6 - الأعداد المركبة

الكفاءة المستهدفة

1- إجراء العمليات الحسابية على الأعداد المركبة.

2 - استعمال خواص مرافق عدد مركب .

3- حساب الطويلة وعمدة لعدد مركب

4- الانتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي والعكس.

5- التعبير عن خواص الأشكال الهندسية باستعمال الأعداد المركبة.

6- توظيف خواص الطويلة وعمدة لحل المسائل في الأعداد المركبة في الهندسة.

7- توظيف دستور موافر لحل مسائل في الأعداد المركبة في الهندسة .

8- حل معادلة من الدرجة الثانية .

9 – حل معادلات يؤول حلها إلى معادلة من الدرجة الثانية

10- تعيين الكتابة المركبة للتحويلات المألوفة .

11- التعرف على تحويل انطلاقا من كتابته المركبة .

12- توظيف الأعداد المركبة في التحويلات .

تصميم الدرس

أنشطة **1 – تعريف مجموعة الأعداد المركبة**

2- الشكل الجبري لعدد مركب **3- تعاريف و مصطلحات**

4- الحساب في C **5- مرافق عدد مركب**

6- طويلة و عمدة عدد مركب **7- الشكل الأسي لعدد مركب (ترميز أولير)**

8 – المعادلات من الدرجة الثانية في C **تكنولوجيا الإعلام و الاتصال**

تمـارين و مشكلات **الحـلـــــــول**

أنشطة

النشاط :

نعتبر مجموعة E عناصرها من الشكل $x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و i عدد حيث $i^2 = -1$ ليكن العددان Z , Z' حيث :

$$Z = 5 + 2i \quad و \quad Z' = 3 - i$$

1- إذا علمت أن عمليتي الجمع و الضرب في E لها نفس خواص عمليتي الجمع والضرب في $\mathbb{R}$ ، احسب كل من :

$$Z \times Z' \;;\; Z^2; 2Z - 3Z' \;;\; 8Z \;;\; Z + Z' \;;\; (Z - Z')^2 \;;\; (2Z + Z')^2$$

2) بكتابة $\frac{1}{Z}$ على الشكل : $\frac{1}{Z} = \frac{5 - 2i}{(5 + 2i)(5 - 2i)}$

عين عددان حقيقيان α و β بحيث : $\frac{1}{Z} = \alpha + i\beta$

وبنفس الطريقة عين عددان حقيقيان a و b بحيث: $\frac{1}{Z'} = a + ib$.

3) احسب $(i)^{2008}$ ثم i^n بدلالة n .

4) استنتج طريقة لحساب $(1 + i)^{2008}$.

الحل :

1) الحساب :

- $Z + Z' = (5 + 2i) + (3 - i) = (5 + 3) + (2 - 1)\, i = 8 + i$
- $8Z = 8\,(5 + 2i) = 40 + 16i$
- $2Z - 3Z' = 2\,(5 + 2i) - 3\,(3 - i) = 10 + 4i - 9 + 3i = 1 + 7i$
- $Z^2 = (5 + 2i)^2 = (5)^2 + 2 \times 5 \times 2i + (2i)^2 = 21 + 20i$
- $Z \,.\, Z' = (5 + 2i)(3 - i) = 15 - 5i + 6i - 2i^2 = 17 + i$
- $(2Z + Z')^2 = \left[2\,(5 + 2i) + 3 - i\right]^2 = (10 + 4i + 3 - i)^2$

$$= (13 + 3i)^2 = (13)^2 + 2 \times 13 \times 3i + (3i)^2$$

$$= 169 + 78i - 9 = 160 + 78i$$

- $(Z - Z')^2 = (5 + 2i - 3 + i)^2 = (2 + 3i)^2$

$$= (2)^2 + 2.2.3i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$$

(2 $$\frac{1}{Z} = \frac{5 - 2i}{(5 + 2i)(5 - 2i)} = \frac{5 - 2i}{(5)^2 - (2i)^2}$$

و منه : $\frac{1}{Z} = \frac{5 - 2i}{25 + 4} = \frac{5}{29} - \frac{2}{29} i$

إذن : $\alpha = \frac{5}{29}$ و $\beta = \frac{-2}{29}$

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{3 - i} = \frac{3 + i}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + i}{(3)^2 - (i)^2} = \frac{3 + i}{9 + 1} = \frac{3 + i}{10}$$

و منه : $\frac{1}{Z'} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} i$ إذن : $a = \frac{3}{10}$ و $b = \frac{1}{10}$.

(3 - حساب $(i)^{2008}$:

$$(i)^{2008} = (i^2)^{1004} = (-1)^{1004} = 1$$

- حساب i^n : $(i)^n = \left[(i)^2\right]^{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}}$

(4 استنتاج طريقة لحساب $(1 + i)^{2008}$

$$(1 + i)^{2008} = \left[(1 + i)^2\right]^{1004} = (1 + 2i + i^2)^{1004} = (1 + 2i - 1)^{1004}$$

$$= (2i)^{1004} = 2^{1004} . (i^2)^{502} = 2^{1004}.(-1)^{502} = 2^{1004}$$

1 – تعريف مجموعة الأعداد المركبة :

المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$

- كل نقطة M من المستوي تمثل عدد مركب وعدد مركب وحيد.
وكل عدد مركب يمثل بنقطة و بنقطة وحيدة في المستوي.
- النقطة $J(o ; 1)$ تمثل العدد المركب الذي نرمز له بالرمز i .
- من أجل كل عددان حقيقيان x و y ، يرمز للعدد المركب الممثل بالنقطة $M\left(x ; y\right)$ بالرمز $x + iy$.
- يرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

2- الشكل الجبري لعدد مركب :

من أجل كل عددان حقيقيان x و y : الشكل $x + iy$ يسمى الشكل الجبري لعدد مركب Z .

3- تعار يف و مصطلحات :

ليكن $Z = x + iy$ عدد مركب ، x و y عددان حقيقيان
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء أو القسم الحقيقي للعدد المركب Z و نرمز له بالرمز $\text{Re}\left(Z\right)$ أي : $\text{Re}\left(Z\right) = x$
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء أو القسم التخيلي للعدد المركب Z ويرمز له بالرمز $\text{Im}\left(Z\right)$ أي : $\text{Im}\left(Z\right) = y$.
- النقطة $M\left(x ; y\right)$ تسمى صورة العدد المركب Z و العدد Z يسمى لاحقة النقطة $M\left(x ; y\right)$

- من أجل كل عدد حقيقي x , y , x' , y′ فإن العدد $x + iy$ يساوي العدد $x' + iy'$ إذا وفقط إذا كان : $x = x'$ و $y = y'$.

- كل عدد حقيقي هو عدد مركب و لدينا :

$Z \in \mathbb{R}$ يكافئ: $\text{Im}(Z) = 0$.

- يكون العدد المركب Z تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان: $\text{Re}(Z) = 0$

- محور الفواصل يدعى المحور الحقيقي و محور التراتيب يدعى المحور التخيلي .

- إذا كان $Z = 0$ فإن Z حقيقي و تخيلي صرف في آن واحد و يمثل بالنقطة $O\ (0\ ;\ 0)$.

4- الحساب في C:

- المجموع و الجداء في $\mathbb{C}$:

المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتين هما الجمع + و الضرب × معرفتان من أجل كل عددان مركبان Z و Z' حيث:

$Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$ كما يلي :

$$Z + Z' = (x + x') + i\ (y + y')$$

$$Z \times Z' = (xx' - yy') + i\ (xy' + x'y)$$

هاتين العمليتين لهما نفس خواص الجمع + و الضرب × في $\mathbb{R}$

- قوى عدد مركب :

القوى الصحيحة لعدد مركب لها نفس خواص القوى الصحيحة لعدد حقيقي ولدينا :

$$i^2 = (0 + 1\ .\ i) \times (0 + 1\ .\ i)$$

$$= (0 - 1) + i\ (0\ .\ 1 + 0\ .\ 1) = -1$$

وعليه : $i^2 = -1$

أمثلة :

نعتبر العددان المركبان: $Z_1 = 3 + 2i$; $Z_2 = -4 + 5i$.

1) احسب كل من $Z_1 + Z_2$, $Z_1 \times Z_2$.

2) احسب Z_1^2 ; Z_2^3.

الحل :

1) • $Z_1 + Z_2 = (3 - 4) + i\,(2 + 5)$

ومنه : $Z_1 + Z_2 = -1 + 7i$

• $Z_1 \times Z_2 = (3 + 2i)\,(-4 + 5i)$

$= -12 + 15i - 8i + 10i^2 = -12 + 7i - 10$

و منه : $Z_1 \times Z_2 = -22 + 7i$

2) $Z_1^2 = (3 + 2i)^2 = (3)^2 + 2(3) \times 2i + (2i)^2$

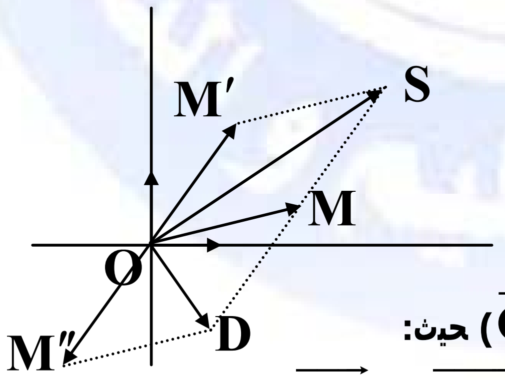
و منه : $Z_1^2 = 9 + 12i - 4$ أي: $Z_1^2 = 5 + 12i$

$Z_2^3 = (-4 + 5i)^3 = (-4)^3 + 3(-4)^2 \times 5i + 3(-4)\,(5i)^2 + (5i)^3$

$= -64 + 240i + 300 - 125i = 236 + 115i$

خواص :

إذا كان Z و Z' لاحقتي النقطتين M و M' (أو الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$) على الترتيب فإن :



• $Z + Z'$ هو لاحقة النقطة S (أو الشعاع $\overrightarrow{OS}$) حيث:

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$

• $Z - Z'$ هو لاحقة النقطة D (أو الشعاع $\overrightarrow{OD}$) حيث:

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM''}$

وعليه إذا كانت A و B نقطتان لاحقتاهما Z_A و Z_B علي الترتيب فإن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو العدد المركب $Z_{\overrightarrow{AB}}$

حيث : $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$

ولاحقة النقطة I منتصف $[AB]$ هو Z_I حيث $Z_I = \dfrac{Z_A + Z_B}{2}$

- مقلوب عدد مركب :

Z عدد مركب غير معدوم . حيث $Z = x + iy$.

لدينا :
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{(x - iy)}{(x+iy)\,(x-iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

و منه :
$$\frac{1}{Z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

وهو الشكل الجبري لمقلوب العدد المركب Z غير المعدوم.

أي x وy غير معدومين معا.

- حاصل قسمة عددين مركبين :

Z و Z' عددان مركبان حيث: $Z' \neq 0$

مع $Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$

$$\frac{Z}{Z'} = Z \times \frac{1}{Z'} = (x + iy) \times \left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2} - i\,\frac{y'}{x'^2+y'^2}\right)$$

$$= \frac{xx'}{x'^2+y'^2} - i\,\frac{xy'}{x'^2+y'^2} + i\,\frac{x'y}{x'^2+y'^2} + \frac{yy'}{x'^2+y'^2}$$

$$= \frac{xx' + yy'}{x'^2+y'^2} + i\,\frac{x'y - xy'}{x'^2+y'^2}$$

وهو الشكل الجبري للعدد المركب $\dfrac{Z}{Z'}$ أي حاصل قسمة العدد المركب Z على العدد المركب غير المعدوم Z' .

5- مرافق عدد مركب :

تعريف :

لكل نقطة M من المستوى ذات اللاحقة $Z = x + iy$ حيث x وy عددان حقيقيان نظيرة بالنسبة لمحور الفواصل هي النقطة M' ذات اللاحقة $x - i y$. العدد المركب $x - iy$ يسمى مرافق العدد المركب $x + i y$ ونرمز له بالرمز $\overline{Z}$ أي : $\overline{Z} = x - i y$

أمثلة :

مرافق العدد المركب: $Z_1 = 1 + i$ هو العدد المركب: $\overline{Z}_1 = 1 - i$

مرافق العدد المركب: $Z_2 = i$ هو العدد المركب: $\overline{Z}_2 = -i$

مرافق العدد المركب: $Z_3 = 8 + 3 i$ هو العدد المركب:

$$\overline{Z}_3 = 8 - 3 i$$

مرافق العدد المركب: $Z_4 = 10$ هو العدد المركب: $\overline{Z}_4 = 10$

أي أن : $\overline{Z}_4 = Z_4$

خواص :

a) x و y عددان حقيقيان . $Z = x + iy$ عدد مركب .

$\overline{Z} = x - iy$ مرافق العدد المركب Z .

1) لدينا : $Z = x + iy$ ومنه : $\overline{\overline{Z}} = x + iy$

وعليه : $\overline{\overline{Z}} = Z$

2) لدينا : $Z + \overline{Z} = 2 x$ ومنه : $Z + \overline{Z} = 2 \operatorname{Re}(Z)$

3) $Z - \overline{Z} = 2 i y$ ومنه : $Z - \overline{Z} = 2 \operatorname{Im}(Z)$

4) $Z . \overline{Z} = x^2 + y^2$

5) $Z \in \mathbb{R}$ تكافئ $Z = \overline{Z}$

6) Z تخيلي صرف يكافئ : $Z = -\overline{Z}$

b) x , x' , y , y' أعداد حقيقية . Z_1 , Z_2 عددان مركبان حيث :

$$Z_1 = x + iy \quad ؛ \quad Z_2 = x' + iy'$$

1) $$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{\left(x + x' + i\left(y + y'\right)\right)}$$

$$= x + x' - i\left(y + y'\right) = x - iy + x' - iy'$$

ومنه : $$\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$

2) $$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{\left[\left(xx' - yy'\right) + i\left(xy' + x'y\right)\right]}$$

$$= \left(xx' - yy'\right) - i\left(xy' + x'y\right)$$

$$\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 = \left(x - iy\right).\left(x' - iy\right)$$

$$= \left(xx' - yy'\right) - i\left(xy' + x'y\right)$$

وعليه : $$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$$

3) $$\overline{\left(\frac{1}{Z_1}\right)} = \overline{\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}\right)}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{1}{\bar{Z}_1} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

وعليه : $$\overline{\left(\frac{1}{Z_1}\right)} = \frac{1}{\bar{Z}_1}$$

4) $$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$$

5) من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $$\overline{Z_1^n} = \left(\overline{Z_1}\right)^n$$

وإذا كان: $Z_1 \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$: $$\overline{Z_1^n} = \left(\overline{Z_1}\right)^n$$

أمثلة :

$$1)\ \overline{(1+2i)(3-i)} = \overline{(1+2i)}\ \overline{(3-i)}$$
$$= (1-2i)(3+i)$$

$$2)\ \overline{\left(\frac{1}{3+i}\right)} = \frac{1}{\overline{3+i}} = \frac{1}{3-i}$$

$$3)\ \overline{\left(\frac{2+3i}{5+i}\right)} = \frac{\overline{(2+3i)}}{\overline{(5+i)}} = \frac{2-3i}{5-i}$$

$$4)\ \overline{\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)} = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{1-\bar{a}\,.\,\bar{b}}$$

حيث: a و b عددان مركبان مع $ab \neq 1$.

تطبيق :

M نقطة من المستوى لاحقتها $Z = x + iy$ ، M' نقطة من المستوى لاحقتها

$$Z' = \frac{Z+1}{Z-1}$$

1) اكتب Z' على الشكل الجبري.

2) عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' حقيقي .

3) عين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيلي صرف .

الحل :

1) كتابة Z' على الشكل الجبري :

$$Z' = \frac{x+iy+1}{x+iy-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{(x+iy+1)(x-1-iy)}{(x+iy-1)(x-1-iy)}$$

$$Z' = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\,\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$$

2) تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' حقيقي :

Z' حقيقي يكافئ : $\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}=0$

ويكافئ : $\begin{cases} y=0 \\ (x\,;y)\neq(1\,,0) \end{cases}$.

ومنه مجموعة النقط M هي محور الفواصل باستثناء النقطة A (1 ; 0) .

