- دوال أسية – دوال القوى
- دوال الجذور

الكفاءات المستهدفة :

- حل مشكلات باستعمال الدوال الأسية.
- معرفة و تفسير نهايات دوال أسية و دوال القوى.
- حساب مشتقات دوال أسية و دوال القوى و دوال الجذور ...

تصميم الدرس

- أنشطة.

I – القوى الحقيقية.

II – الدالة الأسية ذات الأساس a: $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

III – الدالة الجذر n-icim

V – دوال القوي.

تمارين ومشكلات.

الحلول.

أنشطة

النشاط 1 :

نعتبر الدالة العددية f التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد $f(x)$

حيث : $f(x)=10^x$

1 – بين أن $10^x = e^{xLn10}$ حيث e هو العدد النيبيري .

2 – احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3 – عين الدالة المشتقة للدالة f

4 – أنشئ التمثيل البياني (C) للدالة (بعد دراسة الفروع اللانهائية)

في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

الحل :

1) لدينا : $10^x = e^{ln10^x}$ (حسب الخاصية $e^{ln\alpha}=\alpha$

و عليه : $10^x = e^{xln10}$ (حسب الخاصية $lnx^n = nlnx$

و منه : $f(x)=e^{xln10}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{xln10} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{xln10} = +\infty$

3) تعيين الدالة المشتقة :

لدينا: $f(x)=e^{xln10}$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركب الدالتين

$x\mapsto xln10$ و $x\mapsto e^x$ اللتين تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$f'(x)=(ln10).e^{xln10}=(ln10).10^x$

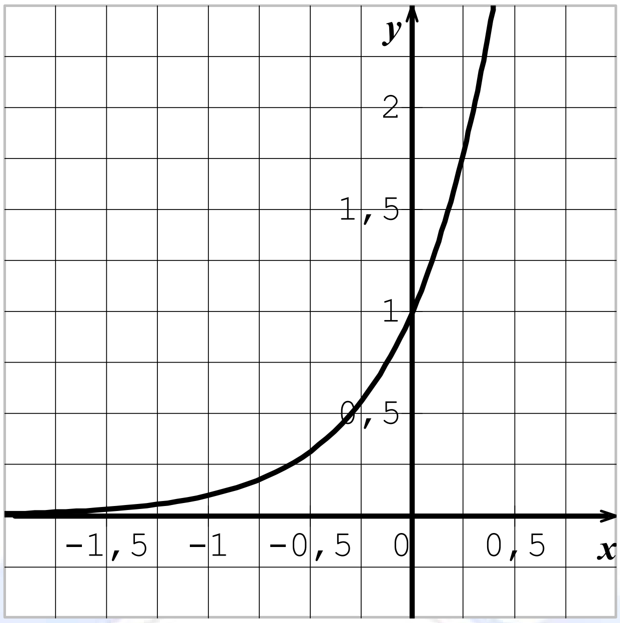
4) التمثيل البياني :

(C) يقبل فرعين لانهائيين و مستقيم مقارب معادلته : $y=0$ عند $-\infty$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{xLn10}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} Ln10\times\dfrac{e^{xLn10}}{xLn10}=+\infty$

و عليه (C) يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور التراتيب عند $+\infty$

التمثيل البياني :



النشاط 2 :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي : $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1- بين أن : $\left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{-x\ln 2}$

2- أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3- عين الدالة المشتقة للدالة f على $\mathbb{R}$.

4- أنشئ بآلة بيانية التمثيل البياني (γ) للدالة f

(بعد دراسة الفروع اللانهائية) .

الحل :

1) لدينا $\left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^x}$ و منه : $\left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{x\ln\frac{1}{2}}$

و عليه : $\left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{-x\ln 2}$ إذن : $f(x) = e^{-x\ln 2}$

2) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x\ln 2} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x\ln 2} = +\infty$$

2) الدالة المشتقة :

الدالة f هي مركب دالتين $x \mapsto -x\ln 2$ و $x \to e^x$ القابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وعليه فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

حيث : $f'(x)=(-ln2)e^{-xln2}$ و عليه : $f'(x)=(-ln2)\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

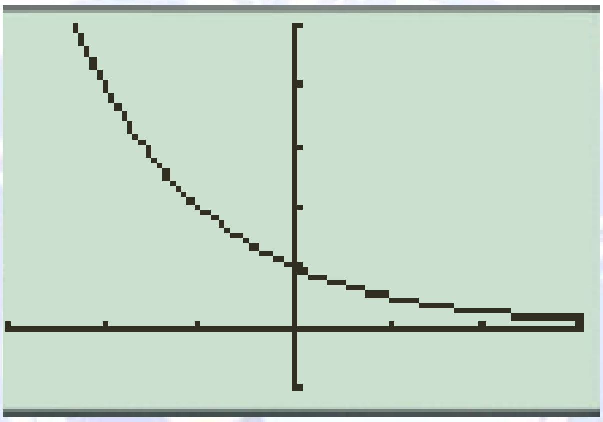
4) - الفروع اللانهائية :

(γ) يقبل فرعين لانهائيين و مستقيم مقارب معادلته $y=0$ عند $+\infty$

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-xln2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}(-ln2)\times\frac{e^{-xln2}}{-xln2}=-\infty$

إذن : (C) يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور التراتيب.

- إنشاء (γ) بآلة بيانية :



القوى الحقيقية

1- تعريف :

من أجل : a عدد حقيقي موجب تماما و b عدد حقيقي : $a^b = e^{blna}$

2- خواص :

من أجل كل عددان حقيقيان موجبان تماما و عددان حقيقيان a و b لدينا :

- $a^{b+b'} = a^b . a^{b'}$ • $lna^b = blna$
- $\left(a^b\right)^{b'} = a^{b \times b'}$ • $a^{b-b'} = \dfrac{a^b}{a^{b'}}$
- $\left(\dfrac{a}{a'}\right)^b = \dfrac{a^b}{a'^b}$ • $\left(a.a'\right)^b = a^b . a'^b$

أمثلة :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\pi} . \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\pi+\sqrt{3}} \; ; \; \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\sqrt{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \; ; \; \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}}$$

الدالة الأسية ذات الأساس a: $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$

1- تعريف :

ليكن a عدد حقيقي موجب تماما بحيث $a \neq 0$

الدالة $x \mapsto a^x = e^{xlna}$ و المعرفة على $\mathbb{R}$ تسمى الدالة الأسية ذات الأساس a و نرمز لها بالرمز exp_a

- دراسة الدالة f : $x \mapsto a^x$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

أ) من أجل $a > 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{xlna} = 0$

لأن $lna > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} e^{xlna} = +\infty$$

