5 - الدالة اللوغارتمية

الكفاءة المستهدفة

1 - حل مشكلات بتوظيف اللوغاريتم.

2 - معرفة وتفسير نهايات الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

3- إنشاء بيانات دوال لوغاريتمية .

تصميم الدرس

أنشطة

I - الدالة اللوغاريتمية النيبرية

II– الدالة اللوغاريتمية العشرية

تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

تمـارين و مشكلات

الحـلـــــــول

أنشطة

النشاط :

1- أنشئ في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ التمثيل البياني (c) للدالة f :

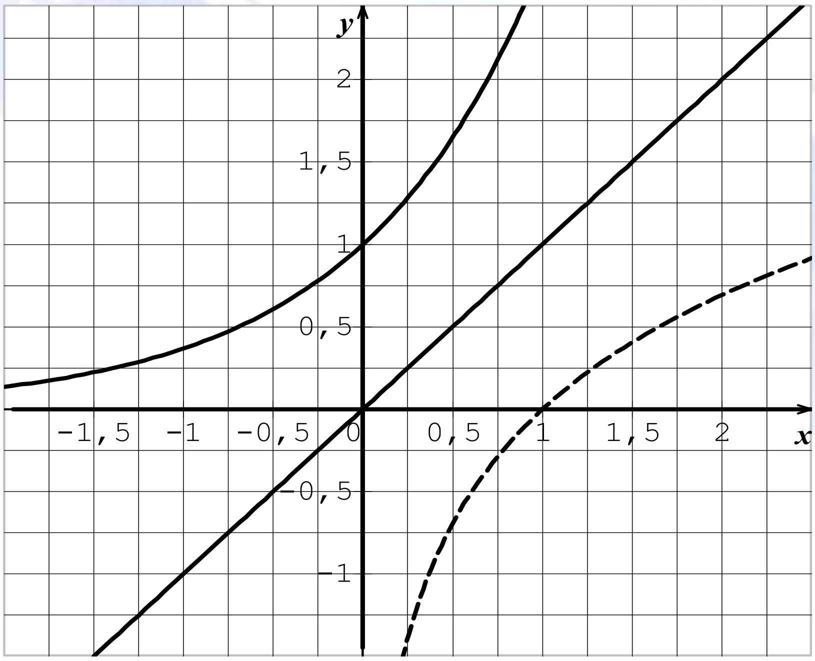
$x \mapsto e^x$

2- أرسم المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

3- أنشئ التمثيل البياني (Γ) صورة (c) بالتناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4- لتكن g الدالة التي تمثيلها البياني (Γ).

- ما هي مجموعة تعريف الدالة g . - ما هي صورة 1 بالدالة g .
- ادرس إشارة الدالة g بيانيا .
- ما هو تخمينك حول : $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$
- ما هي صورة العدد e بالدالة g



الحل :

1- إنشاء (c)

2- إنشاء (Δ)

3- إنشاء (r)

4- مجموع الدالة g هي : $]0;+\infty[$

- تعيين صورة 1 :

لدينا $f(0)=1$ ، نظيرة النقطة $B(0;1)$ بالتناظر المحوري هي النقطة $A(1;0)$ و منه $g(1)=0$

- دراسة إشارة g بيانيا :

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

- المخمنات :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}=0$

- تعيين صورة e بالدالة g : لدينا : $e^1=e$ و عليه $f(1)=e$

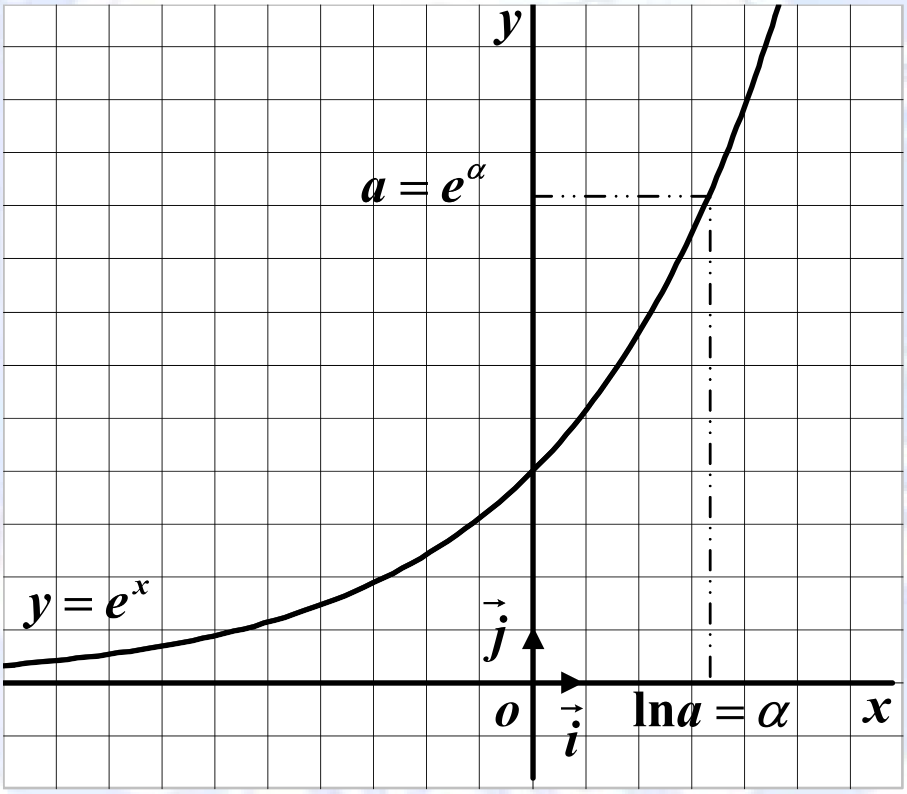
نظيرة النقطة $c(1;e)$ بالتناظر المحوري هو $D(e;1)$

و عليه : $g(e)=1$.