3) تعيين مجموعة النقط M بحيث يكون Z' تخيلي صرف :

Z' تخيلي صرف يكافئ : $\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}=0$

ويكافئ : $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x\,;y)\neq(1\,,0) \end{cases}$ ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها O ونصف قطرها 1 باستثناء النقطة A (1 ; 0) .

6- طويلة و عمدة عدد مركب :

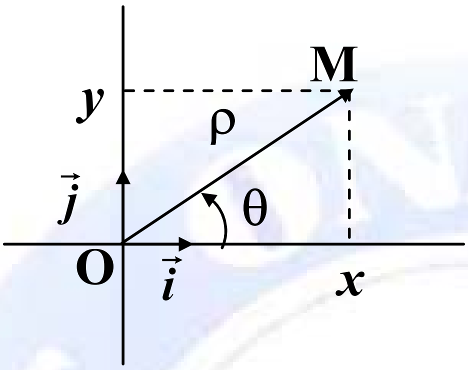
المستوى منسوب في ما يلي إلى معلم متعامد و متجانس و مباشر $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$. M نقطة من المستوي إحداثياها القطبيان $[\rho\,;\theta]$ حيث ρ عدد حقيقي موجب و θ عدد حقيقي و عليه Z لاحقة النقطة M يكتب على الشكل : $\rho\,(cos\theta+i\;\sin\theta)$

- $\rho\,(cos\theta+i\;\sin\theta)$ يسمى الشكل المثلثي للعدد Z
- نصف القطر القطبي OM يحقق $OM=\rho$ ويسمى طويلة Z ونرمز له بالرمز $|Z|$.
- الزاوية القطبية $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ تحقق $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\theta+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

و تسمى عمدة العدد المركب Z . و نرمز لها بالرمز arg (Z) ونكتب : $arg(Z)=\theta\;[2\pi]$ و تقرأ θ بترديد 2π

البرهان :

لتكن M نقطة من المستوى إحداثياها القطبيان $[\rho\ ;\ \theta]$ فيكون إحداثياها $(x\ ;\ y)$ معرفان كما يلي :



$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

وعليه إذا كان Z لاحقة M فإن :

$$Z = x + iy = \rho \cos\theta + i\rho \sin\theta$$

ومنه : $Z = \rho\ (\cos\theta + i \sin\theta)$

ملاحظات :

لدينا : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ وعليه : $|Z| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \rho$

وعليه :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

وإذا كان $Z = 0$ فإن : $\rho = 0$ لكن Z ليس له عمدة.

أمثلة :

عين طويلة و عمدة الأعداد المركبة الآتية :

$$Z_3 = \sqrt{3} - i\ ;\ Z_2 = i\ ;\ Z_1 = 1 + i$$

الحل :

- $Z_1 = 1 + i\ ;\ |Z_1| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

نفرض θ_1 عمدة Z_1 فيكون : $\cos\theta_1 = \dfrac{x}{|Z_1|}$ و $\sin\theta_1 = \dfrac{y}{|Z_1|}$

ومنه : $\sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن : $\theta_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

- $|Z_2| = \sqrt{0^2 + (1)^2} = 1 \;;\; Z_2 = i$

نفرض θ_2 عمدة Z_2 فيكون : $\sin\theta_2 = \frac{y}{|Z_2|}$ و $cos\theta_2 = \frac{x}{|Z_2|}$

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{1} \;,\; cos\theta_2 = \frac{0}{1} = 0$$

إذن : $\theta_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

- $|Z_3| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2 \;;\; Z_3 = \sqrt{3} - i$

- نفرض θ_3 عمدة Z_3 فيكون : $\sin\theta_3 = \frac{y}{|Z_3|} \;,\; cos\theta_3 = \frac{x}{|Z_3|}$

إذن : $\sin\theta_3 = \frac{-1}{2}$ و $cos\theta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وعليه : $\theta_3 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

خواص :

A) Z عدد مركب غير معدوم.

1) Z حقيقي موجب يكافئ : $\arg(Z) = 0 + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

2) Z حقيقي سالب يكافئ : $\arg(Z) = \pi + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$

3) $Im(Z) > 0$ و $Re(Z) = 0$ يكافئ :

$$\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

4) $Im(Z) < 0$ و $Re(Z) = 0$ يكافئ :

$$arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; ; \;\; k \in \mathbb{Z}$$

أمثلة :

عين عمدة كلا من الأعداد المركبة الآتية دون حساب

$$Z_4 = -2i \;\; ; \;\; Z_3 = 5i \;\; ; \;\; Z_2 = -4 \;\; ; \;\; Z_1 = 3$$

الحل :

- $Z_1 = 3$ ومنه : $arg(Z_1) = 0 + 2k\pi \;\; ; k \in \mathbb{Z}$
- $Z_2 = -4$ ومنه: $arg(Z_2) = \pi + 2k\pi \;\; ; k \in \mathbb{Z}$
- $Z_3 = 5i$ ومنه: $arg(Z_3) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; ; k \in \mathbb{Z}$
- $Z_4 = -2i$ ومنه: $arg(Z_4) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; ; k \in \mathbb{Z}$

B) مرافق عدد مركب :

لتكن M , M' صورتي Z و $\bar{Z}$ على الترتيب

لدينا M و M' متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل و عليه :

$$|\bar{Z}| = |Z| \text{ و } arg(\bar{Z}) = -arg(Z) + 2k\pi \;\; ; \;\; k \in \mathbb{Z}$$

C) جداء عددان مركبان :

$Z , \bar{Z}$ عددان مركبان غير معدومين حيث :

$$Z = \rho\,(cos\theta + i\,sin\theta) \text{ و } Z' = \rho'\,(cos\theta' + i\,sin\theta')$$

$$Z \,.\, Z' = \rho\rho'\left[cos\theta.cos\theta' - sin\theta.sin\theta' + i\,(sin\theta.cos\theta' + cos\theta.sin\theta')\right]$$

ومنه : $$ZZ' = \rho\rho'\,\left[\cos(\theta + \theta') + i\,\sin(\theta + \theta')\right]$$

إذن : $$|Z \,.\, Z'| = |Z| \,.\, |Z'|$$

$$arg(Z \,.\, Z') = arg(Z) + arg(Z') + 2k\pi \;\; ; \;\; k \in \mathbb{Z}$$

D) مقلوب عدد مركب غير معدوم :

نعتبر العدد المركب غير المعدوم : $Z = \rho\,(cos\theta + i\,sin\theta)$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{\rho(cos\theta + i\ sin\theta)} = \frac{cos\theta\ -\ i\ sin\theta}{\rho(cos\theta + i\ sin\theta)\ (cos\theta - i\ sin\theta)}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{cos\theta\ -\ i\ sin\theta}{\rho(cos^2\theta + i\ sin^2\theta)}$$

إذن : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{\rho}\left[cos(-\theta) + i\ sin(-\theta)\right]$

وعليه : $\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$ و $arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -arg(Z) + 2k\pi$

E) حاصل قسمة عددين مركبين :

Z و Z' عددان مركبان حيث $Z' \neq 0$

$$\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \left|Z\ .\ \frac{1}{Z'}\right| = |Z|\ .\ \left|\frac{1}{Z'}\right| = |Z|\ .\ \frac{1}{|Z'|}$$

ومنه : $\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$

$$arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = arg\left(Z \times \frac{1}{Z'}\right) = arg(Z) + arg\left(\frac{1}{Z'}\right)$$

ومنه : $arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = arg(Z) - arg(Z')$

F) تساوي عددين مركبين :

Z و Z' عددان مركبان غير معدومين حيث :

$Z = \rho\ (cos\theta + i\ sin\theta)$ و $Z' = \rho'\ (cos\theta' + i\ sin\theta')$

$Z = Z'$ يكافئ : $\rho = \rho'$ و $\theta = \theta' + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

G) طويلة و عمدة Z^n :

Z عدد مركب غير معدوم ، n عدد صحيح.

• لدينا $\left|Z^n\right| = \left|Z\right|^n$ و $\arg(Z^n) = n . \arg(Z)$

البرهان :

من أجل $n \in \mathbb{Z}_+$ نبرهن بالتراجع من أجل $n \geq 2$

• لما $n = 2$: $\left|Z^2\right| = \left|Z\right|^2$

$\arg(Z^2) = \arg(Z) + \arg(Z) = 2\arg(Z)$ كما سبق.

• نفرض صحة الخاصية إلى رتبة k أي :

$$\left|Z^k\right| = \left|Z\right|^k \quad \text{و} \quad \arg(Z^k) = k \arg(Z)$$

ونبرهن صحتها في الرتبة $k + 1$:

$$\left|Z^{k+1}\right| = \left|Z^k . Z\right| = \left|Z^k\right| . \left|Z\right| = \left|Z\right|^k . \left|Z\right| = \left|Z\right|^{k+1}$$

$$\arg(Z^{k+1}) = \arg(Z^k . Z) = \arg(Z^k) + \arg(Z)$$
$$= k \arg(Z) + \arg(Z) = (k + 1) \arg(Z)$$

من أجل $n \in \mathbb{Z}_-$: بوضع $n = -p$

$$\left|Z^n\right| = \left|Z^{-p}\right| = \left|\frac{1}{Z^p}\right| = \frac{1}{\left|Z^p\right|} = \frac{1}{\left|Z\right|^p} = \frac{1}{\left|Z\right|^{-n}} = \left|Z\right|^n$$

$$\arg\left(Z^n\right) = \arg\left(Z^{-p}\right) = \arg\left(\frac{1}{Z^p}\right)$$
$$= -\arg\left(Z^p\right) = -p \arg\left(Z\right) = n \arg\left(Z\right)$$

نتيجة :

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos\theta + i \sin\theta$$

من أجل $n \in \mathbb{Z}$; $\theta \in \mathbb{R}$.

وهو ما يعرف بدستور موافر .

H) إذا كانت A و B و C ثلاث نقط متمايزة من المستوي لواحقها Z_A و Z_B و Z_B على الترتيب فإن :

- $\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$
- $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \ [2\pi]$

I) إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان لاحقتيهما Z و Z' على الترتيب فإن :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \arg\left(\frac{Z'}{Z}\right) \ [2\pi]$$

تطبيقات :

1) Z_1 , Z_2 عددان مركبان حيث : $Z_1 = 3i$; $Z_2 = -1 + i\sqrt{3}$

احسب طويلة وعمدة كل من Z_1 , Z_2 , $Z_1 \times Z_2$, Z_1^2

Z_2^{100} , $\frac{1}{Z_1}$, $\frac{Z_1}{Z_2}$

الحل :

- $|Z_1| = 3$, $|Z_2| = 2$

لتكن θ_1 عمدة Z_1 : $\begin{cases} cos\theta_1 = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\theta_1 = \frac{3}{3} = 1 \end{cases}$ ومنه : $\theta_1 \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

ولتكن θ_2 عمدة Z_2 : $\begin{cases} cos\theta_2 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه : $\theta_2 \equiv \frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$

- $|Z_1 . Z_2| = |Z_1| . |Z_2| = 6$

$\arg(Z_1 . Z_2) = \arg(Z_1) + \arg(Z_2)$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

- $$\left|Z_1^2\right| = \left|Z_1\right|^2 = 3^2 = 9$$

$$\arg\left(Z_1^2\right) = 2\arg\left(Z_1\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \left[2\pi\right]$$

و منه : $\arg\left(Z_1^2\right) = \pi \left[2\pi\right]$

- $\left|Z_1^{100}\right| = \left|Z_1\right|^{100} = 3^{100}$ ؛ $\arg\left(Z_1^{100}\right) = 100\arg\left(Z_1\right)$

ومنه : $\arg\left(Z_1^{100}\right) = 100 \frac{\pi}{2} \left[2\pi\right] = 0 \left[2\pi\right]$

- $$\left|\frac{1}{Z_1}\right| = \frac{1}{\left|Z_1\right|} = \frac{1}{3}$$

$$\arg\left(\frac{1}{Z_1}\right) = -\arg\left(Z_1\right) \left[2\pi\right] = -\frac{\pi}{2} \left[2\pi\right]$$

- $$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{\left|Z_1\right|}{\left|Z_2\right|} = \frac{3}{2}$$

$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg\left(Z_1\right) - \arg\left(Z_2\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \left[2\pi\right]$$

ومنه : $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \frac{-\pi}{6} \left[2\pi\right]$

2) ABC مثلث حيث لواحق النقط A , B , C هي على الترتيب :

$2 + i \;,\; 4 + i \;,\; 2 + 3i$.

برهن أن المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين .

الحل :

$$\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = \left|\frac{2 + 3i - 2 - i}{4 + i - 2 - i}\right| = |i| = 1$$

ومنه : $\frac{AC}{AB} = 1$ وعليه : $AC = AB$

$$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

إذن المثلث ABC قائم في A و متقايس الساقين :

7- الشكل الأسي لعدد مركب (ترميز أولير)

- التعريف :

نضع اصطلاحا من أجل كل عدد حقيقي θ : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

فإذا كان Z عدد مركب غير معدوم حيث : $Z = \rho\ (\cos\theta + i\sin\theta)$ فإن :

$Z = \rho\ .\ e^{i\theta}$.

مثال :

اكتب العدد المركب $Z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\ i$ على الشكل الأسي :

الحل :

$|Z| = 4\sqrt{2}\ ,\ \arg(Z) = \frac{2\pi}{3}$ وعليه : $Z = 4\sqrt{2}\ .\ e^{\frac{2\pi}{3}i}$

- خواص :

ليكن $Z_1\ ,\ Z_2$ عددان مركبان حيث :

$Z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1}\ ,\ Z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

1) $Z_1\ .\ Z_2 = \rho_1\ .\ \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$$2)\ \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{\rho_1}\ .\ e^{-i\theta_1}$$

$$3)\ \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\ .\ e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$4)\ Z_1^n = \rho_1^n . e^{in\theta}$$

$$5)\ \bar{Z}_1 = \rho_1\ .\ e^{-i\theta_1}$$

ملاحظة :

لدينا : $e^{i\theta} = cos\theta + i\ sin\theta$; $e^{i\theta'} = cos\theta' + i\ sin\theta'$ وعليه :

$$e^{i\theta}\ .\ e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} = cos(\theta+\theta') + i\ sin(\theta+\theta')\ ...\ (1)$$

ولدينا : $e^{i\theta}\ .\ e^{2\theta'} = (cos\theta + i\ sin\theta)\ (cos\theta' + i\ sin\theta')$

$$= cos\theta.cos\theta' - sin\theta.\ sin\theta' + i(cos\theta.\ sin\theta' + sin\theta.\ cos\theta')\ ...(2)$$

من (1) ; (2) : $cos(\theta+\theta') = cos\theta\ .\ cos\theta' - sin\theta\ .\ sin\theta'$

$$sin(\theta+\theta') = cos\theta\ .\ sin\theta' + sin\theta\ .\ cos\theta'$$

- التعبير عن دائرة بالعلاقة $Z = Z_0 + k\ .\ e^{i\theta}$

لتكن(C) دائرة مركزها ω ونصف قطرها k.

نفرض Z_0 لاحقة ω ، k عدد حقيقي موجب تماما .

من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة Z من (C)

لدينا : $M \in (C)$ تكافئ : $\|Z - Z_0\| = k$

و تكافئ $Z - Z_0$ هو عدد مركب غير معدوم طويلته k و تكافئ : يوجد عدد حقيقي θ (يمكن القول أن $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$)

بحيث : $Z = Z_0 + k\ .\ e^{i\theta}$.

- التعبير عن نصف مستقيم بالعلاقة $Z = Z_0 + k\ .\ e^{i\theta}$

ليكن $[wx)$ نصف مستقيم مبدأه ω و شعاع توجيهه $\vec{V}$ معطى .

نفرض Z_0 لاحقة w ، u لاحقة $\vec{v}$, $\left(u \in \mathbb{C}^*\right)$

حيث : $|u| = 1 \quad ; \quad \arg(u) = \theta \; [2\pi]$

من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة Z من المستوى لدينا :

$M \in [wx)$ تكافئ (يوجد عدد k من $\mathbb{R}_+$ بحيث : $\overrightarrow{wM} = k . \vec{v}$) وتكافئ

(يوجد عدد k من $\mathbb{R}_+$ بحيث :

$$(Z = Z_0 + k . e^{i\theta}$$

8 – المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$.