ب) من أجل $0 < a < 1$: $lna < 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} e^{xlna} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty} a^{x}=\lim_{x\to+\infty} e^{xlna}=0$$

الدالة المشتقة للدالة f : $x\mapsto a^{x}$

$$f\left(x\right)=e^{xlna}$$

الدالة f هي مركب دالتين هما $x\mapsto xlna$ و $x\mapsto e^{x}$ و هما قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و عليه الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة f' معرفة كما يلي :

$$f'\left(x\right)=\left(lna\right).e^{xlna}$$

- من أجل $a>1$: $ln\,a>0$ ومنه : $f'(x)>0$ وعليه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
- من أجل $0<a<1$: $lna>0$ و منه $f'\left(x\right)<0$ و عليه f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

من أجل $a>1$

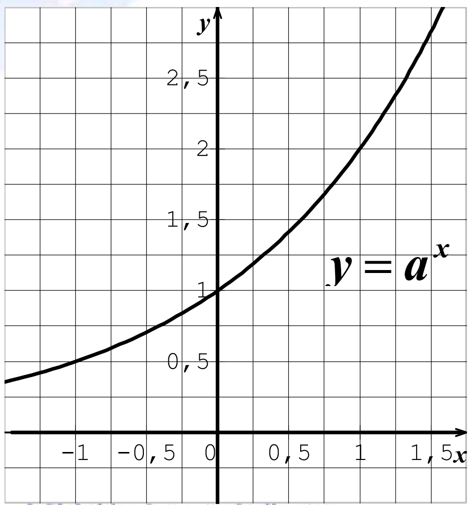
x	$-\infty$ $+\infty$
$f'\left(x\right)$	+
$f\left(x\right)$	0 ↗ $+\infty$

من أجل $0<a<1$

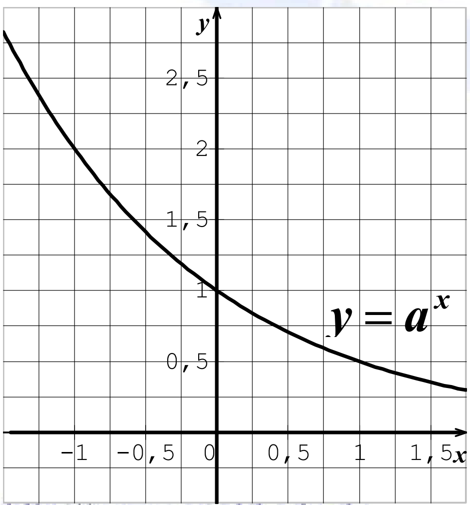
x	$-\infty$ $+\infty$
$f'\left(x\right)$	-
$f\left(x\right)$	$+\infty$ ↘ 0

التمثيل البياني :

من أجل $a>1$



من أجل $0<a<1$



الدالة الجذر $n-ieim$ ، $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

1- الجذر $n-ieim$ $\left(n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right)$ لعدد حقيقي :

- **تعريف و ترميز :**

من أجل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$ و عدد a من $\mathbb{R}_+$ فإن الجذر $n-ieim$ للعدد الحقيقي الموجب تماما و الذي يرمز بالرمز $\sqrt[n]{a}$

و المعرفة كما يلي :

إذا كان $a > 0$: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ و $\sqrt[n]{0} = 0$

- **الخواص الجبرية :**

b, a عددان حقيقيان موجبان ، b غير معدوم . p, n عددان طبيعيان غير معدومين و كل منهما يختلف عن 1 لدينا الخواص التالية :

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = n$
- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[b]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$
- $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$

2- الدراسة التحليلية للدالة :

$x \mapsto \sqrt[n]{x}$ حيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ، n ثابت و هي معرفة على $[0;+\infty[$

و يمكن تعريفها بالعبارة : $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ كما يمكن تعريفها كما يلي :

من أجل $x \neq 0$: $f(x) = e^{\frac{1}{n}lnx}$ و $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{n}lnx} = +\infty$$

من أجل $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{n}lnx}$

و لدينا $f'(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x .

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

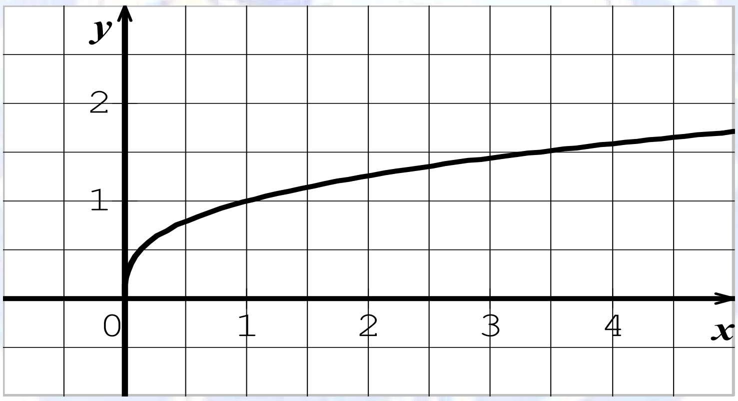
- لفروع اللانهائية : بيان الدالة يقبل فرعا لانهائيا و لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{n}}.x^{-1}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1-n}{n}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1-n}{n}lnx}=0$$

لأن $\frac{1-n}{n}<0$ و عليه بيان الدالة يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور الفواصل عند : $+\infty$

التمثيل البياني :



دوال القوى

دراسة الدوال f : $x\to x^n$ ، n عدد ثابت من $\mathbb{R}^*$

الدالة معرفة على $]0;+\infty[$ و يمكن كتابة : $x^\alpha=e^{\alpha lnx}$

- حساب النهايات :

من أجل $\alpha>0$: $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=0$ ؛ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

من أجل $\alpha<0$: $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$ ؛ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

- دراسة الاشتقاقية :

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة المعرفة

كما يلي : $f'(x)=\alpha.\frac{1}{x}e^{\alpha Lnx}$.

من أجل $\alpha>0$: $f'(x)>0$ و عليه f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

من أجل $\alpha<0$: $f'(x)<0$ و عليه f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول التغيرات :

من أجل $\alpha>0$

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$.

من أجل $\alpha<0$

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty$. ↘ 0

الفروع اللانهائية :

التمثيل البياني للدالة f يقبل فرع لانهائي من أجل $\alpha>0$ و لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha-1}=\lim_{x\to+\infty}e^{(\alpha-1)lnx}$$

نلاحظ أنه : من أجل $\alpha>1$: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

و عليه للبيان فرع مكافئ باتجاه محور التراتيب.