I - الدالة اللوغاريتمية النيبرية

1- اللوغاريتم النيبري لعدد :

الدالة $x \mapsto e^x$ معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}_+$. حسب نظرية القيم المتوسطة من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما فإن للمعادلة $e^x = a$ حل وحيد هذا الحل يسمى اللوغاريتم النيبري للعدد a و نرمز له بالرمز $\ln a$.



أمثلة :

- حل المعادلة $e^x = 2$ هو $\ln 2$ أي أن : $e^{\ln 2} = 2$
- حل المعادلة $e^x = 10$ هو $\ln 10$ أي أن : $e^{\ln 10} = 10$

نتائج :

أ) لدينا $e^0 = 1$ و عليه : $\ln 1 = 0$

ب) لدينا $e^1 = e$ و عليه : $\ln e = 1$

ج) حل المعادلة $e^x = a$ هو $x = \ln a$ من أجل $a > 0$

و عليه : $e^{\ln a} = a$.

د) لدينا $\ln e^a = a$ من أجل كل عدد حقيقي a

مبرهنة :

a و b عددان حقيقيان موجبان تماما .

لدينا : $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$

البرهان :

لدينا : $e^{\ln a+\ln b} = e^{\ln a}.e^{\ln b}$ (و ذلك حسب خواص الدالة الأسية) لكن $e^{\ln a} = a$ و $e^{\ln b}$ و عليه : $e^{\ln a+\ln b} = a.b$

و لدينا أيضا : $e^{\ln(a.b)} = a.b$ و عليه : $e^{\ln(a.b)} = e^{\ln a+\ln b}$

و منه نستنتج أن: $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$.

نتائج :

أ) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما .

البرهان :

بوضع $\frac{1}{a} = c$ نجد : $a.c = 1$ و منه : $\ln(a.c) = \ln 1$

و عليه : $\ln a + \ln c = 0$ إذن : $\ln c = -\ln a$

و بالتالي : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

ب) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ حيث a و b عددان حقيقيان موجبان تماما .

البرهان :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a.\frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

ج) من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل كل عدد ناطق n

لدينا : $\ln a^n = n\ln a$

البرهان :

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و من أجل عدد ناطق n : لدينا : $e^{\ln a^n} = a^n$ و

لدينا : $e^{n\ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^n = a^n$

و منه : $e^{\ln a^n} = e^{n\ln a}$ و عليه : $\ln a^n = n\ln a$

2- الدالة اللوغاريتمية النيبيرية :

أ) تعريف :

نسمي دالة لوغاريتمية نيبيرية الدالة التي نرمز لها بالرمز $\ln$ ، والتي ترفق بكل عدد x من المجال $]0;+\infty[$ العدد $\ln x$

أي : $x \mapsto \ln x$

ب) الدالة المشتقة للدالة اللوغاريتمية النيبيرية :

مبرهنة :

الدالة $\ln$ تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$

البرهان :

لدينا $e^{\ln x} = x$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x

لنحسب الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{\ln x}$

الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{\ln x}$ على المجال $]0;+\infty[$ هي الدالة $x \mapsto \ln' x \,.e^{\ln x}$ أي : $x \mapsto \ln'(x)$

و الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto x$ هي الدالة $x \mapsto 1$ و عليه : $x\ln'(x) = 1$ و منه :

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ و منه الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto \ln x$ هي الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$

و عليه بما أن : $\ln 1 = 0$ فإن الدالة : $x \mapsto \ln x$ هي الدالة الأصلية التي تنعدم عند 1 للدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ج) الدالة المشتقة للدالة $h : x \mapsto \ln\left|g(x)\right|$

حيث g دالة غير معدومة و قابلة للاشتقاق على مجال I .

الدالة $x \mapsto \ln\left|g(x)\right|$ هي مركب الدالتان g و $\ln$ حيث g موجبة وتقبل الاشتقاق

على I و الدالة $\ln$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+$

و عليه h تقبل الاشتقاق على I و دالتها المشتقة هي الدالة

$$h' : x \mapsto g'(x) \times \frac{1}{g(x)} \quad \text{أي :} \quad x \mapsto \frac{g'(x)}{g(x)}$$

د) نهايات الدالة اللوغاريتمية :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

البرهان :

نعتبر المجال $\left[A;+\infty\right[$ حيث : $10^n \leq A < 10^{n+1}$

حسب تعريف e لدينا : $2 < e < 3$ و عليه : $e^2 < 10$

و منه : $\left(e^2\right)^5 < 10^5$ إذن : $e^{10} < 10^5$ و بالتالي : $\ln e^{10} < \ln 10^5$

أي : $10 < \ln 10^5$ إذا كان : $x \geq \left(10^5\right)^{10^n}$ فإن : $\ln x \geq \ln\left(10\right)^5$

و عليه : $\ln x \geq 10^n . \ln 10^5$ لكن : $\ln 10^5 > 10$

و منه : $\ln x \geq 10^{n+1} > A$ إذن : $\ln x > A$

و عليه من أجل $x \in \left[\left(10^5\right)^{10};+\infty\right[$ فإن : $\ln x \in \left[A;+\infty\right[$

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$

البرهان :

بوضع : $x = \frac{1}{t}$ نجد : $t = \frac{1}{x}$ لما $\underset{x>0}{x} \to 0$ فإن : $t \to +\infty$

و عليه : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = \lim\limits_{t \to +\infty} \ln\frac{1}{t} = \lim\limits_{t \to +\infty}\left(-\ln t\right) = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

البرهان :

رأينا أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x \geq x$ و عليه

من أجل $x > 0$: $\ln e^x \geq \ln x$ أي أن : $x \geq \ln x$

و عليه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما : $\sqrt{x} \geq \ln\sqrt{x}$

إذن : $\sqrt{x} \geq \frac{1}{2}\ln x$ و عليه : $2\sqrt{x} \geq \ln x$ و بالتالي :

$\frac{2\sqrt{x}}{x} \geq \frac{\ln x}{x}$ و عليه : $\frac{2}{\sqrt{x}} \geq \frac{\ln x}{x}$ و بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

فحسب مبرهنة الحد من الأدنى فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0$

البرهان :

بوضع : $x = \frac{1}{t}$ أي : $t = \frac{1}{x}$ فإنه : لما $\underset{x>0}{x} \to 0$ فإن : $t \to +\infty$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0$$

- $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

البرهان :

نعتبر الدالة $f : t \to \ln t$ ؛ هذه الدالة معرفة و قابلة لاشتقاق على $]0;+\infty[$ و عليه فهي تقبل الاشتقاق عند 1 .

