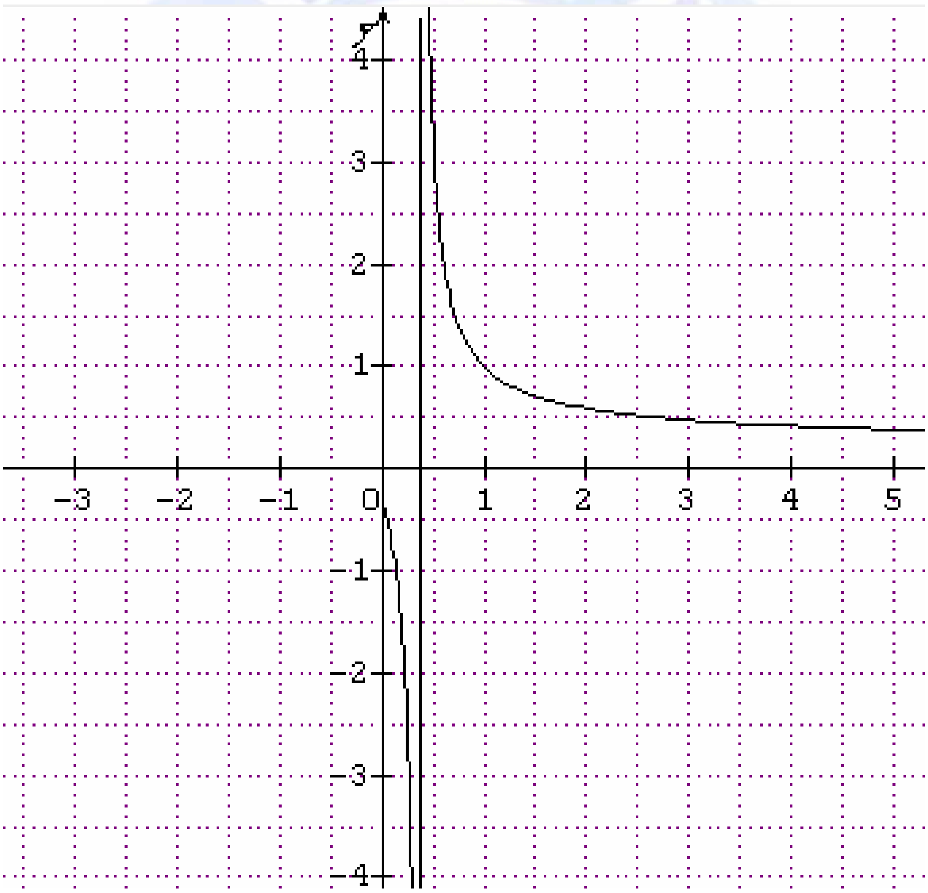
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \ln x} = 0$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{(1 + \ln x)^2} = \frac{-1}{x(1 + \ln x)^2}$$

وعليه : $f'(x) < 0$ و منه : f متناقصة تماما على كل من المجالين $\left]\frac{1}{e} \; ; \; +\infty\right[$ و $\left]0 \; ; \; \frac{1}{e}\right[$.

x	0 $\qquad\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$

2- إنشاء (C) : $x=\frac{1}{e}$, $y=0$ معادلتي المستقيمين المقاربين .



3- حصر المساحة S:

$S=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{1}{1+\ln x}dx$ بما أن $1<x<e$

فإن : $0<\ln x<1$ ومنه : $1<1+\ln x<2$

إذن : $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+\ln x} < 1$ وعليه : $\frac{1}{2} < f(x) < 1$