* إذا كان Z , Z' عددان مركبان فإن :

$Z . Z' = 0$ تكافئ : $Z = 0$ أو $Z' = 0$

البرهان :

نفرض $Z = x + iy$ و $Z' = x' + iy'$

لدينا : $Z . Z' = (xx' + yy') + i\,(xy - x'y)$

ومنه : $Z . Z' = 0$ تكافئ : $\begin{cases} xx' - yy' = 0 \\ \text{و} \\ xy' + x'y = 0 \end{cases}$

نفرض $Z' \neq 0$ حل الجملة ذات المجهول $(x \,;\, y)$ هو :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -y' & 0 \\ x & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{vmatrix}} = \frac{0}{x'^2 + y'^2} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x' \\ 0 & y' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{vmatrix}} = \frac{0}{x'^2 + y'^2} = 0$$

فنجد $Z = 0$.

وإذا فرضنا $Z \neq 0$ نجد : $Z' = 0$ ومنه : $Z . Z' = 0$

تكافئ : $Z = 0$ أو $Z' = 0$

* حل معادلة من الشكل :

$$aZ^2 + bZ + C = 0 \; . \; . \; . \; (1)$$

مع c , b , a أعداد حقيقية حيث $Z \; ; \; a \neq 0$ متغير في $\mathbb{C}$

الشكل النموذجي للعبارة $aZ^2 + bZ + C$ هو :

$$aZ^2 + bZ + C = a\left[\left(Z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

بوضع $\Delta = b^2 - 4ac$ نجد : $aZ^2 + bZ + C = a\left[\left(Z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

• إذا كان $\Delta \geq 0$: للمعادلة (1) حلين كما سبق في $\mathbb{R}$.

$$Z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

• إذا كان $\Delta < 0$: نضع $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$

فيكون :

$$aZ^2 + bZ + C = a\left(Z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(Z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

وعليه المعادلة (1) تكافئ :

$$Z = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{أو} \quad Z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

أي للمعادلة (1) حلين متمايزين .

* الجذور الربيعية لعدد مركب :

ليكن Z عدد مركب غير معدوم. لنبحث عن وجود عدد مركب k بحيث $k^2 = Z$.

نفرض $Z = x + iy$ و $k = \alpha + i\beta$

لدينا : $k^2 = Z$ وعليه :
$$\begin{cases} (\alpha + i\beta)^2 = x + iy \\ |k|^2 = |Z| \end{cases}$$

إذن :
$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = x \; . . . (1) \\ 2\alpha\beta = y \; . . . (2) \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \; . . . (3) \end{cases}$$

نجمع (1) و (3) نجد : $2\alpha^2 + \beta^2 = x + \sqrt{x^2 + y^2}$

وعليه : $\alpha^2 = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}$ لكن $\sqrt{x^2 + y^2} > -x$

ومنه $\alpha = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}$ أو $\alpha = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}$

نفرض : $\alpha_1 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}$ و $\alpha_2 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}}$

بالتعويض في (2) :

لما $\alpha = \alpha_1$: $\beta_1 = \dfrac{y}{2\alpha_1}$ ، لما $\alpha = \alpha_2$: $\beta_2 = \dfrac{y}{2\alpha_2}$

حيث : $\alpha_2 = -\alpha_1$ ، $p_2 = -\beta_1$

* حل المعادلات من الشكل :

$$aZ^2 + bZ + C = 0 \ . \ . \ . \ (1)$$

حيث b , c , a أعداد مركبة و $a \neq 0$

- نكتب $aZ^2 + bC + C$ على الشكل النموذجي فنجد :

$$aZ^2 + bZ + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

مع $\Delta = b^2 - 4ac$ كما سبق .

- إذا كان Δ عدد حقيقي موجب : للمعادلة (1) حلين

$$Z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad و \quad Z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- إذا كان Δ عدد حقيقي سالب : للمعادلة (1) حلين

$$Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad و \quad Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- إذا كان Δ عدد مركب غير حقيقي :

نبحث عن جذريه التربيعيين و ليكن k أحدهما ومنه (1) تكافئ :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{k^2}{4a^2}\right] = 0$$

وعليه للمعادلة حلين :

Z_1 و Z_2 حيث : $Z_1 = \dfrac{-b - k}{2a}$, $Z_2 = \dfrac{-b + k}{2a}$

مثال :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2 - (3 - 2i)\,Z + 5 - i = 0$

$\Delta = b^2 - 4a\,C$ ومنه : $\Delta = (3 - 2i)^2 - 4\,(5 - i)$

إذن : $\Delta = 9 - 12i - 4 - 20 + 4i$ ومنه : $\Delta = -15 - 8i$

نبحث عن الجذرين التربيعيين للعدد Δ .

ليكن k جذر تربيعي للعدد Δ .

نفرض : $k = x + iy$ فيكون : $\begin{cases} k^2 = \Delta \\ |k^2| = \Delta \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} (x + iy)^2 = -15 - 8i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} x - y^2 = -15 \ldots (1) \\ 2xy = -8 \ldots (2) \\ x^2 + y^2 = 17 \ldots (3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد : $2x^2 = 2$ ومنه : $x^2 = 1$

وعليه : $x = 1$ أو $x = -1$.

بالتعويض في(2) نجد : لما $x = 1$: $y = -4$

لما $x = 1$: $y = 4$.

إذن $k = 1 - 4i$ أو $k = -1 + 4i$

وبالتالي للمعادلة حلين هما :

$$Z_2 = \frac{3 - 2i + 1 - 4i}{2} = 2 - 3i \ , \ Z_1 = \frac{3 - 2i - 1 + 4i}{2} = 1 + i$$

9- الأعداد المركبة و التحويلات النقطية :

* مبرهنة :

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' .

- إذا كان : $Z' = Z + \beta$ حيث : $\beta \in \mathbb{C}$

  فإن : f انسحاب شعاعه $\vec{v}$ ذو اللاحقة β.

- إذا كان : $Z' - Z_0 = k(Z - Z_0)$ حيث $Z_0 \in \mathbb{C}$ و $k \in \mathbb{R}^*$ فإن f تحاكي نسبته k و مركزه النقطة M_0 ذات

اللاحقة Z_0 .

- إذا كان : $Z' - Z_0 = e^{i\theta}(Z - Z_0)$ حيث $Z_0 \in \mathbb{C}$ و $\theta \in \mathbb{R}$

فإن f دوران مركزه النقطة M_0 ذات اللاحقة Z_0 وزاويته θ .

البرهان :

- إذا كان $Z' = Z + \beta$ فإن $Z' - Z = Z_{\overrightarrow{MM'}} = \beta$

ومنه من أجل كل نقطة M من المستوي فإن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ ثابت.

وعليه فهو يعرف انسحاب .

- إذا كان $Z' - Z_0 = k(Z - Z_0)$ فإن صورة النقطة M_0 ذات

اللاحقة Z_0 بواسطة f هي نفسها. ومن أجل $Z \neq Z_0$

فإن : $k \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{Z' - Z_0}{Z - Z_0} = k$.

ومنه : $|k| = \dfrac{M_0M'}{M_0M}$

فإذا كان $k > 0$ فإن : $\left(\overrightarrow{M_0M} \,;\, \overrightarrow{M_0M'}\right) = 0\ [2\pi]$

و إذا كان $k < 0$ فإن : $\left(\overrightarrow{M_0M} \,;\, \overrightarrow{M_0M'}\right) = \pi\ [2\pi]$

وفي الحالتين النقط M_0 , M , M' على استقامة واحدة.

و بالنسبة $|k| = \dfrac{M_0M'}{M_0M}$ تميز تحاكي مركزه M_0 و نسبته k .

- إذا كان $Z' - Z_0 = e^{i\theta}(Z - Z_0)$ فإن صورة النقطة M_0 ذات اللاحقة Z_0

بواسطة f هي نفسها. ومن أجل : $Z \neq Z_0$

فإن : $\dfrac{Z' - Z_0}{Z - Z_0} = e^{i\theta}$

ومنه : $\frac{M_0M'}{M_0M} = 1$ و $\left(\overrightarrow{M_0M} ; \overrightarrow{M_0M'}\right) = \theta \ [2\pi]$

هاتين العلاقتين تميزان دوران مركزه M_0 و زاويته θ .

أمثلة :

ادرس طبيعة التحويل f الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' في كل حالة مما يلي :

$$1)\ Z' = Z - 1 \qquad 2)\ Z' = Z + i + 1 \qquad 3)\ Z' = 3Z$$

$$4)\ Z' = -2Z + i + 2 \qquad 5)\ Z' = iZ \qquad 6)\ Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(i + 1)\ Z + i$$

الحل :

1) لدينا : $Z' = Z - 1$

f انسحاب شعاعه $\vec{W}$ ذو اللاحقة 1- .

2) لدينا : $Z' = Z + i + 1$

f انسحاب شعاعه $\vec{W}$ ذو اللاحقة $1 + i$.

3) لدينا : $Z' = 3Z$

f تحاك نسبته 3 و مركزه O .

4) لدينا : $Z' = -2Z + i + 2$

f تحاك نسبته 2- و مركزه I حيث لاحقته $Z_0 = \frac{i}{1 - i - 1}$.

إذن $Z_0 = -1$.

5) لدينا : $Z' = iZ \ , \ i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

f دوران مركزه O وزاويته عمدة i أي $\frac{\pi}{2}$.

6) لدينا : $Z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (i + 1)\ Z + i$

ولدينا : $\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

وعليه f دوران زاويته $\frac{\pi}{4}$ و مركزه النقطة ذات اللاحقة Z_0

حيث : $Z_0 = \dfrac{i}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}$ ومنه : $Z_0 = \dfrac{2i}{2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}$ أي :

$$Z_0 = \frac{2i\left(2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)}{\left[2 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i\right]\left[2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right]}$$

وعليه : $Z_0 = \dfrac{-2\sqrt{2} + 2\left(2 - \sqrt{2}\right)i}{\left(2 - \sqrt{2}\right)^2 + 2}$.

تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

التطبيق :

نعتبر العدد المركب $z = \frac{(1-3i)^2}{5+i}$.

باستعمال آلة بيانية :

1) عين مرافق العدد z .   2) عين الجزء الحقيقي للعدد z .

3) عين الجزء التخيلي للعدد z .   4) عين طويلة العدد z .

5) عين عمدة العدد z .   6) أكتب العدد z على الشكل الجبري.

7) أكتب العدد z على الشكل الأسي.

الحل

1) تعيين المرافق :

ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة

الى CPX كمايظهر على الشاشة فتظهر

قائمة كما في الشاشة الموالية.

نختار الرقم 1 لنحصل على :

1:Conj(

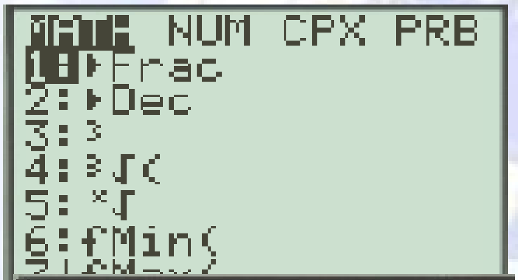
نكتب عبارة z كمايلي :

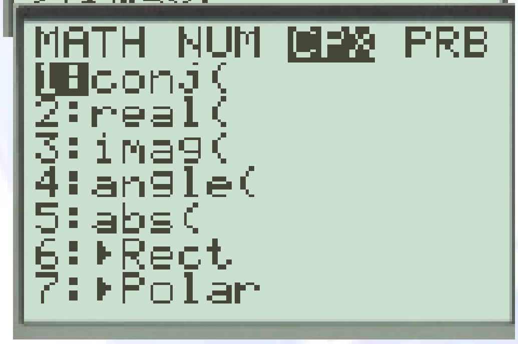
Conj((1-3i)^2)/(5+i))

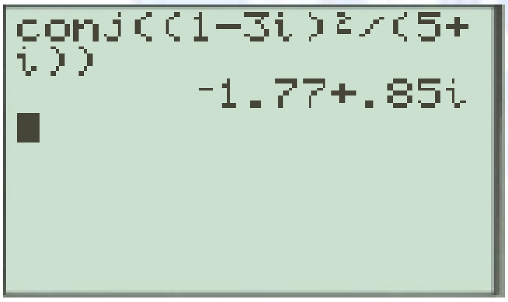
وننقر على Enter فنحصل على النتيجة

-1,77+0,85i

والتي تمثل مرافق z







2) تعيين الجزء الحقيقي :

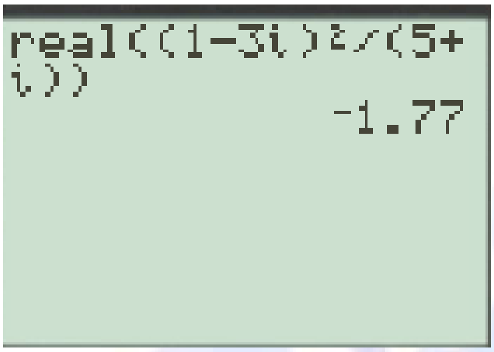
ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة

الى CPX ثم على الرقم 2

فتظهرعلى الشاشة العبارة : real(

ندخل عبارة : : real((1-3i)^2)/(5+i))

ننقر على Enter فنجد : −1,77



3) تعيين الجزء التخيلي :

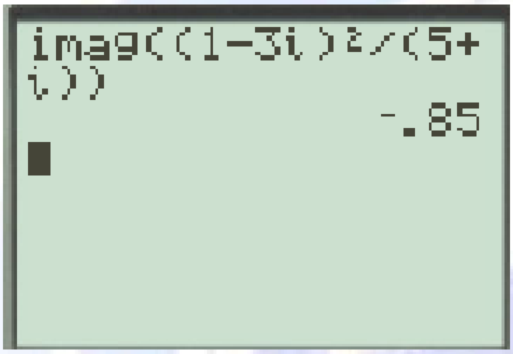
ننقر على اللمسة MATH ونحرك

الزالقة الى CPX ثم على الرقم 3

فتظهرعلى الشاشة العبارة : Imag(

ندخل عبارة : : Imag((1-3i)^2)/(5+i))

ننقر على Enter فنجد: 0,8 5 -



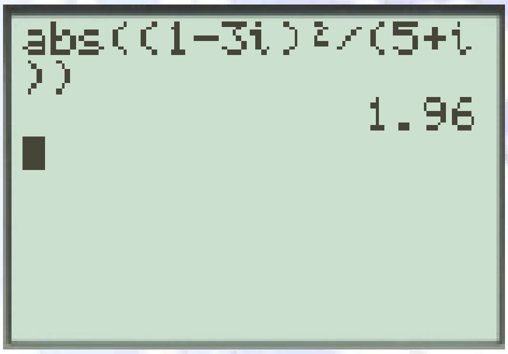
4)ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة

إلى CPX ثم على الرقم 5 فتظهرعلى

الشاشة العبارة : abs (

ندخل عبارة : abs((1-3i)^2)/(5+i))

ننقر على Enter فنجد: 1,96



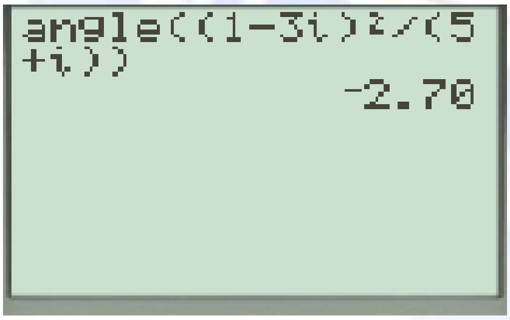
5)ننقر على اللمسة MATH ونحرك الزالقة

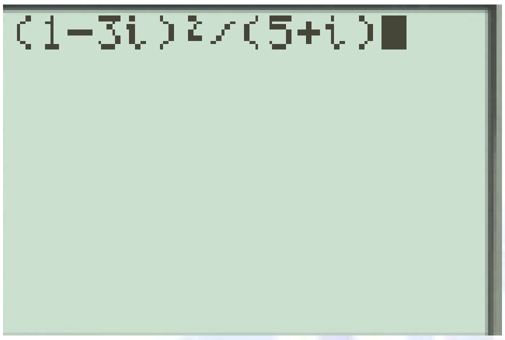
إلى CPX ثم على الرقم 4 فتظهرعلى

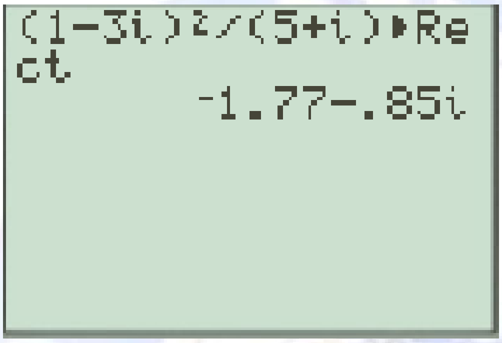
الشاشة العبارة : angle (

ندخل عبارة : angle((1-3i)^2)/(5+i))