من جهة لدينا : $f'(1) = \lim\limits_{h\to0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

أي أن : $f'(1) = \lim\limits_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h}$ ... (1) و من جهة أخرى :

$f'(t)=\frac{1}{t}$ و عليه : $f'(1)=1$ ... (2) إذن من (1) و (2) ينتج :

$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ و بالتالي : $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

هـ) جدول تغيرات الدالة : $x\mapsto \ln x$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

من جدول التغيرات نلاحظ أنه من أجل كل عددان a و b من $]0;+\infty[$

لدينا : $\ln a=\ln b$ تكافئ $a=b$ ؛ $\ln a>\ln b$ تكافئ $a>b$

$\ln a<\ln b$ تكافئ $a<b$ وعليه :

من أجل $x>1$: $\ln x>0$ ؛ من أجل $0<x<1$: $\ln x<0$

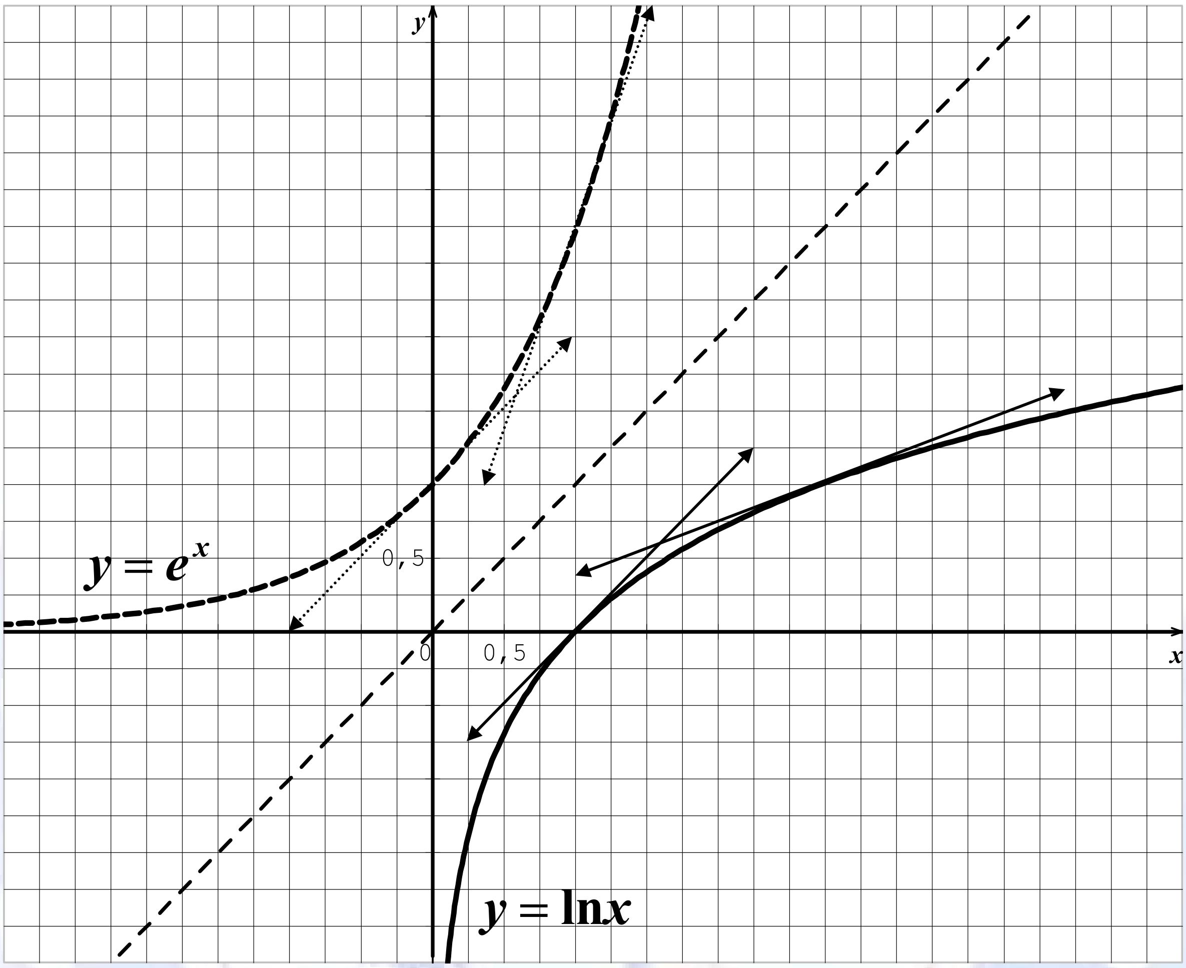
و) التمثيل البياني للدالة : $x\mapsto \ln x$

معادلتي المماسين لمنحنى الدالة $x\mapsto \ln x$ عند كل من :

$c(1;0)$ و $D(e;1)$ هما :

- عند $c(1;0)$: $y=1(x-1)+0$ أي : $y=x-1$

- عند $D(e;1)$: $y=\frac{1}{e}\times(x-e)+1$ إذن : $y=\frac{1}{e}x$



ملاحظة :

نلاحظ أن التمثيلين البيانيين لكل من الدالتين: $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto e^x$

متناظرتين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $y = x$ و نقول أنهما دالتان عكسيتان .