من أجل $\alpha<1$: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

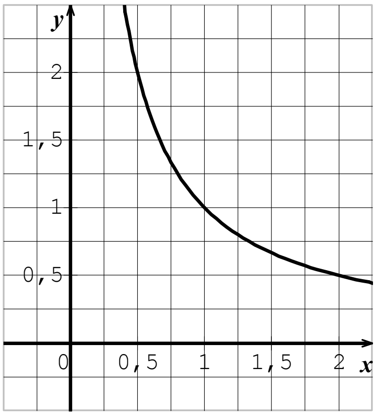
إذن بيان الدالة يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور الفواصل .

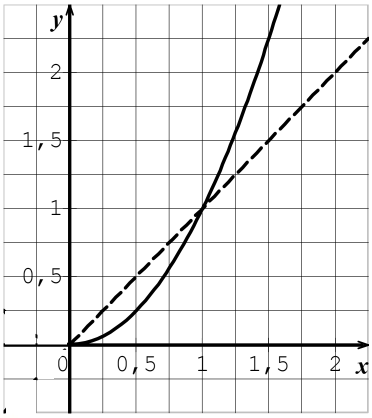
من أجل $\alpha=1$: $f(x)=x$ (بيانها هو المنصف الأول) .

أما من أجل $\alpha<0$ فإن التمثيل البياني للدالة يقبل فرعين لانهائيين

و مستقيمين مقاربين معادلتيهما : $x=0$ و $y=0$.

التمثيل البياني : $\alpha>1$ $\alpha<0$





تمـارين و مشكلات

التمرين 1

ضع العلامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة × أمام كل جملة خاطئة :

1- $\left(\frac{1}{2}\right)^x = e^{-x\ln 2}$ مع $x \in \mathbb{R}$

2- $10^x.10^{-x} = 1$ مع $x \in \mathbb{R}$

3- $\pi^\pi = e^{\pi \ln \pi}$

4- $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}.\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{5}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{15}}$

5- $\frac{(\pi)^4}{\left(\sqrt{\pi}\right)^5} = \left(\sqrt{\pi}\right)^3$

6- الدالة $x \mapsto (0,5)^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

7- الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto 10^x$ هي نفسها .

8- الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto a^x$ من أجل $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

هي الدالة : $x \mapsto \frac{1}{\ln a}.a^x$.

9- $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$

10- $\lim_{x\to+\infty} 10^{-x} = 0$

11- $\lim_{x\to-\infty} 5^{-x} = 0$

12- $\lim_{x\to+\infty} x.3^{x} = 0$

13- $\sqrt{10^x} = 10^{\frac{x}{2}}$

14- $\sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$

15- $x \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{x} = e^{\frac{lnx}{2}}$

16- $x \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ x^x = e^{\frac{lnx}{x}}$

17- الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto x^x$ على المجال $]0;+\infty[$

هي الدالة $x \mapsto (1+lnx)\times x^x$

18- $x \in \mathbb{R}_+^*, x^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{lnx}{4}}$

19- $\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{3}x} = +\infty$

20- $\lim_{x\to+\infty} x^{\sqrt{2}} = +\infty$

التمرين 2 .

حل في $\mathbb{R}$ كل من المعادلات و المتراجحات التالية :

1) $3^{2x} - 7.3^x + 12 = 0$ 2) $10^x - 10^{\frac{x}{2}} - 6 = 0$

3) $10^x < 5$ 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0,0001$ 5) $10^{4x} - 4.10^{2x} + 3 \le 0$

التمرين 3 .

عين مجموعة التعريف للدوال الآتية ثم احسب النهايات عند الأطراف :

1) $f(x) = \frac{3^x}{3^x - 1}$ 2) $f(x) = 10^{|x|}$

3) $f(x) = \frac{1}{10^x + 2}$ 4) $f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1}$

5) $f(x) = (x+4)3^x$ 6) $f(x) = x.\left(\frac{1}{2}\right)^x$

التمرين 4 .

عين مجموعة التعريف و مجموعة قابلية الاشتقاق للدوال المعرفة كما يلي ثم عين الدالة المشتقة لكل منها :

1) $f(x)=10^{x^2-2x}$　　2) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-5\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+3$

3) $f(x)=\frac{4^x}{4^x-1}$　　4) $f(x)=ln\left(2^x-1\right)$

5) $f(x)=\frac{5^{2x}-1}{5^{2x}+1}$　　6) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x(x-1)}$

التمرين 5 .

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة بالعبارة : $f(x)=\frac{10^x-1}{10^x}$.

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المزود بمعلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) عين نقط تقاطع (C) مع المحاور الإحداثية .

ب) ادرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

3 - اكتب معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4 - أنشئ المنحني (C).

التمرين 6 .

ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x)=2^x-2^{-x}$

ثم أنشئ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j}\right)$.

التمرين 7 .

ادرس حسب قيم العدد الحقيقي λ تغيرات الدالة f_λ المعرفة بالعبارة : $f_\lambda(x)=\lambda.3^x-3^{-x}$. نفرض (C_λ) تمثيلها البياني .

أنشئ (C_0) , (C_1) , (C_{-1}).

التمرين 8 .

1) f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بالعبارة : $f(x)=|x|^{x}$.

- ادرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد متجانس $\left(o\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

2) لتكن g الدالة المعرفة بالعبارة : $g(x)=|x|^{|x|}$

- بين أن الدالة g دالة زوجية .
- اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .
- استنتج تمثيلها البياني (γ) في نفس المعلم السابق .

التمرين 9 .

بين أن : $\left(5^{\frac{2}{3}}+8^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(8^{2}+5^{\frac{2}{3}}.8^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(5^{2}+5^{\frac{4}{3}}.8^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

التمرين 10 .

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بالعبارة : $f(x)=\sqrt[3]{x^{3}-x}$

على المجال $]1;+\infty[$.

ادرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ تمثيلها البياني (C) في معلم متعامد متجانس $\left(o\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ باستعمال آلة بيانية .

الحـــــــلـــــول

التمرين 1

1) √ 2) √ 3) √ 4) × 5) √

6) × 7) × 8) √ 9) × 10) √

11) × 12) × 13) √ 14) √ 15) √ 16) × 17) √

18) √ 19) √ 20) √

التمرين 2.