ومنه : $\frac{1}{2}(e-1) \le \int_1^e f(x)dx \le 1(e-1)$

وعليه : $\frac{1}{2}(e-1) < S < e-1$

التمرين 9

1) دراسة تغيرات f : $D_f = [0\,;\,\pi[$

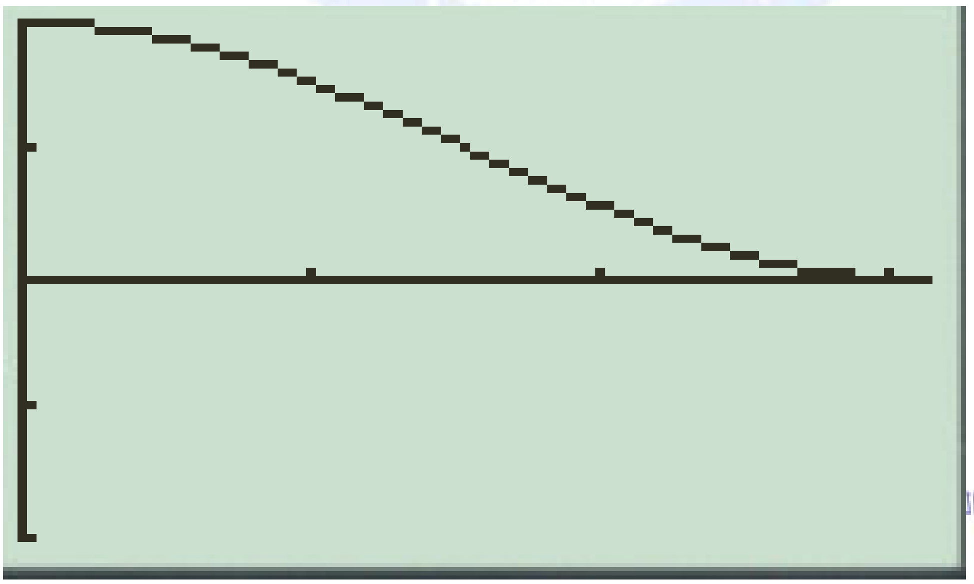
$f(0)=2 \quad , \quad f(\pi)=0$

$f'(x) = -\sin x$ ولدينا : $\sin x > 0$ في المجال $]0\,;\,+\infty[$

ومنه : $f'(x) < 0$

إذا كان : $x=0$ أو $x=\pi$ فإن : $f'(x)=0$

x	0		π
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	2	↘	0



2 – حساب المساحة :

$$S=\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\int_0^{\pi}(1+\cos x)\,dx$$

$$S=\left[x+\sin x\right]_0^{\pi}=\pi \quad cm^2$$

3 – حساب الحجم :

$$V=\int_0^{\pi}\pi\left[f(x)\right]^2dx$$

$$V=\int_0^{\pi}\pi(1+\cos x)^2dx=\pi\int_0^{\pi}\left(1+2\cos x+\cos^2 x\right)dx$$

$$V=\int_0^{\pi}\pi\left(1+2\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$V=\int_0^{\pi}\pi\left(\frac{3}{2}+2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$V=\pi\left[\frac{3}{2}x+2\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]$$

$$V=\frac{3}{2}\pi \ cm^3$$

التمرين 10

1- دراسة تغيرات f : لدينا : $D_f=\{x\in\mathbb{R} : 3-x\geq 0\}$ ومنه :

$$D_f=\left]-\infty\ ;\ 3\right[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{3-x}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\sqrt{3-x}=0$$

$$f'(x)=\sqrt{3-x}+x\times\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

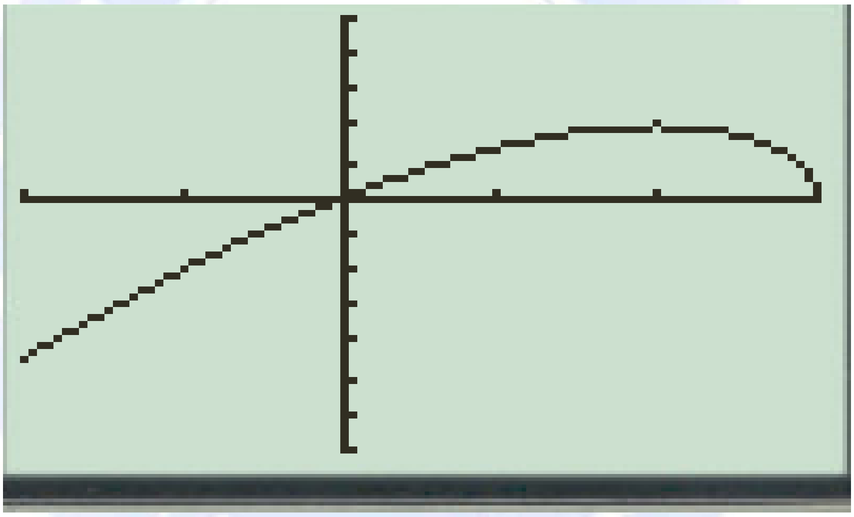
$$f'(x)=\frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}}=\frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$$

x	$-\infty$ 2	3
$f'(x)$	+	-

و منه f متزايدة تماما على المجال $]-\infty \; ; \; 2]$ و متناقصة تماما على $[2 \; ; \; 3]$

x	$-\infty$	2	3
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$ ↗	2	↘ 0

- الرسم البياني بآلة :