و) الدوال الأصلية للدوال من الشكل : $x \to \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لها نفس الإشارة مع u' في هذا المجال . رأينا أن الدالة المشتقة للدالة: $x \mapsto \ln|u(x)|$

على I هي الدالة: $x \to \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ و عليه ينتج أن الدوال الأصلية للدالة :

$x \to \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على I هي الدوال: $x \mapsto \ln|u(x)| + \lambda$

حيث : $\lambda \in \mathbb{R}$.

مثال :

الدوال الأصلية للدوال $x \mapsto \frac{2x}{x^2-9}$ على المجال $]3;+\infty[$ وعلى المجال $]-\infty ; 3[$

و على المجال $]-3 ; 3[$ هي الدوال : $\lambda \in \mathbb{R}$: $x \mapsto \ln|x^2-9|+\lambda$

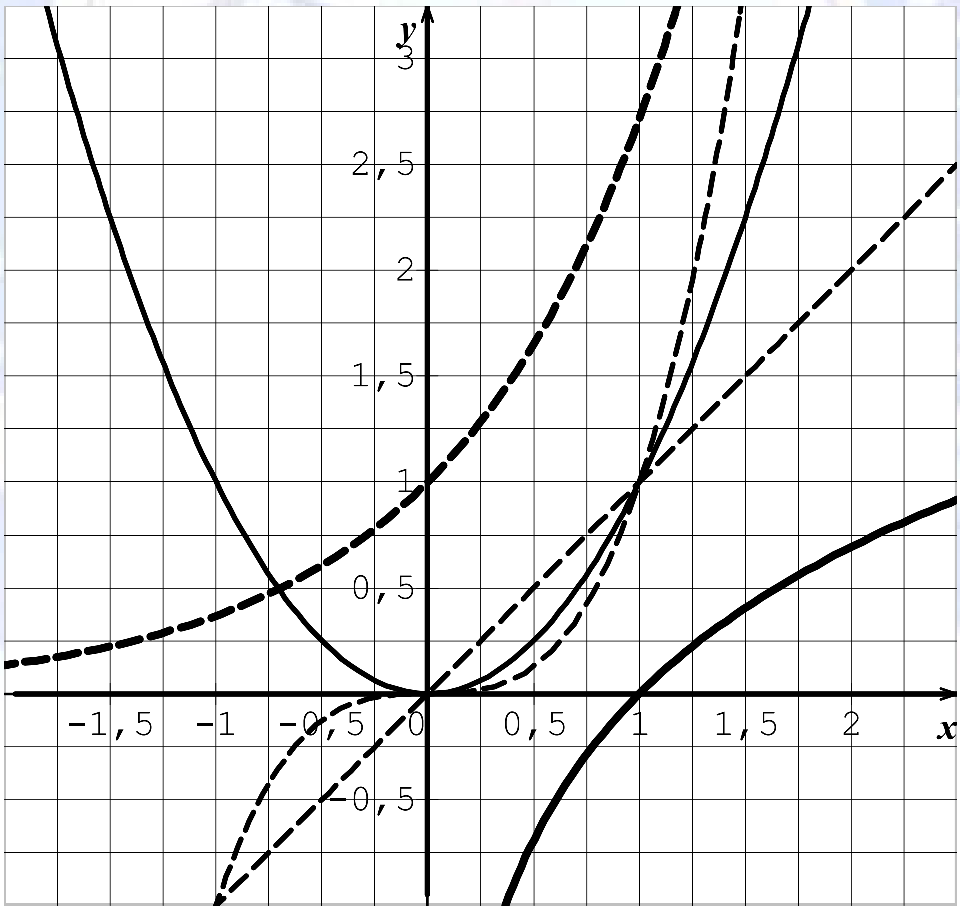
التزايد المقارن :

رأينا فيما سبق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x

فإن : $e^x \geq x$ و $x \geq \ln x$ وعليه : $\ln x \leq x \leq e^x$

ننشئ التمثيلات البيانية لكل من الدوال التالية :

$x \mapsto e^x \quad , \quad x \mapsto \ln x \quad , \quad x \mapsto x^3 \quad , \quad x \mapsto x^2 \quad , \quad x \mapsto x$



نلاحظ أن نهاية كل من هذه الدوال هي $+\infty$ عندما $x \to +\infty$ ،

لكن سلوكها مختلف .

و منه نستنتج التزايد المقارن لها : في اللانهاية تتفوق الدالة الأسية علي الدالة " قوة " على الدالة اللوغاريتم .

- حساب بعض النهايات :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0, n\in\mathbb{N}^*$

البرهان :

من أجل $n=1$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

و من أجل $n\geq 2$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{1}{x^{n-1}}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty, n\in\mathbb{N}^*$

البرهان :

من أجل $n=1$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

و من أجل $n\geq 2$: لنحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}$

بوضع : $t=\dfrac{e^x}{x^n}$ فنجد : $\ln t=\ln e^x-\ln x^n$ أي أن : $\ln t=x-n\ln x$ و عليه:

$$\ln t=x\left(1-n\frac{\ln x}{x}\right)$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-n\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

و منه : $\ln t\to+\infty$ و عليه : $t\to+\infty$ أي أنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^n\ln x=0\ ,\quad n\in\mathbb{N}^*$

البرهان :

من أجل $n=1$ لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln x=0$

و من أجل $n\geq 2$: لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^n\ln x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^{n-1}.x\ln x=0$

- $\lim_{x \to -\infty} x^n . e^x = 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$

بوضع $y = \left| x^n . e^x \right|$ نجد : $\ln y = \ln \left| x^n . e^x \right|$

و عليه : $\ln y = \ln \left| x^n \right| + \ln e^x$ و بالتالي : $\ln y = n \ln |x| + x$

و عليه : $\ln y = -x \left(n \frac{\ln(-x)}{-x} - 1 \right)$ من أجل $x < 0$

إذن: $\lim_{x \to -\infty} -x \left(n \frac{\ln(-x)}{-x} - 1 \right) = -\infty$ وعليه : $\ln y \to -\infty$