1) لدينا : $3^{2x}-7.3^x+12=0$ بوضع $3^x=y$ نجد : $y^2-7y+12=0$

$\Delta=1$ ، $y_1=3$ ، $y_2=4$ و منه : $3^x=3$ أو $3^x=4$

• $3^x=3^1$ تكافئ : $x=1$

• $3^x=4$ تكافئ : $ln3^x=ln4$ ومنه : $xln3=ln4$

و عليه : $x=\frac{ln4}{ln3}$ إذن مجموعة الحلول : $S=\left\{1\ ;\ \frac{ln4}{ln3}\right\}$

2) لدينا : $10^x-10^{\frac{x}{2}}-6=0$ وهي تكافئ : $\left(10^{\frac{x}{2}}\right)^2-10^{\frac{x}{2}}-6=0$

بوضع : $10^{\frac{x}{2}}=t$ نجد : $t^2-t-6=0$

$\Delta=25$ ، $t_1=-2$ ، $t_2=3$

- لما $t=-2$ فإن : $10^{\frac{x}{2}}=-2$ مرفوض لأن $10^{\frac{x}{2}}>0$

- لما : $t=3$ فإن : $10^{\frac{x}{2}}=3$ وعليه : $ln10^{\frac{x}{2}}=ln3$

ومنه : $\frac{x}{2}ln10=ln3$ و بالتالي : $x=\frac{2ln3}{ln10}$

إذن مجموعة الحلول : $S=\left\{2\frac{ln3}{ln10}\right\}$

3) لدينا : $10^x<5$ وهي تكافئ : $ln10^x<ln5$

وعليه : $xln10<ln5$ و بالتالي : $x<\frac{ln5}{ln10}$

إذن مجموعة الحلول : $S = \left]-\infty \ ; \frac{ln5}{ln10}\right[$

4) لدينا : $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0,0001$ وهي تكافئ : $ln\left(\frac{1}{2}\right)^x > ln0,0001$

وعليه : $xln\frac{1}{2} > ln10^{-4}$ إذن : $-xln2 > -4ln10$

وبالتالي : $x < \frac{4ln10}{ln2}$ إذن مجموعة الحلول : $S = \left]-\infty \ ; 4.\frac{ln10}{ln2}\right[$

5) لدينا : $10^{4x} - 4.10^{2x} + 3 \leq 0$ بوضع $10^{2x} = z$ نجد : $z^2 - 4z + 3 \leq 0$

نحال العبارة : $z^2 - 4z + 3$

$z_2 = 3 \quad ; \quad z_1 = 1 \quad ; \quad \Delta = 4$

و عليه : $z^2 - 4z + 3 = (z-1)(z-3)$

و بالتالي : $10^{4x} - 410^{2x} + 3 = (10^{2x} - 1)(10^{2x} - 3)$

لندرس إشارة كل من : $10^{2x} - 1$ و $10^{2x} - 3$

$10^{2x} - 1 = 0$ تكافئ $10^{2x} = 1$ ومنه $2x = 0$ وعليه $x = 0$

$10^{2x} - 1 > 0$ تكافئ $10^{2x} > 1$ ومنه $2x > 0$ وعليه $x > 0$

$10^{2x} - 3 = 0$ تكافئ $10^{2x} = 3$ ومنه $ln10^{2x} = ln3$ وعليه $x = 2xln10 = ln3$

و عليه : $x = \frac{ln3}{2ln10}$

$10^{2x} - 3 > 0$ تكافئ : $10^{2x} > 3$ ومنه : $ln10^{2x} > ln3$

أي أن : $2xln10 > ln3$ و بالتالي : $x > \frac{ln3}{2ln10}$

و بالتالي ندرس إشارة : $(10^{2x} - 1)(10^{2x} - 3)$

x	$-\infty$		0		$\frac{ln3}{2ln10}$		$+\infty$
$10^{2x} - 1$		-	0	+		+	
$10^{2x} - 3$		-		-	0	+	
$(10^{2x} - 1)(10^{2x} - 3)$		+	0	-	0	+	

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي : $S \left[0 \ ; \frac{ln3}{2ln10}\right[$

التمرين 3 .

1) لدينا : $f\left(x\right)=\dfrac{3^x}{3^x-1}$

- مجموعة التعريف :

الدالة f معرفة من أجل : $3^x-1\neq 0$ أي : $3^x\neq 1$ و منه : $x\neq 0$

إذن $D_f=\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$

- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{3^x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{xln3}}{e^{xln3}-1}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}f\left(x\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{3^x}{3^x-1}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f\left(x\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{3^x}{3^x-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{3^x\left(-1-\dfrac{1}{3^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{3^x}}=1$$

2) لدينا : $f\left(x\right)=10^{|x|}$

- مجموعة التعريف :

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}10^{|x|}=\lim_{x\to-\infty}e^{|x|.ln10}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}10^{|x|}=\lim_{x\to+\infty}e^{|x|.ln10}=+\infty$$

3) لدينا : $f\left(x\right)=\dfrac{1}{10^x+2}$

- مجموعة التعريف :

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان : $10^x+2\neq 0$ أي : $10^x\neq -2$

و هي محققة . إذن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{10^x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{xln10}+2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{10^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{xln10}+2}=0$$

4) لدينا : $f(x)=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x-1}$

-مجموعة التعريف :

تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان : $\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\neq 0$

أي : $\left(\frac{1}{2}\right)^x\neq 1$ وعليه : $x\neq 0$

إذن مجموعة التعريف هي : $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

- حساب النهايات :

لدينا : $\left(\frac{1}{2}\right)^x=e^{-xln2}$

و منه : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-xln2}-1}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{-xln2}-1}=-1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x-1}=+\infty$$

لأن : $\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\overset{>}{\to}0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x-1}=-\infty$$

لأن : $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 \overset{<}{\rightarrow} 0$

إشارة : $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$	+	0	-

5) لدينا : $f(x) = (x+4)3^x$

- مجموعة التعريف هي : $\mathbb{R}$

- حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+3)e^{xln3} = \lim_{x\to-\infty} x.e^{xln3} + 3e^{xln3} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+3)e^{xln3} = +\infty$$

6) لدينا : $f(x) = x\left(\frac{1}{2}\right)^x$

- مجموعة التعريف هي $\mathbb{R}$

- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} x.e^{xln\frac{1}{2}} = \lim_{x\to-\infty} x.e^{-xln2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-xln2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{ln2}\right).(-xln2)e^{-xln2} = 0$$

التمرين 4 .