ننقر على Enter فنجد: 2,70 −







6)كتابة Z على الشكل الجبري :

نكتب على الشاشة عبارة Z كمايلي :

(1-3i)^2/(5+i)

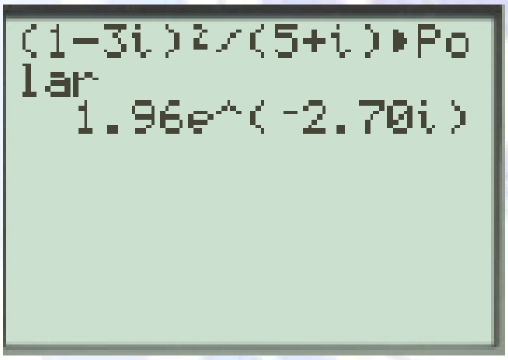
ننقر على اللمسة  ونحرك الزالقة

إلى CPX ثم ننقرعلى الرقم 6

و ننقر على Enter

فتظهرعلى الشاشة العبارة :

-1,77- 0,85 i



7) كتابة Z على الشكل الأسي :

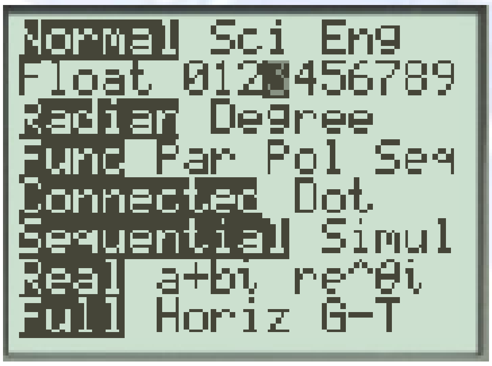
نكتب على الشاشة عبارة Z كما يلي :

(1-3i)^2/(5+i)

ننقر على اللمسة  ونحرك الزالقة

إلى CPX ثم ننقرعلى الرقم 7 و ننقر

على Enter فتظهرعلى الشاشة العبارة : $1,96e^{-2,70i}$



ملاحظة 1 :

لكتابة الحرف i نقوم بما يلي :

ننقرعلى اللمسة  ثم على اللمسة 

ملاحظة 2 :

لتغيير عدد الأرقام بعد الفاصلة ننقر على اللمسة  ونحدد عدد الأرقام بعد الفاصلة باستعمال الزالقة وهذا في السطر الثاني ثم ننقر علىEnter وقد اخترنا في الشكل ثلاثة أرقام بعد الفاصلة .

تمـارين و مشكلات

التمرين 1 .

ضع العلامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة× أمام كل جملة خاطئة:

1) العدد 0 ليس عدد مركب .

2) $\cos\frac{\pi}{6}$ هو عدد مركب.

3) كل عدد حقيق هو عدد مركب.

4) كل عدد مركب هو عدد حقيقي.

5) إذا كان : $x + 2i = -3 + yi$ حيث x وy عددان مركبان غير حقيقيين فإن : $y = 2$ و $x = -3$

6) $\overline{Z} = -Z$

7) $\frac{i - \overline{Z}}{i - \overline{Z}} = \overline{\left(\frac{i + Z}{i - Z}\right)}$

8) إذا كانت $|Z| = 1$ فإن : $\overline{Z} = \frac{1}{Z}$

9) إذا كانت $|Z| = 4$ حيث Z عدد مركب وهو لاحقة $M(x ; y)$ فإنه عندما يتغير كل من x وy في $\mathbb{R}$ يشكلان دائرة مركزها O ونصف قطرها 4 .

10) العبارة $4\left(\sin\frac{\pi}{2} + i\cos\frac{\pi}{2}\right)$ هي الشكل المثلثي لعدد مركب طويلته 4 و عمدته $\frac{\pi}{2}$.

11) طويلة و عمدة العدد المركب Z

حيث : $Z = 2\left[\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right]$ هما 2 و $\frac{\pi}{4}$ على الترتيب .

12) طويلة و عمدة العدد المركب Z حيث : $Z = 3\left[\sin\frac{\pi}{4} + i\,cos\frac{\pi}{4}\right]$ هما 3 و

$\frac{\pi}{6}$ على الترتيب .

13) العبارة : $Z = -4\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ هي لعدد مركب طويلته 4 و عمدته $\frac{\pi}{4}$.

14) العبارة : $Z = -4\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ هي لعدد مركب طويلته 4 و عمدته $\pi + \frac{\pi}{4}$

15) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث $Z = -2 + i + k\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

هي نصف مستقيم مبدأه النقطة I ذات اللاحقة $-2 + i$ و k متغير في $\mathbb{R}$

16) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث $Z = i + 3\,e^{i\theta}$ حيث θ متغير في $\mathbb{R}$ هي

دائرة مركزها i ذات اللاحقة i و نصف قطرها 3

17) توجد معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$ لا تقبل حلول

18) إذا كان مميز معادلة من الدرجة الثانية سالبا فإنها تقبل حلين مترافقين.

19) إذا كانABC مثلث حيث لواحق A و B وC هي Z_A و Z_B و Z_C بحيث:

$$\left|\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right| = 1$$

20) فإن المثلث ABC متساوي الساقين .

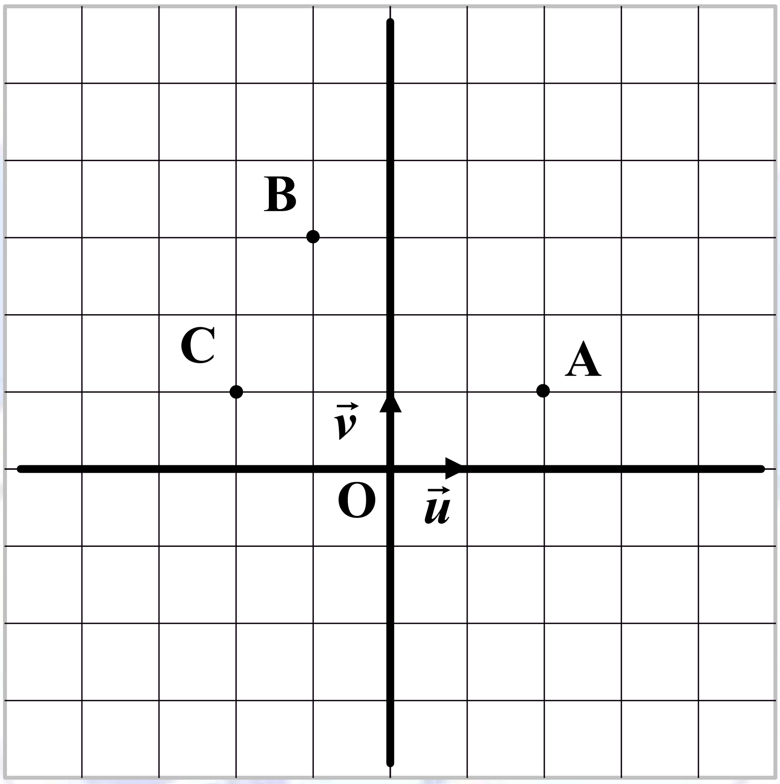
21) إذا كان ABC مثلث حيث Z_A , Z_B , Z_C هي لواحق , C, B

A و كانت عمدة العدد المركب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ هي $\frac{\pi}{2}$ فإن المثلث

ABC قائم في A .

التمرين 2 .

إليك الشكل التالي :



1) عين لواحق النقط A و B و C .

2) عين لواحق الأشعة $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

3) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع. ثم عين لاحقة مركزه I .

4) عين لاحقة النقطة E بحيث يكون ABDE متوازي أضلاع.

التمرين 3 .

هل توجد أعداد حقيقية x و y يكون العدد المركب $Z = (x + y) + xyi$ مساويا إلى العدد المركب $7 + 12i$

التمرين 4 .

نعتبر النقط A , B , C , D التي لواحقها Z_A , Z_B , Z_C , Z_D حيث :

$$Z_D = \overline{Z}_C \;;\; Z_C = -Z_A \;,\; Z_B = \overline{Z}_A \;;\; Z_A = \alpha + i\beta$$

حيث α و β عددان حقيقيان .

ما هي طبيعة الرباعي ABCD .

التمرين 5 .

نعتبر العددان المركبان : $Z_1 = 2 - i$ و $Z_2 = -5 + 3i$

اكتب على الشكل الجبري الأعداد الآتية.

$$Z_3 = \frac{Z_1 - Z_2}{1 + Z_1} \ , \ Z_4 = \frac{Z_1^2}{1 - Z_2} \ , \ Z_5 = \frac{iZ_1}{\left(Z_1 + Z_2\right)^2}$$

التمرين 6 .

احسب المجموع : $S_1 = 1 + i + i^2 + . . . + i^{2008}$

ثم المجموع : $S_2 = 1 - i + i^2 - i^3 + . . . + (-i)^{2008}$

التمرين 7 .

مثل في المستوي المركب النقط A , B , C , D , E , F التي لواحقها على الترتيب :

$$Z_A \ , \ Z_B \ , \ Z_A + Z_B \ , \ Z_A . Z_B \ , \ \frac{1}{Z_A} \ , \ \frac{1}{Z_B}$$ حيث :

$$|Z_A| = 2 \text{ و } \arg\left(Z_A\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$|Z_B| = 1 \text{ و } \arg\left(Z_B\right) = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

التمرين 8 .

نعتبر العددان المركبان : $Z_1 = -2 - 2i$; $Z_2 = 3\sqrt{3} - 3i$ عن طويلة و عمدة الأعداد المركبة الآتية :

$$Z_1 \ , Z_2 \ , \frac{1}{Z_1} \text{ و } Z_2^4 \text{ و } \frac{Z_1}{Z_2} \text{ و } Z_1^2 \text{ و } Z_1 . Z_2$$

التمرين 9 .

احسب كل من : $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1418}$; $(1+i)^{1962}$; $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{2010}$

التمرين 10 .

نعتبر الأعداد المركبة

$$Z_3 = -4\sqrt{6} + 4\sqrt{2}i \ ; \ Z_2 = -1 - \sqrt{3}i \ ; \ Z_1 = 1 - i$$

اكتب الشكل الأسي لكل من :

$$Z_1 \ , Z_2 \ , Z_3 \ , Z_1 \ , Z_2 \ , \frac{Z_1}{Z_2} \ , Z_3^2 \ , Z_1 \ Z_2 \ Z_3$$

التمرين 11 .

باستعمال العلاقتين :

$$cos\theta - i \sin\theta = e^{-i\theta} \quad \text{و} \quad cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$$

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي θ فإن :

$$cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

التمرين 12 .

اكتب اللاحقة Z' للنقطة M' بدلالة اللاحقة Z للنقطة M إذا كانت M' هي صورة M بواسطة :

1) الانسحاب t الذي لاحقة شعاعه $\vec{w}$ هي $\frac{1}{2}i$.

2) التحاكي H الذي مركزه O ويحول النقطة A ذات اللاحقة 1 + i إلى النقطة B ذات اللاحقة 2 + 2i .

3) الدوران R الذي زاويته $\frac{5\pi}{6}$ و مركزه النقطة C ذات اللاحقة $-\sqrt{3} + i$.

التمرين 13 .

1- عين الجذرين التربيعيين لكل من 3 + 4i ; 3 – 4i

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2 - 6Z + 25 = 0$

3- استنتج حلول المعادلة : $Z^4 - 6Z^2 + 25 = 0$

التمرين 14 .

A,B,C ثلاث نقط لواحقها : $a = -1 - i \ , \ b = 2 + i \ , \ c = 4i$
على الترتيب .

1- مثل النقط A,B,C .

2- اكتب العدد المركب : $Z = \dfrac{a - b}{c - b}$ على الشكل المثلثي.

استنتج طبيعة المثلث ABC .

3- عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي ABCD مربع.

التمرين 15 .

نعتبر النقط M , B , A ذات اللواحق $Z \ , i \ , \dfrac{1}{2}$ حيث: $Z \neq i$

على الترتيب . نضع: $Z_1 = \dfrac{1 - 2Z}{iZ + 1}$.

1- بين أن : $|Z_1| = 2 \cdot \dfrac{AM}{BM}$.

استنتج المجموعة (E) للنقط M من المستوى بحيث يكون $|Z_1| = 2$.

2- عين المجموعة (F) للنقط M بحيث يكون Z_1 حقيقي .

التمرين 16 .

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z في كل حالة مما يلي :

1) $Z = 1 + 2e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي يمسح كل $\mathbb{R}$.

2) $Z = i + 4e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي يمسح كل $\mathbb{R}$.

3) $Z = -1 + i + ke^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k عدد حقيقي يمسح كل $\mathbb{R}$.

التمرين 17 .

حل في $\mathbb{C}$ الجملتين :

$$\begin{cases} iZ + i\overline{Z}' = 3 \\ 2iZ - \overline{Z}' = 1 + i \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} iZ + (2i - 1)\, Z' = 4 \\ -iZ + 3iZ' = -i \end{cases}$$

التمرين 18 .

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$Z^2 + 2\,(1 - \cos\theta)\, Z + 2 - 2\cos\theta = 0$$

حيث $\pi \leq \theta < 0$. نكتب كل الحلول على الشكل المثلثي .

التمرين 19 .

نعتبر المعادلة الآتية في $\mathbb{C}$:

$$Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0 \; . \; . \; . \; (1)$$

1- بين أن المعادلة (1) تقبل حلا حقيقيا Z_0 حيث $Z_0 = 8$.

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1) .

3- ليكن Z_0 , Z_1 , Z_2 حلول المعادلة (1) حيث : القسم التخيلي للعدد Z_2 سالب.

- اكتب كل منها على الشكل المثلثي .

- مثل النقط M_0 , M_1 , M_2 التي لواحقها Z_0 , Z_1 , Z_2 على الترتيب في المستوي المركب .

4- نفرض : $Z_3 = \dfrac{Z_2 - Z_0}{Z_1 - Z_0}$

- احسب طويلة و عمدة Z_3 . ما هي طبيعة المثلث $M_0M_1M_2$.

التمرين 20 .

نعتبر العدد المركب Z لاحقة النقطة M .

و نضع : $Z_1 = \dfrac{i\,Z + 1 - i}{Z - 2 + i}$

1- عين مجموعة النقط M بحيث تكون Z_1 حقيقيا موجبا.

2- عين مجموعة النقط M بحيث تكون : عمدة Z_1 تساوي $\dfrac{\pi}{2}$.

3- عين مجموعة لنقط M بحيث تكون $|Z_1| = \sqrt{2}$.

4- عين مجموع النقط M بحيث تكون عمدة Z_1 مساوية إلى $\frac{\pi}{4}$.

التمرين 21 .

عين طويلة و عمدة العدد المركب :

$Z = 1 - \cos\theta + i \sin\theta$ مع $-\pi < \theta \leq \pi$.

التمرين 22 .

عين ثلاث أعداد مركبة جداؤها 27i- و طويلاتها تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية أساساها 3

و عمدتها تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية أساساها $\frac{\pi}{3}$.

التمرين 23 .

في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u} , \vec{v})$ ؛ (الوحدة 2 cm).

نعتبر النقطة A ذات اللاحقة $Z_A = 1$ و الدائرة (C) ذات المركز A و نصف القطر R = 1 .

I) نعتبر النقطة F ذات اللاحقة 2 و النقطة B ذات اللاحقة $Z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ و النقطةَ E ذات اللاحقة $Z_E = 1 + Z_B^2$.

1- بين أن B نقطة من الدائرة (C) .

2- عين قيس للزاوية $\left(\overrightarrow{AF} , \overrightarrow{AB}\right)$.