ومنه : $\underset{y>0}{y \to 0}$ إذن : $\lim_{x \to -\infty} \left| x^n . e^x \right| = 0$ ومنه : $\lim_{x \to -\infty} x^x . e^x = 0$

II – الدالة اللوغاريتمية العشرية :

1- تعريف :

نسمى الدالة اللوغاريتمية العشرية الدالة التي نرمز إليها بالرمز $\log$

و المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

2- نتائج :

1) $\log 1 = 0$ 2) $\log 10 = 1$

3) الدالة $x \mapsto \log x$ معرفة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

البرهان :

- $\log 1 = \dfrac{\ln 1}{\ln 10} = 0$
- $\log 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 10} = 1$

لدينا : $\log x = \dfrac{1}{\ln 10}.\ln x$

وعليه الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto \log x$ هي الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{\ln 10}.\dfrac{1}{x}$

وبما أن $x > 0$ و $\ln 10 > 0$ فإن $\dfrac{1}{\ln 10}.\dfrac{1}{x} > 0$

ومنه الدالة $x \mapsto \log x$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

3- خواص :

من أجل كل عددان حقيقيان a و b من $]0;+\infty[$

ومن أجل كل عدد ناطق r لدينا :

- $\log(a \times b) = \log a + \log b$
- $\log\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log b$
- $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
- $\log a^r = r\log a$

البرهان :

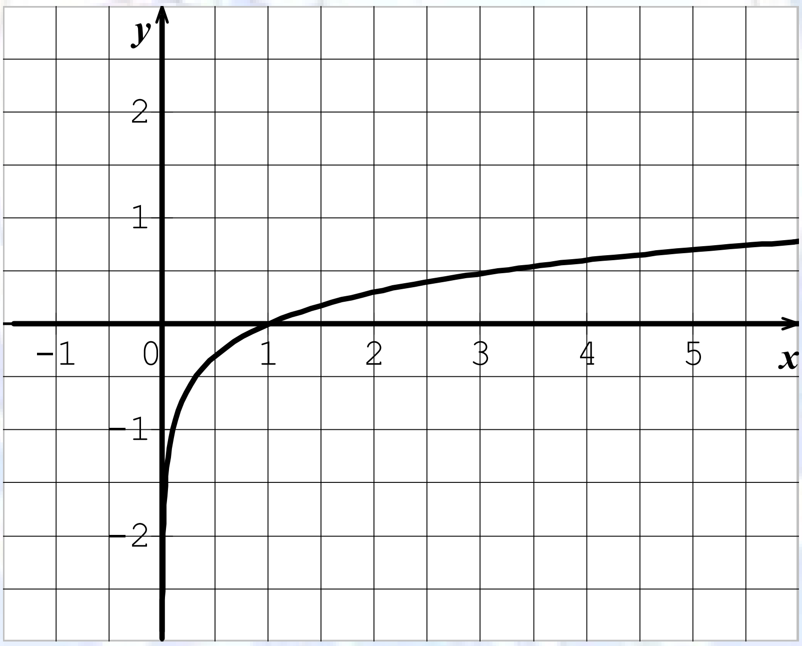
$$\bullet \log(a\times b)=\frac{\ln(a\times b)}{\ln 10}=\frac{\ln a+\ln b}{\ln 10}=\frac{\ln a}{\ln 10}+\frac{\ln b}{\ln 10}=\log a+\log b$$

$$\bullet \log\left(\frac{1}{b}\right)=\frac{\ln\left(\frac{1}{b}\right)}{\ln 10}=\frac{-\ln b}{\ln 10}=-\log b$$

$$\bullet \log\left(\frac{a}{b}\right)=\log\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\log a+\log\frac{1}{b}=\log a-\log b$$

$$\bullet \log a^{r}=\frac{\ln a^{r}}{\ln 10}=r\frac{\ln a}{\ln 10}=r\log a$$

6- التمثيل البياني للدالة $x \rightarrow \log x$:



تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

التطبيق :

أنشئ تمثيلا تقريبيا لحل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{x}$ **مع الشرط** $y(1)=0$**. باستعمال طريقة Euler بمجدول Excel في المجال** $]0;b]$ **والخطوة** $h=0.005$**.**

الحل :

لدينا: $\Delta y \simeq f'(x).\Delta x$ **ومنه** $f(x+h)-f(x)\simeq f'(x).h$ **أو** $f(x-h)-f(x)\simeq -f'(x).h$ **مع** $h>0$

$f(x+h)\simeq f(x)+f'(x).h$ **أو** $f(x-h)\simeq f(x)-f'(x).h$

وبما أن $y'=\frac{1}{x}$ **فإن** $f'(x)=\frac{1}{x}$ **فنحصل على** $f(x-h)\simeq f(x)-\frac{h}{x}$

أو $f(x+h)\simeq f(x)+\frac{h}{x}$**.**

نتحصل بالعبارة الأولى $f(x+h)\simeq f(x)+\frac{h}{x}$ **قيم الدالة (الحل) من أجل** $x\geq 1$ **وتعطي العبارة الثانية** $f(x-h)\simeq f(x)-f'(x).h$ **قيم الدالة (الحل) من أجل القيم** $0\prec x\leq 1$ **وذلك باعتبار** $f(1)=0$ **في الانطلاقة وجعل** h **صغيرا بالقدر الذي يضمن تقريبا جيدا.**

نستخدم مجدول Excel لمقاربة التمثيل البياني للدالة الحل .