1) لدينا : $f(x) = 10^{x^2-2x}$

- مجموعة التعريف :

- الدالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركب الدالتين $x \mapsto x^2 - 2x$

و $x \mapsto 10^x$ القابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و يمكن كتابة : $f(x) = e^{(x^2-2x)ln10}$

وعليه : $f'(x) = (2x-2)ln10.e^{(x^2-2x)ln10}$

$$f'(x)=2(x-1)(ln10).10^{x^2-2x}$$

2) لدينا : $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-5\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+3$

- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

- الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع و مركب دوال تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ويمكن كتابة : $f(x)=e^{-xln2}-5e^{-2xln2}+3$

وعليه : $f'(x)=(-2ln2)e^{-2xln2}-(-ln2)e^{-xln2}$

إذن : $f'(x)=(-2ln2).\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+(ln2)\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

3) لدينا : $f(x)=\frac{4^x}{4^x-1}$

- الدالة f معرفة من أجل $4^x-1\neq 0$ أي $4^x\neq 1$ و عليه $x\neq 0$

إذن $D_f=]-\infty\ ;0[\cup]0\ ;+\infty[$

- الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f لأنها حاصل قسمة دوال تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$. و يمكن أن نكتب : $f(x)=\frac{e^{xln4}}{e^{xln4}-1}$

$$f'(x)=\frac{(ln4).e^{xLn4}\left(e^{xln4}-1\right)-(ln4).e^{xln4}.e^{xln4}}{\left(e^{xln4}-1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(ln4).e^{xln4}\left(e^{xln4}-1-e^{xln4}\right)}{\left(e^{xln4}-1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-(ln4).e^{xln4}}{\left(e^{xln4}-1\right)^2}\qquad f'(x)=\frac{-(ln4).4^x}{\left(4^x-1\right)^2}$$

4) لدينا : $f(x)=ln\left(2^x-1\right)$

مجموعة التعريف :

الدالة f معرفة من أجل $2^x-1>0$ و عليه $2^x>1$ أو $x>0$

ومنه : $D_f =]0 ; +\infty[$

الاشتقاق :

الدالة f هي مركب دوال قابلة للاشتقاق على D_f و عليه فهي تقبل الاشتقاق على D_f ، و يمكن كتابة : $f(x) = ln\left(e^{xln2} - 1\right)$

ومنه : $f'(x) = \dfrac{(ln2).e^{xln2}}{e^{xln2} - 1}$ إذن : $f'(x) = \dfrac{(ln2).2^x}{2^x - 1}$

5) لدينا : $f(x) = \dfrac{5^{2x} - 1}{5^{2x} + 1}$

مجموعة التعريف :

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ لأن $5^{2x} + 1 \neq 0$ وعليه : $D_f =]-\infty;+\infty[$

الاشتقاق :

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها حاصل قسمة دوال تقبل الاشتقاق و يمكن كتابة : $f(x) = \dfrac{e^{2xln5} - 1}{e^{2x\ln 5} + 1}$

وعليه : $$f'(x) = \frac{(2ln5).e^{2xln5}\left[e^{2xln5} + 1\right] - (2ln5)e^{2xln5}\left[e^{2xln5} - 1\right]}{\left(e^{2xln5} + 1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2ln5).e^{2xln5}\left[e^{2xln5} + 1 - e^{2xln5} + 1\right]}{\left(e^{2xln5} + 1\right)^2}$$

$f'(x) = \dfrac{4(ln5).e^{2xln5}}{\left(e^{2xln5} + 1\right)^2}$ و بالتالي : $f'(x) = \dfrac{(4ln5)5^{2x}}{\left(5^{2x} + 1\right)^2}$

6) لدينا : $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x(x-1)}$

مجموعة التعريف :

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $D_f =]-\infty;+\infty[$

الاشتقاق :

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركب دالتين تقبلان الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و يمكن كتابة :

$f(x) = e^{-x(x-1)ln3}$

و عليه : $f'(x)=(-2x+1)(ln3)e^{-x(x-1)ln3}$

إذن : $f'(x)=(-2x+1)(ln3).\left(\frac{1}{3}\right)^{x(x+1)}$

التمرين 5 .

-1 دراسة تغيرات f : $D_f=]-\infty;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{xln10}-1}{e^{xln10}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{10^x-1}{10^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10^x\left(1-\frac{1}{10^x}\right)}{10^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1-\frac{1}{10^x}=1$$

$$f(x)=\frac{e^{xln10}-1}{e^{xln10}}$$

$$f'(x)=\frac{(ln10)e^{xln10}.e^{xln10}-(ln10)e^{xln10}.\left(e^{xln10}-1\right)}{\left(e^{xln10}\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(ln10)10^x.10^x-(ln10)10^x.\left(10^x-1\right)}{\left(10^x\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(ln10)10^x.\left[10^x-10^x+1\right]}{10^x.10^x}=\frac{ln10}{10^x}$$

و عليه $f'(x)>0$ و منه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f''(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ 1

2) a - تعيين نقط التقاطع :

- مع محور الفواصل : $f(x)=0$ ومنه : $10^x-1=0$

وعليه : $10^x=1$ ومنه : $x=0$ إذن : $(C)\cap(y'y)=\{0\}$

b - دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

هنالك فرعين لانهائيين و مستقيم مقارب معادلته $y=1$ عند $+\infty$

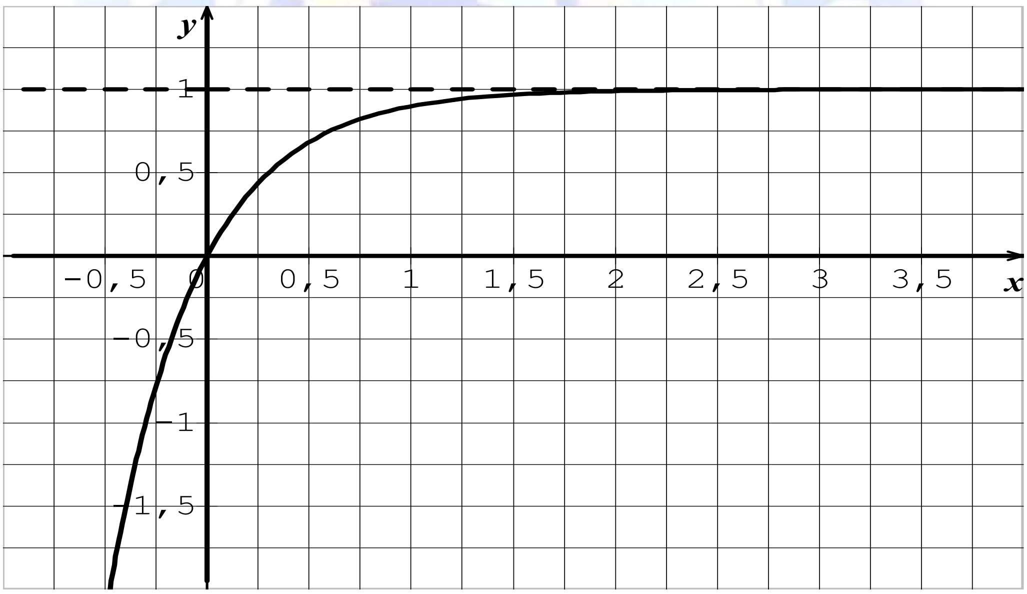
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{10^x-1}{x10^x}=-\infty$$

و منه يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب عند $-\infty$

3- معادلة المماس : $y=f'(0).(x-0)+f(0)$

$f(0)=0$; $f'(0)=ln10$ ومنه : $y=xln10$

4- إنشاء (C)



التمرين 6 .