3- عين الشكل الأسي للعدد $Z_B - Z_A$ و $Z_E - Z_A$.

4- استنتج أن النقط A و B وE على استقامة واحدة .

II) لتكن النقطتان M و M' ذات اللاحقتين Z و Z' حيث :

$$Z \neq 0 , Z \neq 1 \text{ و } Z' = 1 + Z^2$$

1- ما هو التفسير الهندسي لـ $\frac{Z' - 1}{Z - 1}$ حيث $Z \neq 0$ و $Z \neq 1$.

2- استنتج أن النقط A و M و M' تكون على استقامة واحدة

إذا وفقط إذا كان : $\frac{Z_2}{Z-1} \in \mathbb{R}$.

التمرين 24 .

نعتبر كثير الحدود : $f(Z) = Z^3 - (2-3i)Z^2 + 9Z - 18 + 27i$

1) احسب : $\overline{f(Z)}$ بدلالة $\bar{Z}$.

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(Z) = 0$ إذا علمت أنها تقبل حلين مترافقين Z_1 و $\bar{Z}_1$.

3) نعتبر النقط A وB وC التي لواحقها : 3i ; -3i ; 2 – 3i

على الترتيب .

- احسب العدد المركب Z' حيث : $Z' = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$.

- احسب $|Z'|$ و عمدة Z' . ما هي طبيعة المثلث ABC .

4) M نقطة في المستوى لاحقتها Z .

ما هي مجموعة النقط M بحيث : $AM^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = 25$.

التمرين 25 .

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^2 - (1+i)Z - 4i = 0$

2) نعتبر المعادلة :

$$Z^4 - (1+i)Z^3 + (9-4i)Z^2 - 9(1+i)Z - 36 = 0$$

- بين أن لهذه المعادلة حلين تخيليين صرفيين متعاكسين Z_3 و Z_4 .

- استنتج مجموعة الحلول .

3- عين مجموعة النقط M بحيث تكون عمدة العدد المركب : $\frac{Z - Z_3 - Z_4}{Z - Z_1 - Z_2}$ مساوية إلى

$\frac{-\pi}{2}$.

حيث Z هي لاحقة M و Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 هي حلول المعادلة السابقة في السؤال (2) .

التمرين 26 .

ABC مثلث. نرسم خارج المثلث ABC المثلثات المقايسة الأضلاع ABC و ACE و BCF التي مراكز ثقلها K , J , I على الترتيب.

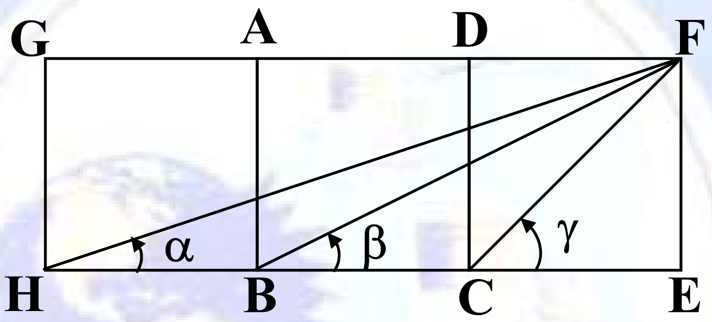
برهن أن للمثلثات ABC و FED و IJK نفس مركز الثقل.

التمرين 27 .

عين الطويلة و عمدة للعدد المركب $1 + \cos x + i\ \sin x$.

التمرين 28 .

ABCD مربع. نرسم المربعين DCEF و GHBA كما يظهر على الشكل :



برهن أن : $\alpha + \beta = \gamma$

التمرين 29 .

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.

نعتبر النقط C , B , A التي لواحقها : $3 - i$, $i + 2$; $-4 + 2i$ على الترتيب .

1) عين مجموعة النقط N ذات اللاحقة Z بحيث $|Z - 3 + i| = 2$

2) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث : $\arg\left(\dfrac{Z - 2 - i}{Z + 4 - 2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

التمرين 30 .

ABC مثلث حيث $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right) = \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ و $\alpha \in \left]0\ ;\ \pi\right[$.

ننشئ خارج هذا المثلث المربعان ABFG و ACDE و متوازي الأضلاع AELG برهن أن

$(AL) \perp (BC)$ و $AL = BC$

الحـلـــــــول

التمرين 1 .

1) ×	2) √	3) √	4) ×	5) ×
6) ×	7) ×	8) √	9) √	10) ×
11) ×	12) ×	13) ×	14) ×	15) √
16) √	17) ×	18) ×	19) √	20) √

التمرين 2 .

1) لاحقة A هي : $Z_A = 2 + i$

لاحقة B هي : $Z_B = -1 + 3i$

لاحقة C هي : $Z_C = -2 + i$

2) لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي : $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = -3 + 2i$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هي : $Z_{\overrightarrow{AC}} = Z_C - Z_A = -4$

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هي : $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_C - Z_B = -1 - 2i$

3) تعيين لاحقة D بحيث يكون BCD متوازي أضلاع.

تكون ABCD متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان :

$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$ ولدينا : $Z_{\overrightarrow{AB}} = -3 + 2i$, $Z_{DC} = Z_C - Z_D$

أي : $Z_{\overrightarrow{DC}} = -1 - i - ZE$ وعليه :

$$-2 + i - Z_D = -3 + 2i$$

إذن : $Z_D = 1 - i$

- تعيين لاحقة I مركز ABCD : I هو منتصف $[AC]$

ومنه : $Z_I = \dfrac{Z_A + Z_C}{2} = \dfrac{2 + i - 2 + i}{2} = i$

إذن : $Z_I = i$

4- تعيين لاحقة E بحيث يكون ABCD : متوازي أضلاع يكون DE متوازي أضلاع إذا وفق إذا كان :

$Z_{\overrightarrow{ED}} = Z_D - Z_E$, $Z_{\overrightarrow{AB}} = -3 + 2i$ حيث $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{ED}}$

أي $Z_{\overrightarrow{ED}} = - i - Z_E$

وعليه : $1 - i - Z_E = -3 + 2i$

إذن : $Z_E = 4 - 3i$.

التمرين 3 .

إيجاد الأعداد x و y بحيث : $Z = 7 + 12i$

أي : $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

ومنه x و y هما حلان للمعادلة : $t^2 - 7t + 12 = 0$, $\Delta = 1$, $t_1 = 3$ و $t_2 = 4$.

ومنه $x = 3$ و $y = 4$ أو $x = 4$ و $y = 3$

التمرين 4 .

طبيعة الرباعي ABCD :

لدينا $Z_B = \overline{Z}_A$ ومنه A و B متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل

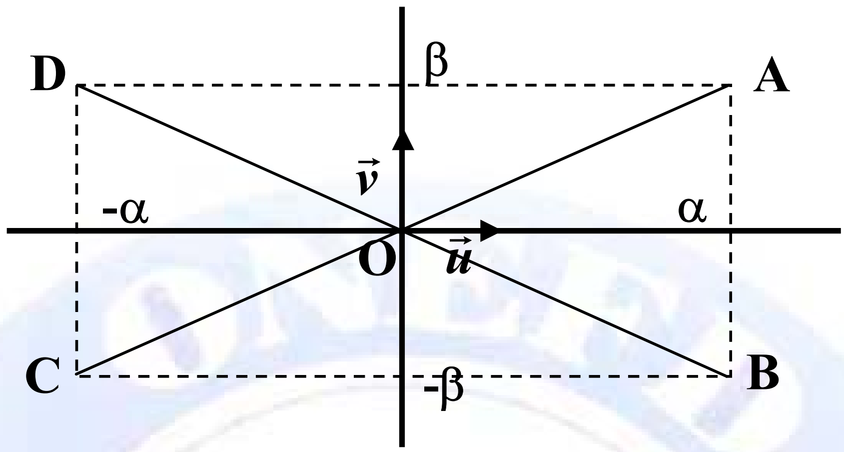
و لدينا : OA = OB .

و بما أن $Z_C = - Z_A$ فإن A و C متناظرتان بالنسبة إلى مبدأ المعلم O و لدينا : OA = OC .

و بما أن $Z_D = \overline{Z}_C$ فإن D وC متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل

و لدينا : OC = OD .

وعليه ABCD هو مستطيل لأن قطران متقايسان و متناصفان .



التمرين 5 .

الكتابة على الشكل الجبري :

$$Z_3 = \frac{Z_1 - Z_2}{1 + Z_1} = \frac{2 - i + 5 - 3i}{1 + 2 - i} = \frac{7 - 4i}{3 - i} \times \frac{3 + i}{3 + i}$$

$$Z_3 = \frac{25 - 2i}{10} = \frac{5}{2} - \frac{1}{5}\, i$$

$$Z_4 = \frac{Z_1^2}{1 - Z_2} = \frac{(2 - i)^2}{1 + 5 - 3i} = \frac{4 - 4i - 1}{6 - 3i}$$

$$Z_4 = \frac{3 - 4i}{6 - 3i} \times \frac{6 + 3i}{6 + 3i} = \frac{30 - 15i}{45} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\, i$$

$$Z_5 = \frac{i\, Z_1}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{i\,(2 - i)}{(-5 + 3i + 2 - i)^2} = \frac{2i + 1}{(-3 + 2i)^2}$$

$$Z_5 = \frac{2i + 1}{5 - 12i} \times \frac{5 + 12i}{5 + 12i} = \frac{-19 + 22i}{169}$$

$$Z_5 = \frac{-19}{169} + \frac{22}{169}\, i$$

التمرين 6 .

- حساب S : المجموع هو مجموع $n + 1$ حد من متتالية هندسية حدها الأول 1 و أساسها i

$$S_1 = 1 \times \frac{1 - i^{2009}}{1 - i} = \frac{1 - i \cdot i^{2008}}{1 - i}$$

$$S_1 = \frac{1 - i \cdot \left[(i)^2\right]^{1004}}{1 - i} = \frac{1 - i\,(-1)^{1004}}{1 - i} = \frac{1 - i}{1 - i} = 1$$

- حساب S_2 :

$$S_2 = 1 - i + i^2 - i^3 + \dots + (-i)^{2008}$$

$$S_2 = (-i)^0 + (-i)^1 + (-i)^2 + (-i)^3 + \dots + (-i)^{2008}$$

وهو مجموع 2009حد من حدود متتالية هندسية حدها الأول 1

و أساسها $-i$. إذن :

$$S_2 = 1 \times \frac{1 - (-i)^{2009}}{1 - (-i)} = \frac{1 - (-i)\,(-i)^{2008}}{1 + i}$$

$$S_1 = \frac{1 + i\left[(-i)^2\right]^{1004}}{1 - i} = \frac{1 + i\,(-1)^{1004}}{1 + i} = \frac{1 + i}{1 + i} = 1$$

التمرين 7 .

التمثيل الهندسي :

$$|Z_D| = 2 \ ؛ \ |Z_D| = |Z_A|\,|Z_B| \ ؛ \ Z_D = Z_{A'}\,Z_B$$

$$\arg(Z_D) = agr(Z_A) + \arg(Z_B)$$

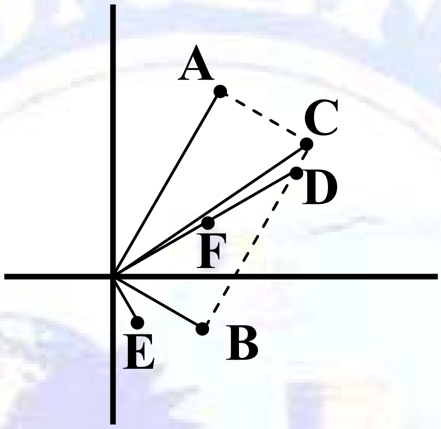
$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

لدينا : $\arg\left(\frac{1}{Z_A}\right) = -\arg(Z_A) + 2k\pi$

و منه: $\arg(Z_E) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و $|Z_E| = \left|\frac{1}{Z_A}\right| = \frac{1}{|Z_A|} = \frac{1}{2}$

لدينا: $\arg\left(\frac{1}{Z_B}\right) = -\arg(Z_B) + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$ و منه :

$$|Z_F| = \left|\frac{1}{Z_B}\right| = \frac{1}{|Z_B|} = \frac{1}{1} = 1 \quad و \quad \arg(Z_F) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$



التمرين 8 .

تعيين الطويلة و العمدة :

- $|Z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

ومنه: $\theta_1 = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

أي : $\theta_1 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$

- $|Z_2| = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36} = 6$

$$k \in \mathbb{Z} \ ; \quad \theta_2 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \ : \text{ومنه} \quad \begin{cases} cos\theta_2 = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- $|Z_1 \,.\, Z_2| = |Z_1| \,.\, |Z_2| = 2\sqrt{2} \times 6 = 12\sqrt{2}$

$$\arg\left(Z_1 \,.\, Z_2\right) = \arg\left(Z_1\right) + \arg\left(Z_2\right) + 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{15\pi - 2\pi}{12} + 2k$$

$$= \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$$

- $|Z_1^2| = |Z_1|^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$

$$\arg\left(Z_1^2\right) = 2\arg\left(Z_1\right) = 2 \times \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$= \frac{5\pi}{2} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

- $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg\left(Z_1\right) - \arg\left(Z_2\right) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

- $\left|Z_2^4\right| = \left|Z_2\right|^4 = (6)^4 = 1296$

$$\arg\left(Z_2^4\right) = 4\arg\left(Z_2\right)+2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$= 4\left(\frac{-\pi}{6}\right) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

- $\left|\frac{1}{Z_1}\right| = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\arg\left(\frac{1}{Z_1}\right) = -\arg\left(Z_1\right) + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$= -\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$$

التمرين 9 .

1) حساب $\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^{2010}$

نفرض θ عمدة $1 - \sqrt{3}i$

$\left|1 - \sqrt{3}i\right| = 2$, $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$

ومنه: $1 - \sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]$

وعليه :

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{2010} = \left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]^{2010}$$

$$= \cos\left(\frac{-2010\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2010\pi}{3}\right)$$

$$= \cos(-670\pi) + i\sin(-670\pi) = 1$$

- حساب : $(1+i)^{1962}$

$$(1+i)^{1962} = \left[(1+i)^2\right]^{981} = (2i)^{981} = (2)^{981} \cdot (i)^{981}$$

$$= 2^{981} \cdot i \cdot i^{980} = 2^{981} \cdot i \cdot (i^2)^{490}$$

$$= 2^{981} \cdot i \cdot (-1)^{490} = i \cdot (2)^{981}$$

حساب : $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1418}$

- $$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1418} = \left[\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right]^{709} = \left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}\right]$$

$$= \left(\frac{2i}{-2i}\right)^{709} = (-1)^{709} = -1$$

التمرين 10 .

الشكل الأسي :

- $|Z_1| = \sqrt{2}$, $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

إذن : $\theta_1 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$ وعليه : $Z_1 = \sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$

- $|Z_2| = 2 \quad , \quad \begin{cases} cos\theta_2 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ومنه : $\theta_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$ ؛ $Z_2 = 2\ e^{4i\frac{\pi}{3}}$

- $|Z_3| = 8\sqrt{2} \quad , \quad \begin{cases} cos\theta_3 = \frac{-4\sqrt{6}}{8\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_{12} = \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \end{cases}$

ومنه $\theta_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$ ؛ $Z_3 = 8\sqrt{2}\ e^{5i\frac{\pi}{6}}$

- $Z_1\ .\ Z_2 = 2\sqrt{2}\ e^{i\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{13\pi}{12}}$
- $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{i\left(\frac{-\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{i\left(\frac{-19\pi}{12}\right)}$
- $Z_3^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^3\ e^{i\left(3\times\frac{5\pi}{6}\right)} = 1024\sqrt{2}e$
- $Z_1Z_2Z_3 = \left(\sqrt{2}\right)\ (2)\ \left(8\sqrt{2}\right)\ e^{i\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)} = 32\ .\ e^{i\frac{23\pi}{12}}$

التمرين 11 .

لدينا : $\begin{cases} \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \end{cases}$

وبالجمع نجد : $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

ومنه : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ وبالطرح نجد : $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

ومنه : $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

التمرين 12 .