حجز الأعداد: نحجز الخطوة h **في الخانة** $A3$ **مثلا.**

من أجل $0\prec X\leq 1$ **: نحجز في الخانة** $A4$ **قيمة إبتدائية للمتغير وهي1 نحجز في الخانة** $A5$ **القاعدة** $=x-h$ **التي تعطي قيم المتغير** x **التي هي قبل 1 بطرح الخطوة في كل مرة حتى الحصول على قيمة قريبة من 0 فنحجز:** $=A4-A\$3$ **ثم نعمم على باقي الخانات من عمود A إلى غاية الحصول على قيمة قريبة من 0 .**

نحجز في الخانة $B4$ **العدد 0 وهو قيمة الدالة من أجل 1 لأن** $f(1)=0$

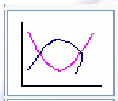
نحجز في الخانة $B5$ **القيمة التقريبية للعدد** $y=f(x-h)$

ولدينا $f(x-h)\simeq f(x)-f'(x).h$ **فنحجز :** $=B4-\$A\$3/A4$ **ثم نعمم على باقي الخانات من عمود B حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود A .**

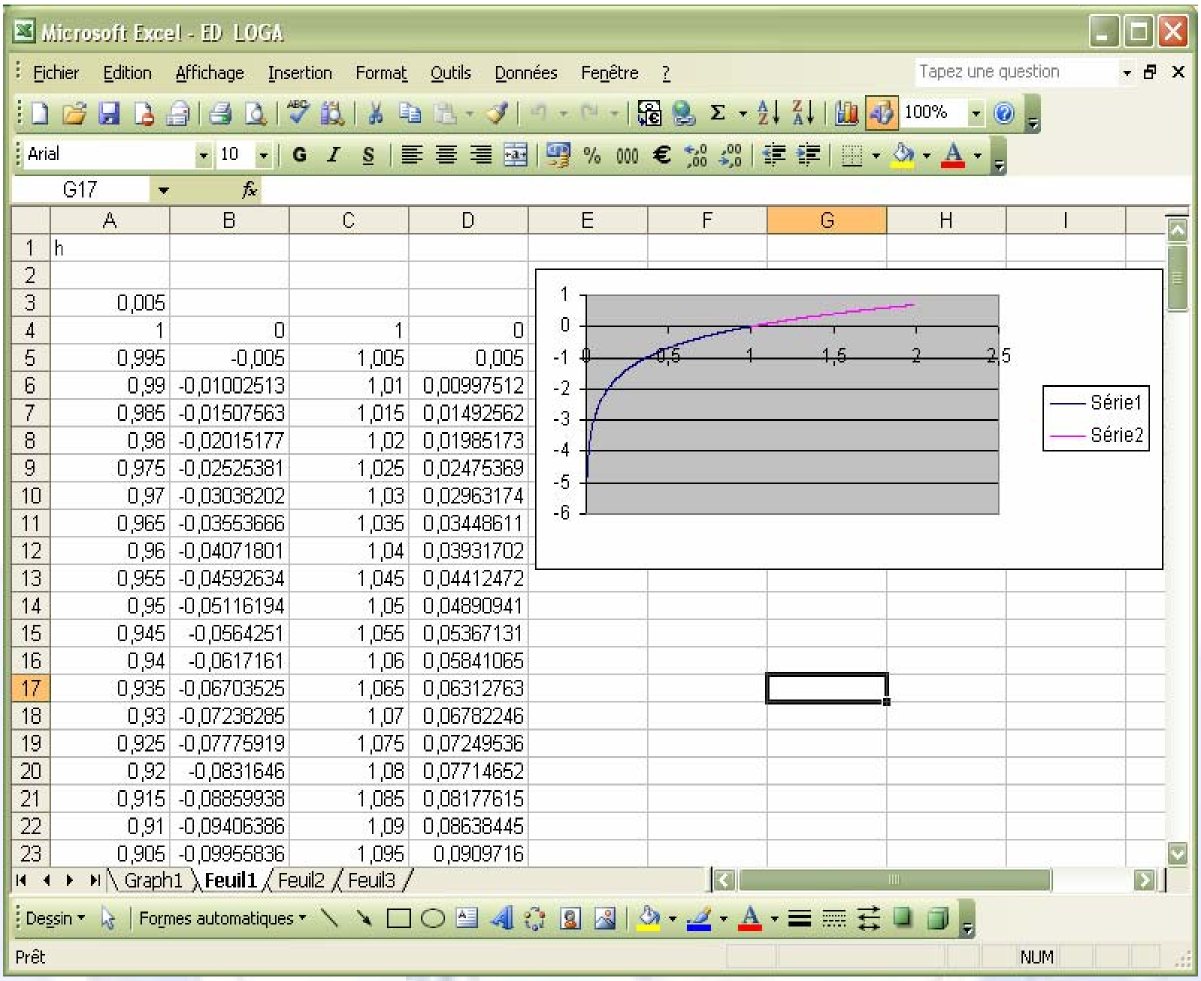
من أجل $X \geq 1$: نحجز في الخانة $C4$ قيمة ابتدائية للمتغير وهي 1
نحجز في الخانة $C5$ القاعدة $= x + h$ التي تعطي قيم المتغير x التي هي بعد 1 بإضافة الخطوة في كل مرة فنحجز: $= C4 + A\$3$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود C إلى غاية آخر قيمة للمتغير من العمود B .
نحجز في الخانة $D4$ العدد 0 وهو قيمة الدالة من أجل 1 لأن $f(1) = 0$
نحجز في الخانة $D5$ القيمة التقريبية للعدد $y = f(x+h)$ ولدينا $f(x+h) \simeq f(x) + f'(x).h$ فنحجز $= D4 + \$A\$3 / C4$ ثم نعمم على باقي الخانات من عمود D حتى الوصول إلى آخر قيمة للمتغير من العمود B .