2- تعيين a و b و c : $g(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\sqrt{3-x}$

$$g'(x) = (2ax + b)\sqrt{3-x} + \left(ax^2 + b + x + c\right) \times \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

$$g'(x) = \frac{2(2ax + b)(3 - x) - \left(ax^2 + bx + c\right)}{2\sqrt{3-x}}$$

$$g'(x) = \frac{(4ax + 2b)(3 - x) - ax^2 - bx - c}{2\sqrt{3-x}}$$

$$g'(x) = \frac{12ax - 4ax^2 + 6b - 2bx - ax^2 - bx - c}{2\sqrt{3-x}}$$

$$g'(x)=\frac{-5ax^2+(12a-3b)x+6b-c}{2(3-x)}\times\sqrt{3-x}$$

و عليه نكون g دالة أصلية للدالة f إذا كانت و فقط إذا كان :

$$\frac{-5ax^2+(12a-3b)x+6b-c}{6-2x}=x$$

و منه : $-5ax^2+(12a-3b)x+6b-c=-2x^2+6x$

و عليه : $\begin{cases}-5a=-2\\12a-3b=6\\6b-c=0\end{cases}$ و عليه : $\begin{cases}a=\frac{2}{5}\\\frac{24}{5}-3b=6\\c=6b\end{cases}$

ومنه : $a=\frac{2}{5}$ ؛ $b=-\frac{2}{5}$ ؛ $c=-\frac{12}{5}$

و بالتالي : $g(x)=\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{2}{5}x-\frac{12}{5}\right)\sqrt{3-x}$

3 – حساب المساحة A :

$$A=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 x\sqrt{3-x}\,dx$$

$$A=[g(x)]_0^3=g(3)-g(0)$$

$$=\frac{2}{5}(3^2-3-6)\sqrt{3-3}-\frac{2}{3}(0-0-6)\sqrt{3-0}$$

$$A=\frac{12\sqrt{3}}{5}\ cm^2$$

4 – حساب الحجم :

$$V=\int_0^3\pi f^2(x)dx=\pi\int_0^3\left(x\sqrt{3-x}\right)^2dx$$

$$V=\int_0^3 x^2(3-x)dx=\pi\int_0^3\left(-x^3+3x^2\right)dx$$

$$V=\pi\int_0^3\left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_0^3=\pi\left[\left(\frac{-81}{4}+27\right)-0\right]$$

$$V=\frac{27\pi}{4}\ cm^3$$

التمرين 11

1- دراسة تغيرات f : $D_f =]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}\ln x = -\infty$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

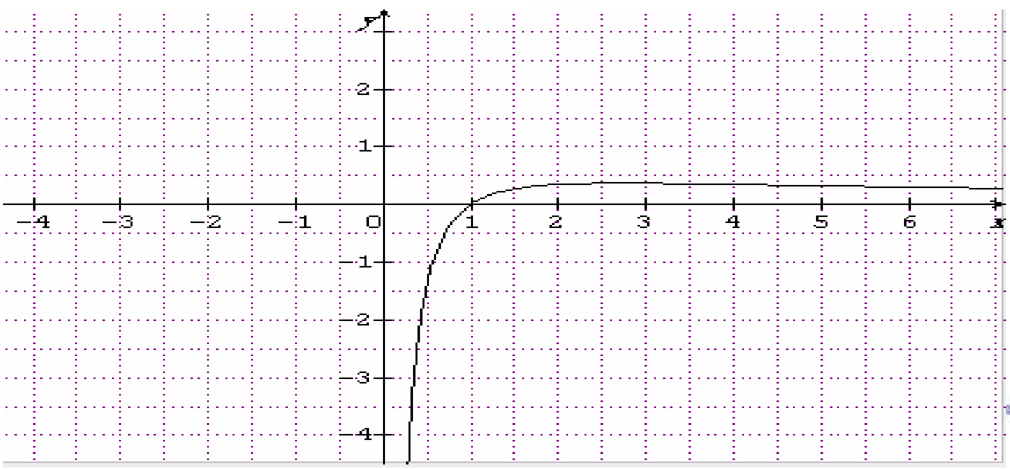
$g'(x) = 0$ تكافئ : $1 - \ln x = 0$ و منه : $\ln x = 1$ إذن : $x = e$

x	0		e		$+\infty$
$1 - \ln x$		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	

لدينا : $f(e) = \frac{1}{e}$ ومنه:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	e

- إنشاء البيان : $x = 0$ ، $y = 0$ معادلتين للمستقيمين المتقاربين .