1) في حالة الانسحاب T : $Z' = Z + \dfrac{1}{2}i$

2) في حالة التحاكي H : $Z' = kZ$

و بما أن : $T(A) = B$ فإن : $2 + 2i = k(i + 1)$

ومنه : $k = \dfrac{2 + 2i}{i + 1}$ وعليه : $k = \dfrac{2(i + 1)}{i + 1}$ إذن : $k = 1$

و بالتالي : $Z' = 2Z$

3) في حالة الدوران R : $Z' = aZ + b$

ولدينا : $a = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}$ وعليه : $a = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

لاحقة المركز هي : $\dfrac{b}{1 - a}$ ومنه : $\dfrac{b}{1 - a} = \sqrt{3} + i$

ومنه : $b = (-\sqrt{3} + i)\, a$

إذن : $b = \left(-\sqrt{3} + i\right)\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$

$$b = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = 1 - i\sqrt{3}$$

وبالتالي : $Z' \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) Z + 1 - i\sqrt{3}$

التمرين 13 .

1- تعيين الجذرين التربيعيين :

• $3 - 4i$ نفرض $\delta = x + iy$ جذر تربيعي للعدد $3 - 4i$

يكون : $\delta^2 = 3 - 4i$ ومنه : $(x + iy)^2 = 3 - 4i$

أي أن : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$

و لدينا من العلامة $\delta^2 = 3 - 4i$: $|\delta^2| = |3 - 4i|$

إذن $|\delta|^2 = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$ أي أن : $x^2 + y^2 = 5$

ومنه : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \ldots (1) \\ xy = -2 \ldots (2) \\ x^2 + y^2 = 5 \ldots (3) \end{cases}$

بجمع (1) و (3) نجد : $2x^2 = 8$ ومنه $x^2 = 4$

إذن : $x = 2$ أو $x = -1$ و بالتعويض في (2) نجد:

لما $x = 2$: $y = -1$ ولما $x = -2$: $y = 1$

ومنه $\delta_1 = 2 - i$ و $\delta_2 = -2 + i$

هما الجذرين التربيعيين للعدد $3 - 4i$.

• $3 + 4i$

ليكن δ جذر تربيعي للعدد $3 + 4i$ أي $\delta^2 = 3 + 4i$

نضع $\delta = \alpha + i\beta$ ومنه $(\alpha + i\beta)^2 = 3 + 4i$

وعليه : $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ 2\alpha\beta = 4 \end{cases}$

و من العلاقة $\delta^2 = 3 + 4i$ لدينا : $|\delta^2| = 3 + 4i$

وعليه : $|\delta|^2 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$ ومنه : $\alpha^2 + \beta^2 = 5$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \ldots (1) \\ \alpha \beta = 2 \ldots (2) \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \ldots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) نجد : $2\alpha^2 = 8$ ومنه $\alpha^2 = 4$

إذن : $\alpha = 2$ أو $\alpha = -2$ و بالتعويض في (2) نجد:

لما $\alpha = 2$: $\beta = 1$ و لما $\alpha = -2$: $\beta = -1$

إذن : $\delta_1 = 2 + i$ و $\delta_2 = 2 + i$

هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب 3 + 4i

2- حل المعادلة : $Z^2 - 6Z + 25 = 0$

$\Delta' = (-3)^2 - 25(1)$ ومنه $\Delta' = -16$ أي $\Delta' = 16i^2$

إذن الجذريين التربيعيين هما : 4i و -4i

ومنه للمعادلة حلين : $Z_1 = 3 - 4i$ و $Z_2 = 3 + 4i$

3- استنتاج حلول المعادلة : $Z^4 - 6Z^2 + 25 = 0$

بوضع $Z^2 = T$ نجد : $T^2 - 6T + 25 = 0$

ولها حلين $T_1 = 3 - 4i$ و $T_2 = 3 - 4i$

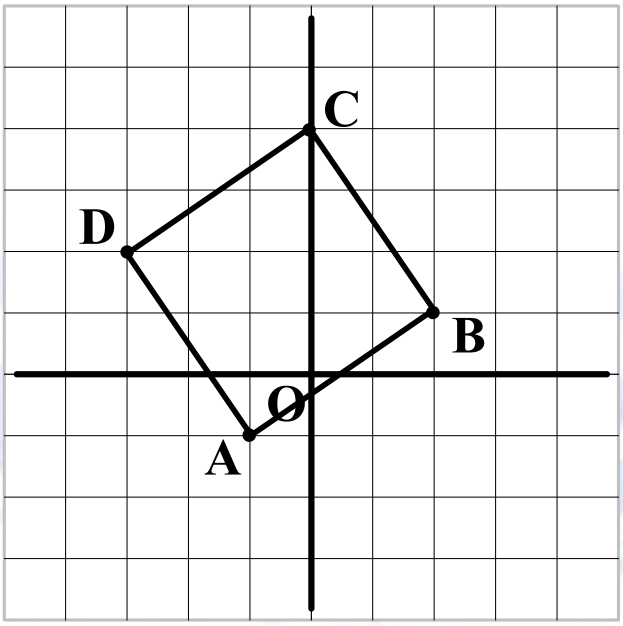
ومنه : $Z^2 = 3 - 4i$ أو $Z^2 = 3 + 4i$

إذن : $Z = 2 - i$ أو $Z = -2 + i$ أو $Z = -2 - i$

$$S = \{2 - i , -2 + i , 2 + i , -2 - i\}$$

التمرين 14 .

1- تمثيل النقط :



2- كتابة Z على الشكل المثلثي.

$$Z = \frac{-1 - i - 2 - i}{4i - 2 - i} = \frac{-3 - 2i}{-2 + 3i} \times \frac{-2 - 3i}{-2+3\,i}$$

$$Z = \frac{6 + 9i + 4i - 6}{4 + 9} = i$$

ومنه $|Z| = 1$, $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}$

وبما أن : $|Z| = \frac{BA}{BC}$ و $\arg(Z) = \left(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}\right)$

فإن : $\frac{BA}{BC} = 1$ و $\left(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2}$

إذن : $BC = BA$ و $\left(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ABC قائم في B و متساوي الساقين .

3- يكون الرباعي ABCD مربع إذا وافق إذا كان .

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ ومنه : $Z_{\overrightarrow{BC}} = Z_{\overrightarrow{AD}}$

ومنه : $Z_C - Z_B = Z_D - Z_A$

إذن : $4i - 2 - i = Z_D + 1 + i$ إذن : $Z_D = 2i - 3$

التمرين 15 .

1- نبين أن $|Z_1| = 2 \cdot \frac{AM}{BM}$

$$Z_1 = \frac{1 - 2Z}{iZ + 1} = \frac{-2\left(Z - \frac{1}{2}\right)}{i\left(Z + \frac{1}{i}\right)} = \frac{-2}{i} \frac{Z - \frac{1}{2}}{Z - i}$$

$$Z_1 = 2i \frac{Z - \frac{1}{2}}{Z - i}$$

$$|Z_1| = |2i| \cdot \left|\frac{Z - \frac{1}{2}}{Z - i}\right| = 2 \cdot \frac{\left|Z - \frac{1}{2}\right|}{|Z - i|} = 2 \cdot \frac{AM}{BM}$$

استنتاج (E) :

$|Z_1| = 2$ معناه : $\frac{AM}{BM} = 1$ ومنه : $AM = BM$

ومنه M نقطة من محور $[AB]$. إذن E هو محور $[AB]$

2- يكون Z_1 حقيقي إذا وفقط إذا كان : $Z_1 = \bar{Z}_1$

وعليه : $\frac{1 - 2\bar{Z}}{-i\bar{Z} + 1} = \frac{1 - 2Z}{iZ + 1}$ وبالتالي :

$$(1 - 2Z)(-i\bar{Z} + 1) = (iZ + 1)(1 - 2\bar{Z})$$

$$-i\bar{Z} + 1 + 2i Z\bar{Z} - 2Z = iZ - 2i Z\bar{Z} + 1 - 2\bar{Z}$$

$$-i\bar{Z} + 2i \bar{Z}Z - 2Z - iZ + 2i ZZ + 2\bar{Z} = 0$$

$$-i(Z + \bar{Z}) - 2(Z - \bar{Z}) + 4i Z\bar{Z} = 0$$

$$-i\,(2x) - 2\,(2iy) + 4i\,(x^2 + y^2) = 0$$

$$2i\left(-x - 2y + 2\left(x^2 + y^2\right)\right) = 0$$

إذن : $2\left(x^2 + y\right) - x - 2y = 0$

وعليه : $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x - y = 0$

ومنه : $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$

إذن : $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$

و لدينا $Z \neq i$ ومنه $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,1)$

إذن مجموعة النقط F هي دائرة مركزها $W\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{4}$

التمرين 16 .

تعيين مجموعة النقط :

1) مجموعة النقط هي دائرة مركزها W_1 ذو اللاحقة 1 ونصف قطرها 2

2) مجموعة النقط هي دائرة مركزها W_2 ذو اللاحقة i ونصف قطرها 4

3) مجموعة النقط هي نصف مستقيم مبدأه النقطة I ذات

اللاحقة $-1 + i$ و لاحقة شعاع توجيهه $e^{i\frac{\pi}{6}}$

التمرين 17 .

- حل الجملة

$$\begin{cases} iZ + (2i - 1)\,Z' = 4 \;.\;.\;.\;(1) \\ -iZ + 3i\,Z' =- i \;.\;.\;.\;(2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد : $(5i - 1)\,Z' = 4 - i$

ومنه $Z' = \dfrac{4 - i}{5i - 1}$ أي أن : $Z' = \dfrac{(4 - i)(5i + 1)}{(5i - 1)(5i + 1)}$

وعليه : $Z' = \dfrac{9}{26} + \dfrac{19}{26}i$

بالتعويض في (2) نجد : $-iZ + 3i\left(\dfrac{9 + 19i}{26}\right) = -i$

و منه : $-iZ = -i - \dfrac{27i - 57}{26} = \dfrac{-53i - 57}{26}$

و عليه : $Z = \dfrac{-53i - 57}{-26i} \times \dfrac{i}{i}$ أي: $Z = \dfrac{53}{26} - \dfrac{57}{26}i$

إذن : $S = \left\{\left(\dfrac{59}{26} - \dfrac{57}{26}i \; ; \; \dfrac{9}{26} + \dfrac{19}{26}i\right)\right\}$

- حل الجملة : $\begin{cases} iZ + i\overline{Z'} = 3 & \text{-2} \times \\ 2iZ - \overline{Z'} = 1 + i \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} -2i\,Z - 2i\,\overline{Z'} = -6 \\ 2iZ - \overline{Z'} = 1 + i \end{cases}$

بالجمع نجد : $-(2i + 1)\,\overline{Z'} = -5 + i$

إذن : $\overline{Z'} = \dfrac{-5 + i}{-2i - 1} \times \dfrac{-2i + 1}{-2i + 1} = \dfrac{10i - 5 + 2 + i}{5}$

و منه : $\overline{Z'} = \dfrac{-3}{5} + \dfrac{11}{5}i$ إذن : $Z' = \dfrac{-3}{5} - \dfrac{11}{5}i$

لدينا : $i \times \begin{cases} iZ + i\overline{Z'} = 3 \\ 2iZ - \overline{Z'} = 1 + i \end{cases}$ أي: $\begin{cases} iZ + i\overline{Z'} = 3 \\ -2Z - i\overline{Z'} = i - 1 \end{cases}$

بالجمع نجد : $(i - 2)\,Z = i + 2$ و منه :

$$Z = \frac{i+2}{i-2} \times \frac{i+2}{i+2} = \frac{+3+4i}{-5} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

إذن : $S = \left\{\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \; ; \; -\frac{3}{5} - \frac{11}{5}i\right)\right\}$

التمرين 18 .

حل المعادلة :

$$\Delta' = (1 - \cos\theta)^2 - 2 + 2\cos\theta$$

$$\Delta = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta - 2 + 2\cos\theta$$

$$\Delta' = -1 + \cos^2\theta$$

$$\Delta' = -\sin^2\theta = i^2 \sin^2\theta$$

ومنه جذري Δ هما $i\sin\theta$ أو $-i\sin\theta$

للمعادلة حلين :

$Z_2 = -1 + \cos\theta + i\sin\theta$ و $Z_1 = -1 + \cos\theta - i\sin\theta$

كتابة الحلول على الشكل المثلثي :

$$Z_1 = -1 + \cos\theta - i\sin\theta$$

$$Z_1 = -1 + 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} - i \times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$Z_1 = -2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2} \, . \, \cos\frac{\theta}{2}$$

$$Z_1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left[-\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$Z_1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right]$$

$$Z_1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} - \pi\right) + i\sin\left(\frac{-\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

بما أن $0 \leq \theta \leq \pi$ فإن $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ ومنه $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

وعليه : Z_1 مكتوب على الشكل المثلثي.

$$Z_2 = -1 + \cos\theta + i\sin\theta$$

$$Z_2 = -1 + 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$Z_2 = -2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\ \frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2} . \cos\frac{\theta}{2}$$

$$Z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left[-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$Z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin\left(\frac{-\theta}{2}\right) + i\cos\left(\frac{-\theta}{2}\right)\right]$$

$$Z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

و هو الشكل المثلثي للعدد Z_2 .

التمرين 19 .

1) نبين أن المعادلة (1) تقبل حل حقيقي $Z_0 = 8$

$$8^3 - 12(8)^2 + 48(8) - 128 = 0$$

$$512 - 768 + 384 - 128 = 896 - 896 = 0$$

ومنه 8 حل لهذه المعادلة.

2) حل المعادلة (1) :

المعادلة (1) تكافئ : $(Z - 8)(aZ^2 + bZ + c) = 0$

أي : $aZ^3 + bZ^2 + cZ - 8aZ^2 - 2bZ - 8c = 0$

وعليه : $aZ^3 - (-b + 8a)Z^2 + (c - 8b)Z - 8c = 0$

إذن : $\begin{cases} a = 1 \\ -b + 8a = +12 \\ c - 8b = 48 \\ -8c = -128 \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 16 \end{cases}$

ومنه المعادلة (1) تكافئ : $(Z - 8)(Z^2 - 4Z + 16) = 0$

وهذا يكافئ : $Z - 8 = 0$ أو $Z^2 - 4Z + 16 = 0$

إذن : $Z = 8$ أو $Z^2 - 4Z + 16 = 0$

نجد المعادلة $Z^2 - 4Z + 16 = 0$

$\Delta' = 4 - 16 = -12$ ومنه : $\Delta' = 12i^2$

جذري Δ' هما $i\sqrt{12}$ أو $-i\sqrt{12}$

للمعادلة حلين : $Z_1 = 2 + i\sqrt{12}$ و $Z_2 = 2 - i\sqrt{12}$

$Z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ و $Z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$

- كتابة Z_1 على الشكل المثلثي :

لدينا : $|Z_1| = 4$ و $\begin{cases} cos\theta_1 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ومنه : $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$$Z_1 = 4\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$$

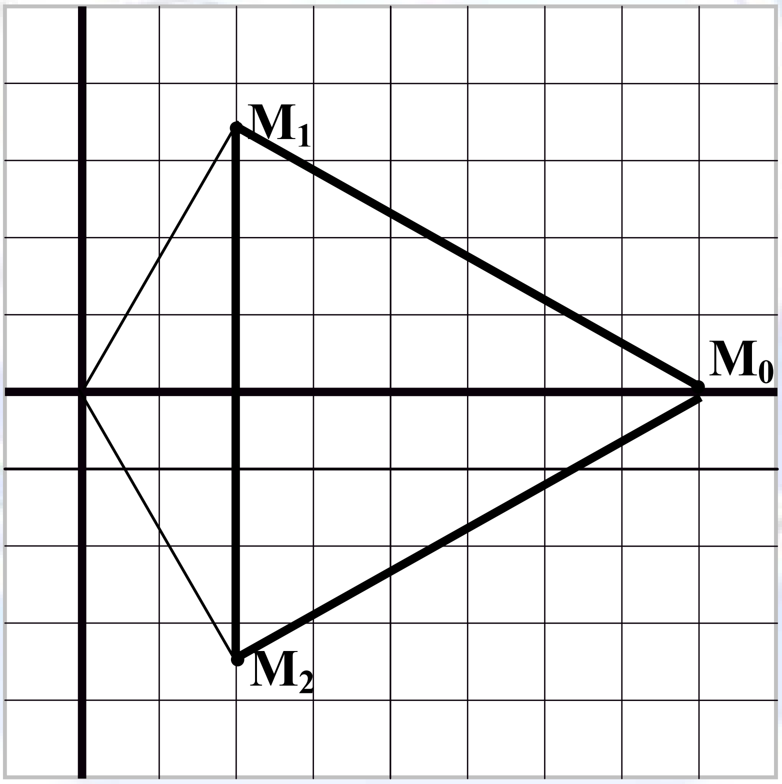
- كتابة Z_2 على الشكل المثلثي :

لدينا : $|Z_2| = 4$ و $\begin{cases} cos\theta_2 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

ومنه : $\theta_2 = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$$Z_2 = 4\left[\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]$$

- التمثيل في المستوى المركب



4- حساب طويلة و عمدة Z_3 :

$$Z_3 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_1 - Z_0} = \frac{2 - 2i\sqrt{3} - 8}{2 + 2i\sqrt{3} - 8} = \frac{-6 - 2i\sqrt{3}}{-6 \ \ 2i\sqrt{3}}$$

$$Z_3 = \frac{\left(-6 - 2i\sqrt{3}\right)\left(-6 - 2\sqrt{3}\right)}{\left(-6 + 2i\sqrt{3}\right)\left(-6 - 2i\sqrt{3}\right)}$$

$$Z_3 = \frac{36 + 12i\sqrt{3} + 12i\sqrt{3} - 12}{36 + 12}$$

و منه : $Z_3 = \frac{24 + 24i\sqrt{3}}{48} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$

إذن : $|Z_3| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$$\arg(Z_3) = \theta \quad : \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ومنه : $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

طبيعة المثلث $M_0\ M_1\ M_2$:

$|Z| = \frac{M_0\ M_2}{M_0\ M_1} = 1$ ومنه : $M_0\ M_2 = M_0\ M_1$

$$\arg Z_1 = \left(\overrightarrow{M_0M_1}\ ;\ \overrightarrow{M_0M_2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

وعليه المثلث $M_0\ M_1\ M_2$ متقايس الأضلاع.