التمثيل البياني:

نختار العمودين A وB نضغط على المساعد البياني 

ونختار Nuages de points ثم المنحنى من النوع  ، نواصل العملية بالضغط على Suivant > ثم اختيار السلسلة بالضغط على Série نجد السلسلة الأولى التي تخص تمثيل الدالة (الحل) على المجال الأول $]0.1]$ محجوزة باسم Série1 . ثم نضغط على Ajouter لإضافة السلسلة الثانية التي تعطي التمثيل البياني على المجال الثاني $[1;b[$ كما يلي:

نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم x ثم نحجز قيم العمود C بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في $C4$ إلى آخر قيمة من نفس العمود.
نضع مؤشر الكتابة على خانة قيم y ثم نحجز قيم العمود D بالضغط بالفأرة من القيمة الأولى في $D4$ إلى آخر قيمة من نفس العمود.
نضغط بعدها على التالي Suivant > فيظهر المنحنيان مكملان لبعضهما بلونين مختلفين ،حيث يشكلان منحنى الدالة (الحل) على المجال $]0,b]$ ، ثم الإنهاء Terminer .



	A	B	C	D
1	h			
2				
3	0,005			
4	1	0	1	0
5	0,995	-0,005	1,005	0,005
6	0,99	-0,01002513	1,01	0,00997512
7	0,985	-0,01507563	1,015	0,01492562
8	0,98	-0,02015177	1,02	0,01985173
9	0,975	-0,02525381	1,025	0,02475369
10	0,97	-0,03038202	1,03	0,02963174
11	0,965	-0,03553666	1,035	0,03448611
12	0,96	-0,04071801	1,04	0,03931702
13	0,955	-0,04592634	1,045	0,04412472
14	0,95	-0,05116194	1,05	0,04890941
15	0,945	-0,0564251	1,055	0,05367131
16	0,94	-0,0617161	1,06	0,05841065
17	0,935	-0,06703525	1,065	0,06312763
18	0,93	-0,07238285	1,07	0,06782246
19	0,925	-0,07775919	1,075	0,07249536
20	0,92	-0,0831646	1,08	0,07714652
21	0,915	-0,08859938	1,085	0,08177615
22	0,91	-0,09406386	1,09	0,08638445
23	0,905	-0,09955836	1,095	0,0909716

تمـارين و مشكلات

التمرين 1 .

أذكر صحة أم خطأ كل جملة مما يلي مع التعليل :

1- الدالة $x \mapsto \ln(-x)$ معرفة على $]0;+\infty[$

2- الدالة $x \mapsto \ln(x)$ معرفة على $\mathbb{R}^*$

3- الدالة: $x \mapsto (\ln x)^2$ معرفة على $\mathbb{R}^*_+$

4- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم α فإن $\ln 2^\alpha = \ln\alpha^2$

5- من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $\ln|x| > 0$

6- من أجل كل عددان حقيقيان موجبان تماما :

$$\ln(a+b) = \ln a + \ln b$$

7- إذا كان $|x| < 1$ فإن : $\ln|x| < 0$

8- الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ معرف على $]0;+\infty[$

9- إذا كان x عدد حقيقي غير معدوم فإن $e^{\ln x} = x$

10- $\ln e^{2008} = 2008$

11- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$

12- $\lim\limits_{x\to-\infty} [\ln(-x)] = +\infty$

13- $\ln(-2)^{1830} = 1830\ln 2$

14- إذا كان x عدد حقيقي غير معدوم فإن : $\ln x^2 = 2\ln|x|$

15- $\dfrac{\ln 12}{\ln 3} = \ln\dfrac{12}{3} = \ln 4$

التمرين 2 .

بسط العبارات التالية :

$1)\ \ln\sqrt{e}-\ln e^{-3}$ $\qquad$ $2)\ \ln\sqrt{e^3}-\ln\dfrac{\sqrt{e}}{e^2}$

$3)\ \dfrac{1}{5}\ln 2^5+\dfrac{\ln\sqrt{2}}{4}$ $\qquad$ $4)\ \ln 2\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}\ln 2$

$5)\ln\left(128\right)^2-\ln\left(16\times 32\right)$ $\qquad$ $6)\ln 243+\ln 6^{10}+\ln\dfrac{1}{1024}$

التمرين 3 .

عين القيم المقربة للأعداد الآتية إلى 10^{-2} باستعمال آلة حسابية :

$$\ln\left(2007\right)^{2006}\ ;\ \ln\left(1962\right)^{1954}\ ;\dfrac{1}{\ln 1830}$$

$$\ln\left(2\right)^{1418}\ ;\ \ln\left(2{,}0005\right)^{12}\ ;\ \ln\left(2^5\times 3^7\times 5^3\right)$$

التمرين 4 .

أدرس إشارة كل من الأعداد الآتية :

$$a=3\ln 7-5\ln 5; b=3\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln 15$$

$$c=\ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right); d=\dfrac{\ln 3}{\ln(0,5)}$$

التمرين 5 .

تحقق من صحة المساواة التالية : $2\ln\left(\sqrt{3}-1\right)+\ln\left(\dfrac{2\sqrt{3}+4}{4}\right)=0$

التمرين 6 .

عين مجموعة التعريف و مجموعة قابلية الاشتقاق للدوال f و احسب دالتها المشتقة في كل حالة مما يلي :

1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln x$ 2) $f(x)=\ln(x^2-4)$

3) $f(x)=x\ln|x|$ 4) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

5) $f(x)=x\ln(-x)$ 6) $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

7) $f(x)=\ln(e^{2x}-5e^{x}+6)$ 8) $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$

التمرين 7 .

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{\ln x}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}\ln(\ln x)$ 5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{e^x}{\ln x}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\ln x)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^4}$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$

10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x-\ln x)\ln x$ 11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\sqrt{x}\ln x$ 12) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

التمرين 8 . حل في $\mathbb{R}$ كل من المعادلات التالية :

1) $\ln x-\ln(x-2)=1$ 2) $\ln x^2=4$

3) $\ln(x-1)+\ln(x+2)=\ln(x^2-3x+2)$

4) $2(\ln x)^2+5\ln x-3=0$

التمرين 9 .