- حساب التكامل :

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^4 \frac{1}{4}(\ln x)^1 dx$$

$$= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^4 = \frac{(\ln 4)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = 2(\ln 2)^2$$

3 – حساب القيمة المتوسطة للدالة f :

و هو العدد α : $\alpha = \frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)dx$ أي $\alpha = \frac{1}{3}\int_1^3 f(x)dx$ ومنه

$$\alpha = \frac{1}{3} \times 2(\ln 2)^2$$

إذن الدالة g معرفة بالعبارة : $g(x) = \frac{2}{3}(\ln 2)^2$

التمرين 12

-1 دراسة تغيرات f : $D_f = \{x \in \square : x - 1 \neq 0\}$

f : $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{2}\ln|x-1|$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{2}\ln(-x+1)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (-x+1)\left[\frac{\frac{1}{4}x - 1}{-x+1} + \frac{1}{2}\frac{\ln(-x+1)}{-x+1}\right] = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{2}\ln|x-1| = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ >}} \frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{2}\ln|x-1| = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x - 1 + \frac{1}{2}\ln|x-1| = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+2}{4(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{4(x-1)}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f متزايدة تماما على كل المجالين $\left]-\infty\ ;\ -1\right]$

و $\left]1\ ;\ +\infty\right[$ و متناقصة على المجال $\left[-1\ ;\ 1\right[$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$f(-1) = -\frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} ln\, 2$ ومنه $f(-1) \simeq -0,9$

- دراسة الفروع اللانهائية :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{ln(-x+1)}{-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{-x-1}{-x} \times \frac{ln(-x+1)}{-x+1} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - \frac{1}{4}x = \lim_{x \to -\infty} \left(-1 + \frac{1}{4} ln(-x+1) \right) = +\infty$$

يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته : $y = \frac{1}{4}x$

بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{ln(x-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\times\frac{x-1}{x}\times\frac{ln(x-1)}{x-1}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{4}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{2}ln(x-1)\right)=+\infty$$

يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته : $y=\frac{1}{4}x$

بجوار $+\infty$

2 – تبيان أن (C_f) يقطع محور الفواصل :

في المجال $\left]3\ ;\ \frac{5}{2}\right[$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما .

و لدينا :

$$f(3)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}ln\,2$$

$$f(3)\approx 0,096$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}ln\frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)\approx -0,17$$

و منه : $f(3).f\left(\frac{5}{2}\right)<0$

و حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α من المجال $\left]3\ ;\ \frac{5}{2}\right[$

بحيث : $f(\alpha)=0$

و منه (C_f) يقطع محور الفواصل .

3 – معادلة المماس : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$$f'(0)=-\frac{1}{4}\ ,\ f(0)=-1$$

$$y=-\frac{1}{4}x-1$$

4- الوضع النسبي:

$$f(x)-y=\frac{1}{4}x-1+\frac{1}{2}ln|x-1|-\frac{1}{4}x$$

$$f(x)-y=-1+\frac{1}{2}ln|x-1|$$

$$f(x)-y=\frac{-2+ln|x-1|}{2}$$

$f(x)-y=0$ تكافئ : $-2+ln|x-1|=0$ و منه : $ln|x-1|=2$

و عليه : $|x-1|=e^2$ إذن: $x-1=e^2$ أو $x-1=-e^2$ و عليه :