التمرين 20 .

نكتب Z_1 على الشكل الجبري. نفرض $Z = x + iy$

$$Z_1 = \frac{i(x+iy)+1-i}{x+iy-2+i} = \frac{1-y+i(x-1)}{x-2+i(y+1)}$$

$$Z_1 = \frac{1-y+i(x-1)}{x-2+i(y+1)} \times \frac{x-2-(y+1)}{x-2-i(y+1)}$$

$$Z_1 = \frac{(1-y)(x-2)-i(y+1)(1-y)+i(x-1)(x-2)+(x-1)(y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

$$Z_1 = \frac{x-2-xy+2y-i(1-y^2)+i(x^2-3x+2)+xy+x-y-1}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

$$Z_1 = \frac{2x+y-3+i(-1+y^2+x^2-3x+2)}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

$$Z_1 = \frac{2x+y-3}{(x-2)^2+(y+1)^2} + i\,\frac{x^2+y^2-3x+1}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

1- تعيين مجموعة النقط M بحيث تكون Z_1 حقيقي سالب :

Z_1 حقيقي سالب يكافئ :

$$\begin{cases} x^2+y^2-3x+1=0 \\ \text{و} \\ 2x+y-3<0 \\ \text{و} \\ (x\,;\,y) \neq (2\,;\,-1) \end{cases}$$

- $x^2+y^2-3x+=0$ أي: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+y^2+1=0$

ومنه : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{5}{4}$

(الشكل)

دائرة مركزها $W\left(\frac{3}{2} ; 0\right)$ و $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

- حل المتراجحة $2x + y - 3 < 0$

نرسم المستقيم (Δ) الذي معادلته : $2x + y - 3 = 0$

x	0	3
y	3	-3

هل (0 ; 0) حل للمتراجحة : $2(0) + 0 - 3 < 0$ أي : $-3 < 0$

محققة ومنه (0 ; 0) حل للمتراجحة .

وعليه مجموعة الحلول هي نصف المستوى المفتوح المحدد بالمستقيم (Δ) و يشمل O . ومنه مجموعة النقط بحيث يكون Z_1 حقيقي سالب هي القوس من الدائرة السابقة الواقع تحت المستقيم (Δ) .

2) تعيين مجموعة النقط بحيث يكون $\frac{\pi}{2}$ عمدة لـ Z_1 :

وهذا يكافئ : $Re\,(Z_1) = 0$ ومنه : $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ (x ; y) \neq (2 ; -1) \end{cases}$

إذن مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) السابقة باستثناء النقطة A (2 ; -1) .

3- تعيين مجموعة النقط بحيث تكون $|Z_1| = \sqrt{2}$.

$$Z_1 = \frac{iZ + 1 - i}{Z - 2 + i} = \frac{1 - y + i\,(x - 1)}{x - 2 + i\,(y - 1)}$$

$$|Z_1| = \frac{|1 - y + i\,(x - 1)|}{|x - 2 + i\,(y - 1)|} = \frac{\sqrt{(1 - y)^2 + (x - 1)^2}}{\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}}$$

وعليه : $\dfrac{\sqrt{(1-y)^2+(x-1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}=\sqrt{2}$

و بتربيع الطرفي نجد : $\dfrac{(1-y)^2+(x-1)^2}{(x-2)^2+(y-1)^2}=2$

إذن : $(1-y)^2+(x-1)^2=2\left[(x-2)^2+(y-1)^2\right]$

وعليه :

$$1-2y+y^2+x^2-2x+1=2x^2-8x+8+2y^2-4y+2$$

$$1-2y+y^2+x^2-2x+1-2x^2+8x-8-2y^2+4y-2=0$$

$$-x^2-y^2+6x+2y-8=0$$

$$(x-3)^2-9+(y-1)^2-1+8=0$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=2$$

وعليه مجموعة النقط هي دائرة (C) مركزها B(3 ; 1) ونصف قطرها $\sqrt{2}$

4- تعيين مجموعة النقط M بحيث تكون عمدة Z_1 مساوية إلى $\dfrac{\pi}{4}$.

و هذا يكافئ IM (Z) Re (Z) .

ومنه : $\dfrac{2x+y-3}{(x-2)^2+(y+1)^2}=\dfrac{x^2+y^2-3x+1}{(x-2)^2+(y+1)^2}$

وبالتالي : $\begin{cases} x^2+y^2-3x+1=2x+y-3 \\ (x\,;\,y)\neq(2\,;\,-1) \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} x^2+y^2-5x=-4 \\ (x\,;\,y)\neq(2\,;\,-1) \end{cases}$ وعليه : $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}+y^2=-4$

أي : $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ إذن مجموعة النقط هي دائرة مركزها $C\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$ ونصف قطرها $\frac{3}{2}$.

التمرين 21 .

تعيين طويلة و عمدة Z :

$$Z = 1 - \cos\theta + i\sin\theta$$

$$Z = 1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$Z = +2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$Z_1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

بما أن : $-\pi < \theta \leq \pi$ فإن : $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$

ومنه في المجال $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ يكون $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

و بالتالي : $Z_1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right]$

إذن : $|Z_1| = 2\sin\frac{\theta}{2}$ و $\arg(Z_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

في المجال $\left]\frac{-\pi}{2} ; 0\right[$: $\sin\frac{\theta}{2} < 0$ أي : $-\sin\frac{\theta}{2} > 0$

وعليه : $Z_1 = -\sin\frac{\theta}{2}\left[-\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right]$

$$Z_1 = -\sin\frac{\theta}{2}\left[-cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$Z_1 = -\sin\frac{\theta}{2}\left[cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$Z_1 = -\sin\frac{\theta}{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

ومنه : $|Z_1| = -\sin\frac{\theta}{2}$ و $\arg(Z_1) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

التمرين 22 .

نفرض Z_1 , Z_2 , Z_3 هذه الأعداد المركبة و ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 و طويلتها على الترتيب و θ_1 , θ_2 , θ_3 عمدتها على الترتيب فيكون : $Z_1 \,.\, Z_2 \,.\, Z_3 = -27i$ ومنه :

$$|Z_1 \,.\, Z_2 \,.\, Z_3| = 27$$

أي : $|Z_1| \,.\, |Z_2| \,.\, |Z_3| = 27$ إذن : $\ell_1 \,.\, \ell_2 \,.\, \ell_3 = 27$.

لكن ℓ_2 وسط هندسي للعددين ℓ_1 و ℓ_3 ومنه : $\ell_2^2 = \ell_1 \,.\, \ell_3$

ومنه : $\ell_2^3 = 27$ أي أن : $\ell_2 = 3$ وعليه : $\ell_1 \,.\, \ell_3 = 9$

لكن : $\ell_3 = \ell_1 \,.\, 9$ ومنه : $9\ell_1^2 = 9$ إذن : $\ell_1^2 = 1$

ومنه : $\ell_1 = 1$ و بالتالي : $\ell_3 = 9$

وكذلك : $\arg(Z_1 \,.\, Z_2 \,.\, Z_3) = \arg(-27i)$

$$\arg(Z_1) + \arg(Z_2) + \arg(Z_3) = \frac{3\pi}{2}$$

$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{3\pi}{2}$ لكن θ_2 وسط حسابي للعددين θ_1 و θ_3

أي أن : $2\theta_2 = \theta_1 + \theta_3$ ومنه: $3\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ إذن : $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

لكن : $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{3}$ أي $\theta_1 = \theta_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$

أي أن : $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ ومنه : $\theta_3 = \theta_2 + \frac{\pi}{3}$ أي : $\theta_3 = \frac{5\pi}{6}$.

وبالتالي : $Z_1 = cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}$ وعليه : $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

ومنه : $Z_2 = 3\left[\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right]$ وعليه : $Z_2 = 3i$

$Z_3 = 9\left[\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right]$ وعليه : $Z_3 = -9\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{9}{2}i$

التمرين 23 .

I) 1) نبين أن B نقطة من (C) :

$$AB = \left|Z_B - Z_A\right| = \left|1 - e^{i\frac{\pi}{3}} - 1\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$$

ومنه : $B \in (C)$.

2) تعيين قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{AF} ; \overrightarrow{AB}\right)$:

$$\left(\overrightarrow{AF} ; \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AF} , \vec{u}\right) + \left(\vec{U} , \overrightarrow{AB}\right) + 2k\pi \;\; ; \;\; k \infty \mathbb{Z}$$

$$= -\left(\vec{U} ; \overrightarrow{AF}\right) + \left(\vec{U} , \overrightarrow{AB}\right) + 2k\pi$$

$$= \left(\vec{U} ; \overrightarrow{AB}\right) - \left(\vec{U} ; \overrightarrow{AF}\right) + 2k\pi$$

$$= \arg\left(Z_{\overrightarrow{AB}}\right) - \arg\left(Z_{\overrightarrow{AF}}\right)$$

لكن : $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه : $\arg\left(Z_{\overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{3}$

$$\arg\left(Z_{\overrightarrow{AF}}\right) = 0$$: ومنه $$Z_{\overrightarrow{AF}} = Z_F - Z_A = 2 - 1 = 1 = e^{i\times 0}$$

ومنه : $\left(\overrightarrow{AF} \; ; \; \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$.

3- تعيين الشكل الأسي :

- للعدد : $Z_B - Z_A$

$$Z_B - Z_A = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$Z_E - Z_A = 1 + Z_B^2 - 1 = Z_B^2 = \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$$

$$= \left(1 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2} + i\,\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\; e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = 3\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

4- استنتاج أن النقط E , B , A على استقامة واحدة مما سبق :

$$Z_E - Z_A = 3\left(Z_B - Z_A\right)$$ ومنه : $$\overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{AB}$$

إذن : $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{AE}$ وعليه النقط E , B , A على استقامة واحدة .

II- 1) لدينا : $$\arg\left(\frac{Z' - 1}{Z - 1}\right) = \left(\overrightarrow{AM} \, , \, \overrightarrow{AM'}\right)$$

ومنه عمدة $\frac{Z' - 1}{Z - 1}$ هي الزاوية $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right)$

2) تكون النقط A وM و M' على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كانت :

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

أي : $\arg\left(\frac{Z' - 1}{Z - 1}\right) = k\pi$ وعليه : $\frac{Z' - 1}{Z - 1} \in \mathbb{R}$

ومنه : $\frac{1 + Z^2 - 1}{Z - 1} \in \mathbb{R}$ و بالتالي : $\frac{Z^2}{Z - 1} \in \mathbb{R}$

التمرين 24 .

1- حساب $\overline{f(Z)}$ بدلالة $\overline{Z}$:

$$\overline{f(Z)} = \overline{Z}^2 - (2 + 3i)\ \overline{Z}^2 + 9\overline{Z} - 18 - 27i$$

2- حل المعادلة $f(Z) = 0$:

لدينا : $f(Z_1) = 0$ و $f(\overline{Z}_1) = 0$.

حيث : $f(Z_1) = 0$ تكافئ : $\overline{f(Z_1)} = 0$

ومنه : $\overline{Z}_1^3 - (2 + 3i)\ \overline{Z}_1^2 + 9\overline{Z}_1 - 18 - 27i = 0 \ . . . \ (1)$

$f(\overline{Z}_1) = 0$ تكافئ :

$$\overline{Z}_1^3 - (2 - 3i)\ \overline{Z}_1^2 + 9Z_1 - 18 + 27i = 0 \ . . . \ (2)$$

بطرح (2) من (1) نجد : $(-2 - 3i + 2 - 3i)\ \overline{Z}_1^2 - 54i = 0$

ومنه : $-6i\overline{Z}_1^2 - 54i = 0$ إذن : $\overline{Z}_1^2 = -9$ أي : $\overline{Z}_1^2 = 9i^2$

ومنه : $\overline{Z}_1 = 3i$ أو $\overline{Z}_1 = -3i$

وعليه : $f(Z) = (Z - 3i)\ (Z + 3i)\ (aZ + b)$

$$f(Z) = (Z^2 + 9)(aZ + b)$$
$$f(Z) = aZ^3 + bZ^2 + 9aZ + 9b$$

ومنه : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 + 3i \end{cases}$

وعليه : $f(Z) = (Z - 3i)(Z + 3i)(Z - 2 + 3i)$

وهي تكافئ : $Z - 3i = 0$ أو $Z + 3i = 0$ أو $Z - 2 + 3i = 0$

ومنه : $Z = 3i$ أو $Z = -3i$ أو $Z = 2 - 3i$

إذن : $S = \{3i , -3i , 2 - 3i\}$

3) حساب Z' : $Z' = \dfrac{3i + 3i}{2 - 3i + 3i} = 3i$

ومنه : $\arg(Z') = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \;,\; |Z'| = 3 \;;\; k \in \mathbb{Z}$

طبيعة المثلث ABC قائم في B و غير متساوي الساقين.

1) تعيين مجموعة النقط : $AM^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = 25$

نفرض لاحقة النقطة M هي Z .

فيكون :

$$|Z - 3i|^2 + 2|Z + 3i|^2 - 2|Z - 2 + 3i|^2 = 25$$
$$x^2 + (y - 3)^2 + 2\left[x^2 + (y + 3)^2\right] - 2\left[(x - 2)^2 + (y + 3)^2\right] = 25$$
$$x^2 + 2x^2 - 2(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 2(y + 3)^2 - 2(y + 3)^2 = 25$$
$$x^2 + 2x^2 - 2x^2 + 8x - 8 + y^2 - 6y + 9 + 2y^2 + 12y$$
$$+ 18 - 2y^2 - 12y - 18 = 25$$

ومنه : $x^2 + 8x + y^2 - 6y = 24$

أي: $(x + 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 = 24$

أي: $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 49$

ومنه مجموعة النقط هي دائرة مركزها $w(-4 ; 3)$ ونصف قطرها 7 .

التمرين 25 .