دراسة تغيرات f : $D_f =]-\infty;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2^x - 2^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2^x - 2^{-x} = -\infty$$

$$f(x) = e^{xln2} - e^{-xln2}$$

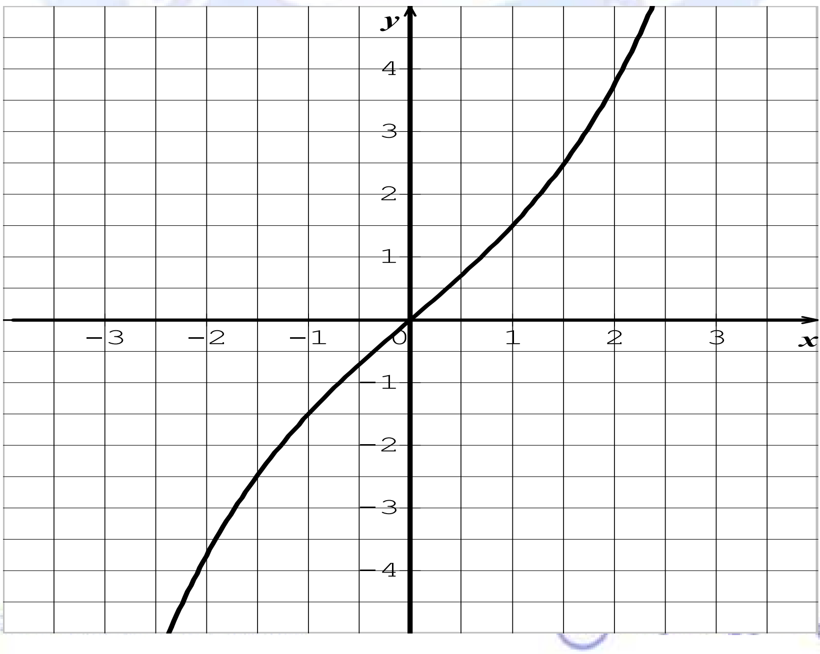
$$f'(x) = ln2.e^{xln2} + (ln2)e^{-xln2} = 2^x ln2 + 2^{-x} ln2$$

$$f'(x) = \left(2^x + 2^{-x}\right) ln2$$

و منه : $f'(x) > 0$ و عليه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

إنشاء التمثيل البياني :



التمرين 7 .

دراسة تغيرات f_λ حسب قيم λ : $D_f =]-\infty;+\infty[$

من أجل $\lambda = 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3^{-x}\right) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-3^{-x}\right) = 0$$

$$f_0'(x) = (ln3)\times 3^{-x}$$

و منه $f_0'(x)$ و عليه f_0 متزايدة تماما

x	$-\infty$ $+\infty$
$f_0'(x)$	+
$f_0(x)$	$-\infty$ ↗ 0

- من أجل $\lambda > 0$: $f_\lambda(x) = \lambda.3^x - 3^{-x} = \lambda.e^{xln3} - e^{-xln3}$

$$\lim_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to-\infty} \lambda.e^{xln3} - e^{-xln3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} \lambda.e^{xln3} - e^{-xln3} = +\infty$$

$$f_\lambda'(x) = \lambda(ln3)e^{xln3} + (Ln3)e^{-xln3}$$

$$= \lambda(ln3).3^x + (ln3)3^{-x}$$

$$= (Ln3)\left[\lambda.3^x + 3^{-x}\right]$$

و منه : $f'(x) > 0$ و عليه: f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x .	$-\infty$ $+\infty$.
$f_\lambda'(x)$	+
$f_\lambda(x)$	-∞ ↗ $+\infty$

- من أجل $\lambda < 0$: $D_f =]-\infty;+\infty[$ ، $f_\lambda(x) = \lambda e^{xln3} - e^{-xln3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = -\infty$

$$f'_\lambda(x)=\lambda(ln3).e^{xln3}+(ln3)e^{-xln3}=(ln3)\left[\lambda e^{xln3}+e^{-xln3}\right]$$

و منه : $f'_\lambda(x)=(ln3)\left[\lambda 3^x+3^{-x}\right]$

$f'(x)=0$ تكافئ : $\lambda.3^x+3^{-x}=0$ ومنه : $\lambda.3^x=-3^{-x}$

أي : $\frac{3^x}{3^{-x}}=\frac{-1}{\lambda}$ إذن : $3^{2x}=\frac{-1}{\lambda}$ وعليه : $ln\,3^{2x}=ln\left(\frac{-1}{\lambda}\right)$

أي : $x=\frac{-ln\left(-\frac{1}{\lambda}\right)}{2\,ln\,3}$ و بالتالي :

$f'(x)>0$ تكافئ : $\lambda.3^x+3^{-x}>0$ و منه: $\lambda.3^x>-3^{-x}$

و عليه : $\frac{\lambda 3^x}{3^{-x}}>-1$ و بالتالي : $\lambda.3^{2x}>1$ و منه $3^{2x}<\frac{-1}{\lambda}$

إذن : $ln\,3^{2x}<ln\left(\frac{-1}{\lambda}\right)$ و عليه : $2\,x\,ln\,3<ln\left(\frac{-1}{\lambda}\right)$

إذن : $2\,x\,ln\,3<-ln\left(-\frac{1}{\lambda}\right)$ و عليه : $x<\frac{-ln\left(-\frac{1}{\lambda}\right)}{2\,ln\,3}$