$x=1+e^2$ أو : $x=1-e^2$

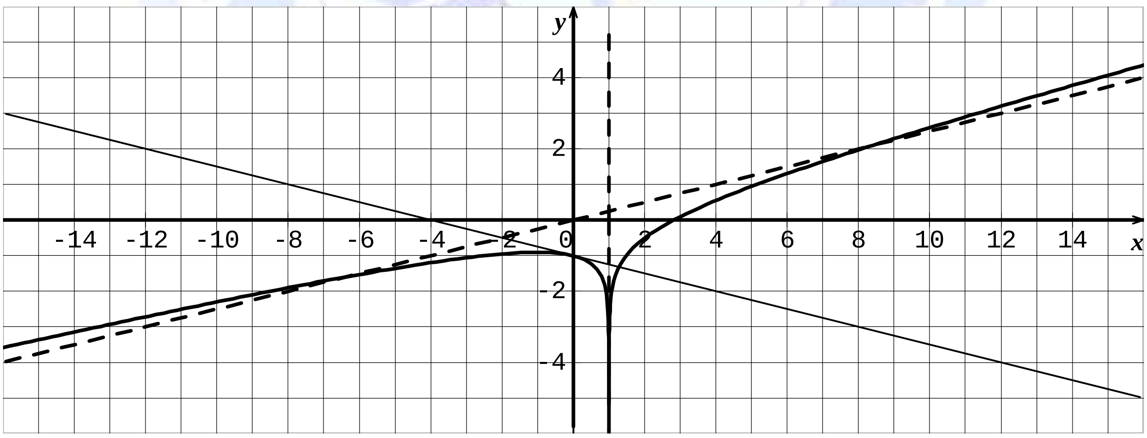
$f(x)-y<0$ تكافئ : $ln|x-1|-2<0$ و منه : $ln|x-1|<2$ و عليه

: $|x-1|<e^2$ و منه : $-e^2<x-1<e^2$ إذن : $1-e^2<x<1+e^2$

و عليه (C_f) يقع تحت (Δ) في المجال $]1-e^2;1+e^2[$ و يقع فوقه في كل من

المجالين : $]1+e^2;+\infty[$ و $]-\infty;1-e^2[$

5 – رسم (Δ) و (C_f) :



6 – حساب المساحة :

$$S(\alpha)=\int_{\alpha}^{4}[y-f(x)]dx=\int_{\alpha}^{4}\left(1-\frac{1}{2}ln|x-1|\right)dx$$

$$S(\alpha)=\int_{\alpha}^{4}1dx-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{4}ln(x-1)dx$$

$$S(\alpha)=[x]_{\alpha}^{4}-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{4}ln(x-1)dx$$

$$=4-\alpha-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{4}ln(x-1)dx$$

المكاملة بالتجزئة : $\int_{\alpha}^{4}ln(x-1)dx$

لدينا :

$$\int_{a}^{b}f'(x)g(x)dx=[f(x).g(x)]_{a}^{b}-\int_{a}^{b}g'(x)f(x)dx$$

بوضع : $f'(x)=1$ و $g(x)=ln(x-1)$

نجد : $f(x)=x$ و $g'(x)=\frac{1}{x-1}$

$$\int_{\alpha}^{4}ln(x-1)dx=[xln(x-1)]_{\alpha}^{4}-\int_{\alpha}^{4}\frac{x}{x-1}dx$$

$$=4ln3-\alpha ln(\alpha-1)-\int_{\alpha}^{4}\frac{x-1+1}{x-1}dx$$

$$=4ln3-\alpha ln(\alpha-1)-\int_{\alpha}^{4}1+\frac{1}{x-1}dx$$

$$=4ln3-\alpha ln(\alpha-1)-[x+ln(x-1)]_{\alpha}^{4}$$

$$=4ln3-\alpha ln(\alpha-1)-[4+ln3-\alpha-ln(\alpha-1)]$$

و بالتالي :

$$\int_{a}^{b}ln(x-1)dx=3ln3-4-(\alpha-1)ln(\alpha-1)+\alpha$$

إذن :

$$S(\alpha)=4-\alpha-\frac{1}{2}[3ln3-4-(\alpha-1)ln(\alpha-1)+\alpha]$$

$$S(\alpha)=6-\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{2}ln3+\frac{1}{2}(\alpha-1)ln(\alpha-1)\quad us$$

إثبات أن : $S(\alpha)=\frac{1}{4}\left(-\alpha^2-7\alpha-6\ln3+20\right)$

لدينا : $f(\alpha)=0$ و منه : $\frac{1}{4}\alpha-1+\frac{1}{2}\ln(\alpha-1)=0$

إذن: $\frac{1}{2}\ln(\alpha-1)=1-\frac{1}{4}\alpha$ أي: $\frac{1}{2}\ln(\alpha-1)=\frac{4-\alpha}{4}$

و عليه : $\ln(\alpha-1)=\frac{4-\alpha}{2}$

بالتعويض في $S(\alpha)$ نجد :

$$S(\alpha)=6-\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{2}\ln3+\frac{1}{4}(\alpha-1)(4-\alpha)$$

$$S(\alpha)=6-\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{2}\ln3+\frac{1}{4}\left(4\alpha-\alpha^2-4+\alpha\right)$$

$$S(\alpha)=\frac{1}{4}\left(-\alpha^2-7\alpha-6\ln3+20\right)$$