1) حل المعادلة : $Z^2 - (1+i)Z - 4i = 0$

$\Delta = (1+i)^2 - 4(-4i)$ ومنه $\Delta = 18i$

إذن : $\Delta = 9 . 2i$ و منه : $\Delta = 9(1+i)^2 = \left[3(1+i)\right]^2$

ومنه جذري Δ هما $3 + 3i$, $-(3+3i)$ للمعادلة حلين : Z_1 , Z_2 حيث :

$$Z_1 = \frac{1 + i - 3 - 3i}{2} \quad \text{و} \quad Z_2 = \frac{1 + i + 3 + 3i}{2}$$

$$Z_1 = -1 - i \quad \text{و} \quad Z_2 = 2 + 2i$$

2) نبين أن المعادلة تقبل حلين تخيليين متعاكسين :

Z_3 , Z_4 أي : $Z_3 = yi$ و $Z_4 = -yi$

و المعادلة تكافئ :

$$(Z - yi)(Z + yi)(aZ^2 + bZ + c) = 0$$

$$(Z^2 + y^2)(aZ^2 + bZ + c) = 0$$

$$aZ^4 + bZ^3 + cZ^2 + ay^2 Z^2 + by^2 Z + cy^2 = 0$$

إذن : $aZ^4 + bZ^3 + (c + ay^2)Z^2 + by^2Z + cy^2 = 0$

وعليه : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - i \\ c + ay^2 = -9 - n \\ by^2 = -9 - 9i \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - i \\ c + y^2 = 9 - 4i \\ (-1 - i)y^2 = -9 - 9i \end{cases}$

إذن : $y^2 = \dfrac{-9(1+i)}{-(1+i)} = 9$ وعليه : $y^2 = 9$

ومنه : $y = 3$ أو $y = -3$ إذن : $C + 9 = 9 - 4i$

ومنه : $C = -4i$

و المعادلة تكافئ : $(Z - 3i)(Z + 3i)\left(Z^2 - (1 + i)Z - 4i\right) = 0$

وهي تكافئ : $Z - 3i = 0$ أو $Z + 3i = 0$ أو $Z^2 - (1 + i)Z - 4i = 0$

وعليه : $Z = 3i$ أو $Z = -3i$ أو $Z = -1 - i$ أو $Z = 2 + 2i$ (مما سبق) . إذن :

$S = \{3i\ ;\ -3i\ ;\ -1 - i\ ;\ 2 + 2i\}$.

3- تعيين مجموعة النقط :

$$\frac{Z - Z_3 - Z_4}{Z - Z_1 - Z_2} \quad \frac{Z - 3i + 3i}{Z + 1 + i - 2 - 2i} = \frac{Z}{Z - 1 - i}$$

تكون عمدة $\frac{Z}{Z - 1 - i}$ مساوية إلى $\frac{\pi}{2}$- إذا وافق إذا كان العدد المركب $\frac{Z}{Z - 1 - i}$

تخيلي صرف أي : $Z \neq 1 - i$ و $\overline{\left(\frac{Z}{Z - 1 - i}\right)} = \frac{Z}{Z - 1 - i}$ ومنه :

$\frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - 1 + i} = \frac{Z}{Z - 1 - i}$ وعليه : $Z(\bar{Z} - 1 + i) = \bar{Z}(Z - 1 - i)$

ومنه : $Z\bar{Z} - Z + iZ = Z\bar{Z} - \bar{Z} - i\bar{Z}$

ومنه : $-Z + \bar{Z} + iZ + i\bar{Z} = 0$

$-(Z - \bar{Z}) + i(Z + \bar{Z}) = 0$

وبالتالي : $-2iy + 2ix = 0$ حيث : $Z = x + iy$

وعليه : $2i(x - y) = 0$ إذن : $x - y = 0$.

وعليه مجموعة النقط M هي نقط المستقيم الذي معادلته $x - y = 0$ باستثناء النقطة A(1 ; 1) .

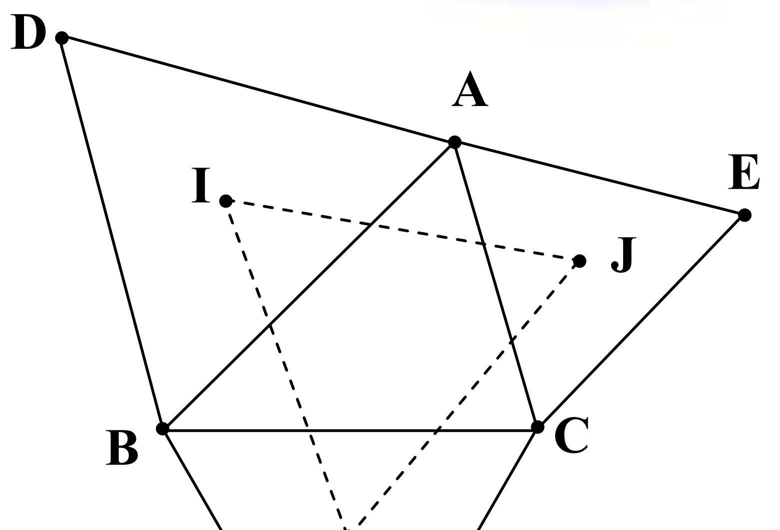
التمرين 26

نرمز بـ $R(w\ ;\ \theta)$ للدوران الذي مركزه w و زاويته θ .

و بالرمز Z_M للاحقة M .

لدينا : E صورة C

بالدوران $R\left(A\ ;\ \frac{\pi}{3}\right)$



وعليه :

$$(1) \ldots Z_E - Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_C - Z_A\right)$$

و كذلك D هي صورة A

بالدوران $R\left(B\ ;\ \frac{\pi}{3}\right)$

وعليه : $$(2) \ldots Z_D - Z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_A - Z_B\right)$$

و لدينا F هي صورة B بالدوران $R\left(C\ ;\ \frac{\pi}{3}\right)$

وعليه : $$(3) \ldots Z_F - Z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_B - Z_C\right)$$

بجمع (1) و (2) و (3) طرفا لطرف :

$$Z_E - Z_A + Z_D - Z_B + Z_F - Z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z_C - Z_A + Z_A - Z_B + Z_B - Z_C\right)$$

ومنه : $$Z_E + Z_D + Z_F - \left(Z_A + Z_B + Z_C\right) = 0$$

ومنه : $$(4) \ldots Z_E + Z_D + Z_F = Z_A + Z_B + Z_C$$

ولدينا I , J , K مراكز ثقل كل من المثلثات ABD و ACE وBCF على الترتيب و منه :

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B + Z_D}{3}\ ;\ Z_J = \frac{Z_A + Z_C + Z_E}{3}$$

ومنه : $$Z_K = \frac{Z_B + Z_C + Z_F}{3}$$

$$Z_I + Z_J + Z_K = \frac{2Z_A + 2Z_B + 2Z_C + \left(Z_D + Z_E + Z_F\right)}{3}$$

وعليه :

$$Z_I + Z_J + Z_K = \frac{2Z_A + 2Z_B + 2Z_C + \left(Z_A + Z_B + Z_C\right)}{3}$$

$$= \frac{3Z_A + 3Z_B + 3Z_C}{3}$$

$$= Z_A + Z_B + Z_C$$

ومنه : $Z_I + Z_J + Z_K = Z_A + Z_B + Z_C = Z_D + Z_E + Z_F$

إذن : $\frac{Z_I + Z_J + Z_K}{3} = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3} = \frac{Z_D + Z_E + Z_F}{3}$

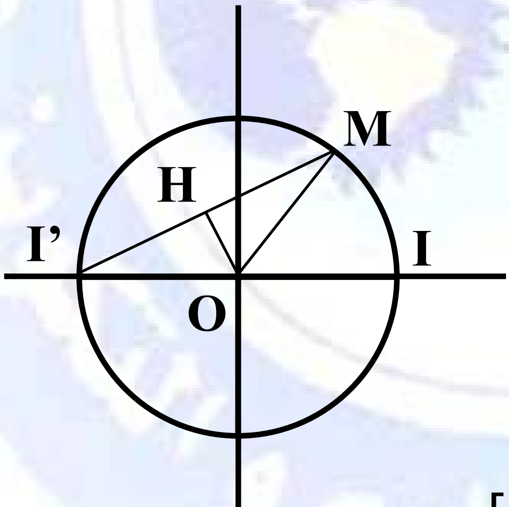
و عليه المثلثات IJK و ABC وFED لها نفس مركز الثقل.

التمرين 27 .

تعيين الطويلة و عمدة للعدد : $1 + cosx + i \sin x$

لدينا : $1 + cosx + i \sin x = 1 + e^{ix}$

نعتبر الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم المتعامد المتجانس $\left(O ; \vec{i} , \vec{j}\right)$.



لتكن النقط M' , M , I

التي لواحقها $-1 , e^{ix} , 1$

على الترتيب.

لدينا :

$$\arg\left(e^{ix} + 1\right) = \frac{x}{2} \ [2\pi]$$

حيث : $\left|e^{ix} + 1\right| = \left\|\overrightarrow{I'M}\right\|$

و لتكن H المسقط العمودي للنقطة O على $[I'M]$.

و بما أن المثلث OMI' متقايس الساقين فإن H منتصف $[I'M]$ ومنه :

$. I'M = 2I'H$

في المثلث القائم OMI' لدينا : $cos\frac{x}{2} = \frac{I'H}{I'O}$

ومنه : $I'H = cos\frac{x}{2}$ لأن : $I'O = 1$ ومنه : $I'M = 2cos\frac{x}{2}$

وعليه : $\left|e^{ix}+1\right| = 2\cos\frac{x}{2}$ و بالتالي : $\arg\left(e^{ix}+1\right) = \frac{x}{2}\ [2\pi]$

التمرين 28 .

نعلم أن α , β , γ أقياس لكل من الزوايا الموجهة :

$$\left(\overrightarrow{CE}\ ;\ \overrightarrow{CF}\right)\ ;\ \left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BF}\right)\ ;\ \left(\overrightarrow{HB}\ ;\ \overrightarrow{HF}\right)$$

نزود المستوى بالمعلم $\left(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right)$

فتكون لدينا : $2+i$, 2 , 1 , 0 , -1

لواحق النقط F , E , C , B , H على الترتيب في هذا المعلم.

لدينا : $\left(\overrightarrow{HB}\ ;\ \overrightarrow{HP}\right) = \alpha$ و عليه : $\arg\left(\frac{Z_F - Z_H}{Z_B - Z_H}\right) = \alpha$

وكذلك : $\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BF}\right) = \alpha$ وعليه : $\arg\left(\frac{Z_F - Z_B}{Z_C - Z_B}\right) = \beta$

وأيضا : $\left(\overrightarrow{CE}\ ;\ \overrightarrow{CF}\right) = \gamma$ وعليه : $\arg\left(\frac{Z_F - Z_C}{Z_E - Z_C}\right) = \gamma$

إذن : $\alpha = \arg\left(\frac{2+i+1}{0+1}\right) = \arg(3+i)$

$$\beta = \arg\left(\frac{2+i-0}{1-0}\right) = \arg(2+i)$$

$$\gamma = \arg\left(\frac{2+i-1}{2-1}\right) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

وعليه : $\gamma = \frac{\pi}{4}$

لكن : $\alpha + \beta = \arg(3+i) + \arg(2+i)$

$$= \arg\left[(3+i)(2+i)\right] = \arg\left(6+3i+2i-1\right)$$
$$= \arg(5+5i) = \arg\left[5(1+i)\right]$$
$$= \arg 5 + \arg(1+i) = 0 + \frac{\pi}{4}$$

إذن : $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ ومنه : $\alpha + \beta = \gamma$

التمرين 29 .

1) تعيين مجموعة النقط N ذات اللاحقة Z بحيث : $|Z - 3 + i| = 2$

أي : $|Z - (3 - i)| = 2$ ومنه : $\|\overrightarrow{AN}\| = 2$

إذن مجموعة النقط N هي الدائرة ذات المركز A و نصف القطر 2 .

2) تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة 2 بحيث : $\arg\left(\frac{Z - 2 - i}{Z + 4 - 2i}\right) = \frac{\pi}{2}$ أي :

$$\arg\left(\frac{Z - (2+i)}{Z - (-4+2i)}\right) = \frac{\pi}{2}$$

و عليه هذا يكافئ : $\left(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MC}\right) = \frac{\pi}{2}$

مجموعة النقط هي نصف الدائرة ذات القطر $[AB]$ المحتواة في نصف المستوى المفتوح الذي حده (AB) و يشمل المبدأ O .

التمرين 30 .

نبرهن أن $(BC) \perp (AL)$ و $AL = BC$

نعتبر الدوران R ذو المركز A و الزاوية $\frac{\pi}{2}$.

ولتكن $Z_A , Z_B , Z_C , Z_L , Z_G , Z_E$

لاحقات النقط A , B , C , L , G , F على الترتيب .

لدينا : $R(G) = B$ وعليه : $(1) \ldots Z_B - Z_A = i\left(Z_G - Z_A\right)$

و لدينا : $R(C) = E$

وعليه : $(2) \ldots Z_E - Z_A = i\left(Z_C - Z_A\right)$

ولدينا : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG} = AL$

وعليه : $(3) \ldots Z_E - Z_A + Z_G - Z_A = Z_L - Z_A$

من (1) : $Z_G - Z_A = \dfrac{Z_B - Z_A}{i}$ ومنه : $Z_G - Z_A = i\left(Z_B - Z_A\right)$

نعوض كل من $Z_G - Z_A$ و $Z_E - Z_A$ في (3) بقيمتيهما

فنجد : $i\left(Z_C - Z_A\right) - i\left(Z_B - Z_A\right) = Z_L - Z_A$

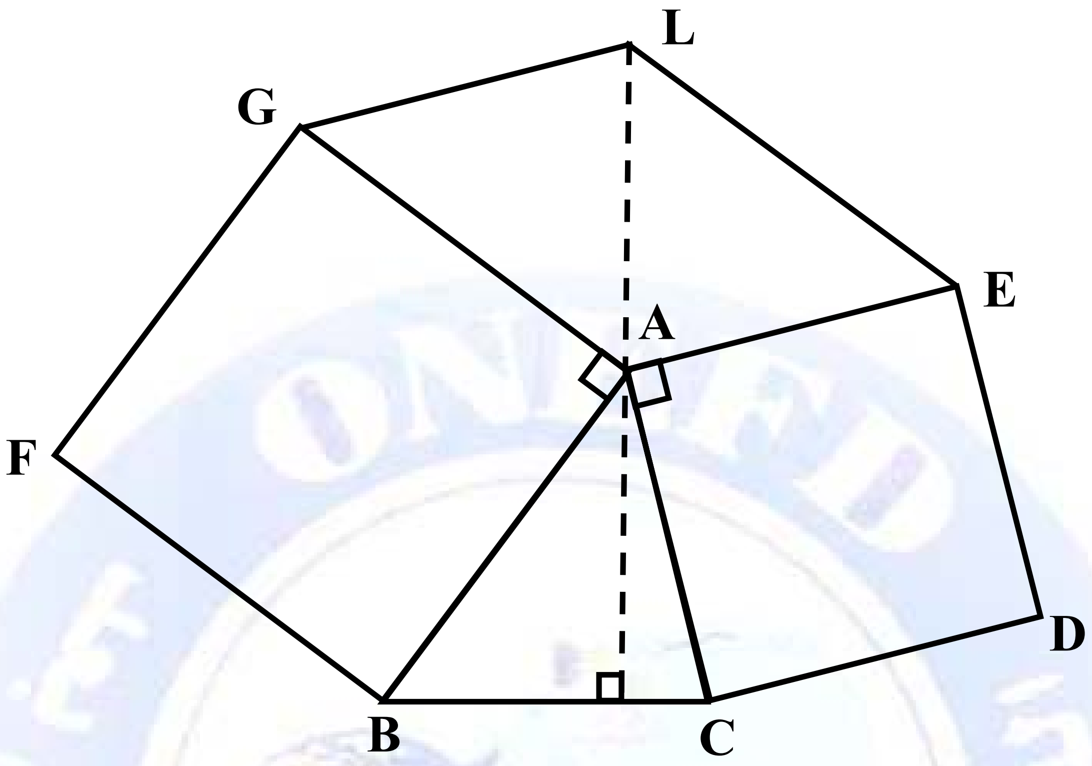
إذن : $Z_L - Z_A = \left(Z_C - Z_B\right)$ أي : $Z_A - Z_L = i\left(Z_B - Z_C\right)$

وعليه : $\dfrac{Z_A - Z_L}{Z_B - Z_C} = i$ حيث : $\left|\dfrac{Z_A - Z_L}{Z_B - Z_C}\right| = 1$

و $\arg\left(\dfrac{Z_A - Z_L}{Z_B - Z_C}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

إذن : $\dfrac{LA}{BC} = 1$ و $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AL}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

ومنه : $LA = CB$ و $(BC) \perp (AL)$


L
G
E
A
F
D
B
C