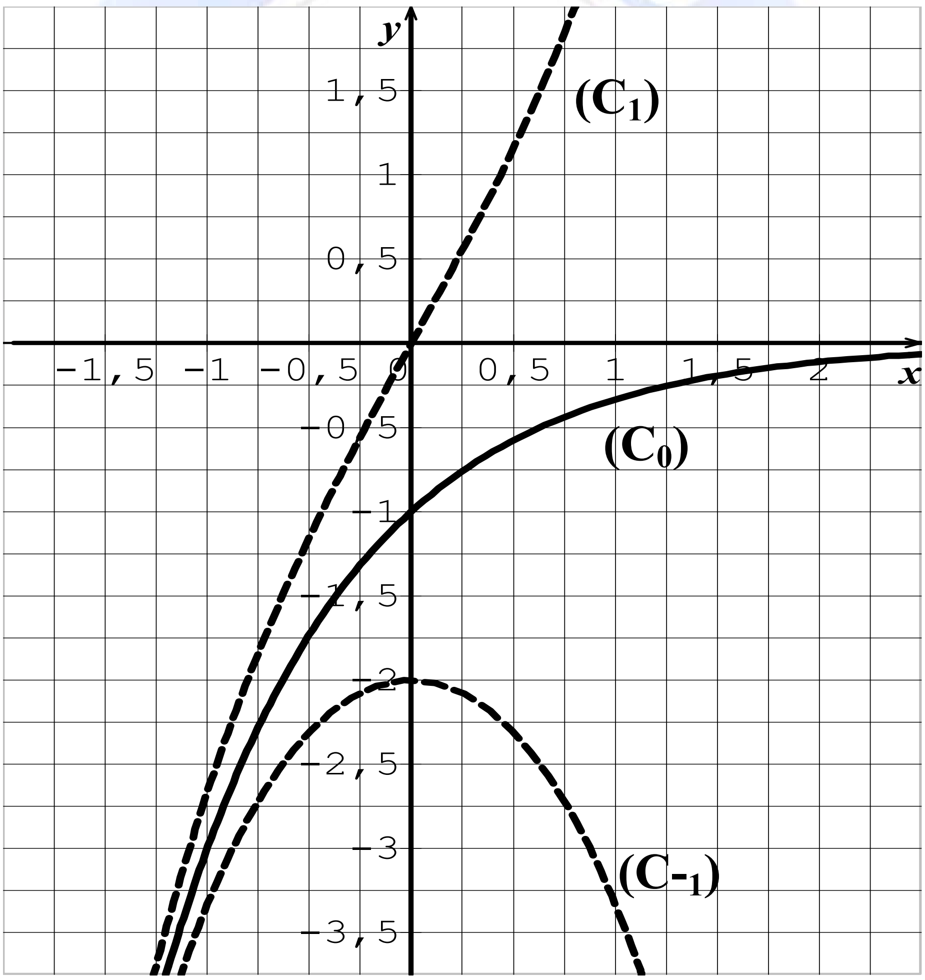
إذن f متزايدة تماما على $\left]-\infty\ ;\ \frac{-ln\left(-\frac{1}{\lambda}\right)}{2\,ln\,3}\right]$

وعليه فهي متناقصة تماما على : $\left[\frac{-ln\left(-\frac{1}{\lambda}\right)}{2\,ln\,3};+\infty\right[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$\frac{-\ln\left(-\frac{1}{\lambda}\right)}{2\ln 3}$	$+\infty$
$f_\lambda'(x)$	+	0	-
$f_\lambda(x)$	$+\infty$ ↗	$f\left(\frac{-\ln\left(-\frac{1}{\lambda}\right)}{2\ln 3}\right)$	↘ $-\infty$

إنشاء (C_0) و (C_1) و (C_{-1}) :



التمرين 8.

دراسة تغيرات f : لدينا $f(x)=e^{x\ln|x|}$

$$D_f=]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{x\ln|x|}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} e^{x\ln|x|}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} e^{-(-x)\ln(-x)}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{x\ln x}=1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x}=+\infty$$

$f'(x)=\left(1.\ln|x|+x.\frac{1}{x}\right)e^{x\ln|x|}$ ومنه $f'(x)=(\ln|x|+1)e^{x\ln|x|}$

$f'(x)=0$ تكافئ $\ln|x|+1=0$ وعليه $\ln|x|=-1$ ومنه $|x|=\frac{1}{e}$

أي أن $x=-\frac{1}{e}$ أو $x=\frac{1}{e}$

$f'(x)>0$ تكافئ : $\ln|x|+1>0$ وعليه $\ln|x|>-1$ ومنه $|x|>\frac{1}{e}$

إذن $x\in\left]-\infty;\frac{-1}{e}\right[\cup\left]\frac{-1}{e};+\infty\right[$ و بالتالي f متزايدة تماما .

و منه f متناقصة تماما على كل من المجالين $\left[\frac{-1}{e};0\right[$; $\left]0\,;\frac{1}{e}\right]$

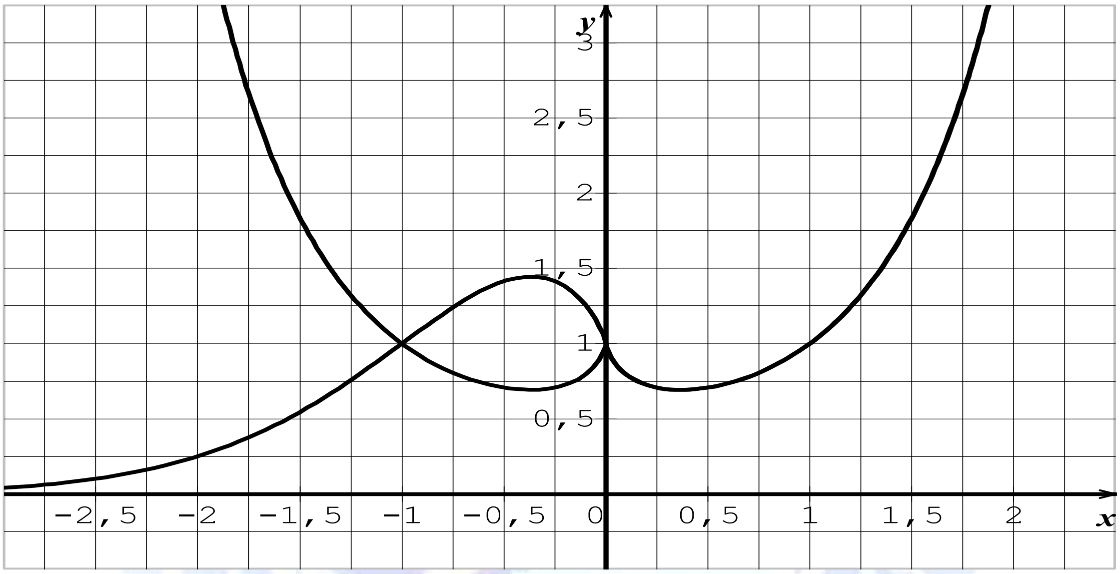
x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	‖ -	+	
$f(x)$	0 ↗	$f\left(\frac{-1}{e}\right)$ ↘	1 ‖ 1 ↘	$f\left(\frac{1}{e}\right)$ ↗	$+\infty$

هنالك 4 فروع لانهائية :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln|x|}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln x}}{x\ln x}x\ln x=+\infty$$

إذن يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب عند $+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}}=e^{\frac{-1}{e}}\simeq 0,7 \qquad f\left(-\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}}=e^{\frac{1}{e}}\simeq 1,5$$



2- إثبات أن g زوجية: $D_g=]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D_g ، $-x\in D_g$ و

$g(-x)=|-x|^{|-x|}$ و منه : $g(-x)=g(x)$ إذن g زوجية .

كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة
$$\begin{cases} g(x)=x^{x} & x>0 \\ g(x)=(-x)^{(-x)} & x<0 \end{cases}$$

- استنتاج (γ):

من أجل $x>0$: $g(x)=f(x)$

و منه (γ)ينطبق على (C) في المجال $]0;+\infty[$

في المجال $]-\infty;0[$: (γ) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأن g دالة زوجية.

التمرين 9 .

نلاحظ أن : $8^2 = 8^{\frac{4}{3}}.8^{\frac{2}{3}}$; $5^2 = 5^{\frac{2}{3}}.5^{\frac{2}{3}}$

و عليه :

$$\left(5^2 + 5^{\frac{4}{3}}.8^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[5^{\frac{4}{3}}.5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{4}{3}}.8^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[5^{\frac{4}{3}}\left(5^{\frac{2}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{3}}\left(5^{\frac{2}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

و

$$\left(8^2 + 5^{\frac{2}{3}}.8^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[8^{\frac{4}{3}}.8^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}.8^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[8^{\frac{4}{3}}.\left(8^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{2}{3}}\left(5^{\frac{2}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

و عليه :

$$\left(5^2 + 5^{\frac{4}{3}}.8^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(8^2 + 5^{\frac{2}{3}}.8^{\frac{4}{3}}\right) = \left(5^{\frac{2}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(5^{\frac{2}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}\right) = \left(5^{\frac{2}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

التمرين 10 .

يمكن أن نكتب الدالة f كما يلي :

* من أجل $x > 1$: $f(x) = e^{\frac{1}{3}\ln\left(x^3 - x\right)}$

* من أجل $x = 1$: $f(x) = 0$

دراسة التغيرات على $[1;+\infty[$:

1) حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} e^{\frac{1}{3}ln\left(x^3-x\right)} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{3}ln\left(x^3-x\right)} = +\infty$$

2) دراسة الاشتقاق :

الدالة f هي مركب دوال كثيرات حدود و لوغاريتمية وآسية فهي إذن تقبل الاشتقاق على

$]1;+\infty[$

حيث : $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{3}\left(3x^2-1\right)}{x^3-x}\times e^{\frac{1}{3}ln\left(x^3-x\right)}$

$f'(x)=0$ تكافئ : $3x^2-1=0$ و منه : $x^2=\dfrac{1}{3}$ و عليه : $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

أو : $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ في المجال $]1;+\infty[$: $x^3-x>0$ و $3x^2-1>0$

كما يظهر في الجدول الآتي :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
x		-		-		-	0	+		+		+	
x^2-1		+	0	-		-		-		-	0	+	
$x\left(x^2-1\right)$		-	0	+		+	0	-		-		+	
$3x^2-1$		+		+	0	-		-	0	+		+	

و عليه $f'(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$ و عليه الدالة f متزايدة

تماما على المجال $]1;+\infty[$

3) دراسة الاشتقاق عند 1 على اليمين : $f(1)=0$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{3}}}{x-1}=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\frac{x^3-x}{(x-1)^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left[\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)^2} \right]^{\frac{1}{3}} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left[\frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \right]^{\frac{1}{3}} = +\infty$$

إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 1 من اليمين .

4 – جدول التغيرات :

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

5 - دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

البيان (C) يقبل فرعا لانهائيا وحيدا .

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^3 - x)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{(x^3 - x)^{\frac{1}{3}}}{(x^3)^{\frac{1}{3}}} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 - x}{x^3} \right)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - x \right] = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - x)^{\frac{1}{3}} - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[(x^3 - x)^{\frac{1}{3}} - x \right] \left[(x^3 - x)^{\frac{2}{3}} + x(x^3 - x)^{\frac{1}{3}} + x^2 \right]}{(x^3 - x)^{\frac{2}{3}} + x(x^3 - x)^{\frac{1}{3}} + x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[(x^3 - x)^{\frac{1}{3}} \right]^3 - x^3}{(x^3 - x)^{\frac{2}{3}} + x(x^3 - x)^{\frac{1}{3}} + x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x - x^3}{(x^3 - x)^{\frac{2}{3}} + x(x^3 - x)^{\frac{1}{3}} + x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\left[x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right]^{\frac{2}{3}} + x\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{3}} + x^2}$$

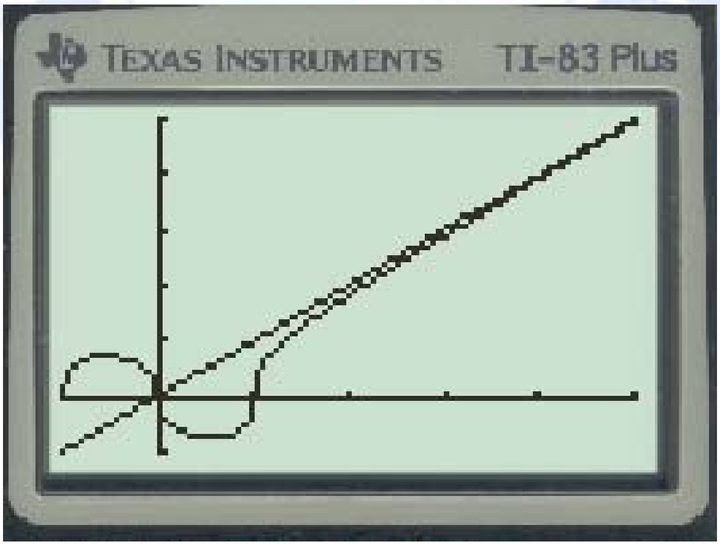
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} + x\left(x^3-x\right)^{\frac{1}{3}} + x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x\left[x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(x^3-x\right)^{\frac{1}{3}} + x\right]}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(x^3-x\right)^{\frac{1}{3}} + x} = 0$$

وعليه $y = x$ معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$

التمثيل البياني بآلة بيانية :



ملاحظة : الدراسة تمت على المجال $]1\ ;\ +\infty[$ لكن التمثيل في الآلة

تم على المجال $]-1\ ;\ +\infty[$.