حل في $\mathbb{R}$ كل من المتراجحات التالية :

1) $\ln x < \frac{1}{2}$ 2) $\ln|x| < 1$

3) $\ln x + \ln(x-1) > \ln 6$ 4) $\frac{\ln(x-1)}{\ln(x+3)} < 0$

5) $(\ln x)^2 - 8\ln x + 7 > 0$ 6) $(x^2-4x)\ln x \geq 0$

التمرين 10 .

عين الدوال الأصلية g للدالة f في كل حالة مما يلي على المجال I

1) $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x}$; $I =]0\,;+\infty[$

2) $f(x) = -x^3 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$; $I =]1\,;+\infty[$

3) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x}$; $I =]2\,;+\infty[$

4) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$; $I =]0\,;+\infty[$

5) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$; $I =]0\,;\pi[$

6) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$; $I =]-\infty\,;+\infty[$

التمرين 11 .

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بالعبارة

$$f(x) = \frac{-x^3 - (12-e)x^2 - (9-4e)x + 3e - 2}{x^2+4x+3}$$

e : يرمز إلى العدد النيبيري .

1 – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من : $\mathbb{R} - \{-3;-1\}$

فإن : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}+\frac{d}{x+1}$

حيث : d,c,b,a أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

2 – عين الدوال الأصلية g للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$

3 – استنتج دالة أصلية h للدالة f تأخذ القيمة 1 عند $x=0$

التمرين 12 .

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي :

$$f(x)=-x^2+x+2\ln(x+1)$$

(c) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1 – أدرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية .

2 – هل توجد مماسات للمنحنى (c) معامل توجيهها 3 حيث يطلب

كتابة معادلاتها في حالة وجودها .

3 – بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $2<x_0<\frac{5}{2}$

4 – أنشئ المماسات ذات معامل التوجيه 3 ثم أنشئ (c) .

5 – نعتبر الدالة g المعرفة بالعبارة:

$$g(x)=-x^2+|x|+2\ln(|x|+1)$$

أ – أثبت أن g دالة زوجية .

ب– أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

ج– أنشئ التمثيل البياني (γ) للدالة g انطلاقا من (c).

التمرين 13 .

I) φ دالة معرفة كما يلي : $\varphi(x)=x^2-4x+3+6\ln|x-2|$

1 – احسب $\varphi(1)$ و $\varphi(3)$.

2 – ادرس تغيرات الدالة φ .

3 – استنتج إشارة $\varphi(x)$.

II) f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = x + 2 - \frac{5}{x-2} - 6\frac{\ln|x-2|}{x-2}$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \neq 2$

فإن : $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-2)^2}$

2) استنتج تغيرات الدالة f

3) ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب لمعلم متعامد متجانس

$\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ ، ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (Γ) .

4) احسب $f(-1)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(-4)$ بالتقريب إلى 10^{-1} .

5) تحقق أن $w(2;4)$ مركز تناظر للمنحنى (Γ) .

6) ارسم (Γ).

التمرين 14 .

نعتبر الدالة f حيث : $\begin{cases} f(x) = -x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) , \ x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

(c) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ ،

الوحدة (4cm)

1- أدرس استمرارية f عند 0 من اليمين .

2- أدرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0 من اليمين . ما هو التفسير الهندسي .

3- أحسب من أجل $x > 0$: $f'(x)$ و $f''(x)$

أحسب $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$

4- أدرس تغيرات الدالة f

5- أنشئ (c)

6- نعتبر الدالة g حيث : $g(x)=xf(x)-x$

-أحسب $g'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $]0\ ;\ +\infty[$

التمرين 15 .

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي :

$f(x)=\dfrac{2x-11}{x-6}-\ln(6-x)$, (c) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1- ادرس تغيرات الدالة f

2- اكتب معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة 0

3- احسب بتقريب 10^{-2} الأعداد: $f(-1)\ ;\ f(0)\ ;\ f(3)\ ;\ f(4)$

4- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث : $\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ -1<\alpha<0 \end{cases}$

5- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد β بحيث : $\begin{cases} f(\beta)=0 \\ 0<\beta<6 \end{cases}$

6- أنشئ (c)

7- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m$

8- ناقش بيانيا عدد حلول المتراجحة : $f(x)\le m$

9- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\dfrac{2x-11}{x-6}=a+\dfrac{b}{x-6}$ حيث $b;a$ عددان حقيقيان يطلب تعيينهما

10- نعتبر الدالة g حيث : $g(x)=(x-6)\ln(6-x)+x$ عين الدالة المشتقة للدالة g على المجال $]-\infty;6[$

11- استنتج الدوال الأصلية لدالة f على المجال $]-\infty;6[$

التمرين 16 .

ضع العلامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة × أمام كل جملة خاطئة :

1- $\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x \quad ; \quad x\in\mathbb{R}_+^*$

2- $\log e=\frac{1}{\ln 10}$

3- $\log 2^n=\ln 2^n$

4- $\log 10^n=n \quad ; \quad n\in\mathbb{Q}$

5- $10^9<\log\left(9,26.10^9\right)<10^{10}$.

6- $\log\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{\log a} \quad ; \quad a\in\mathbb{R}_+^*$

7- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=+\infty$

8- $\left(\log x\right)^2=2\log x \quad ; \quad x\in\mathbb{R}_+^*$

9- $\log^n\sqrt{10}^n=\frac{1}{n} \quad ; \quad n\in\mathbb{N}_-^*\{1\}$.

10- مشتقة الدالة $x\mapsto\log x$ هي الدالة $x\mapsto\frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$.

التمرين 17 .

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية :

1) $\log x+\log\left(x-1\right)=\log 6$

2) $2\left(\log x\right)^2+5\log x-3=0$

4) $\log x>3$

5) $\log\left(x-6\right)>2\log x$

التمرين 18 .

احسب المجموع :

$$S = \log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{4} + \ldots + \log\frac{98}{99} + \log\frac{99}{100}$$

التمرين 19 .

عين مجموعة تعريف كل دالة مما يلي ثم أحسب النهايات عند أطرافها :

1) $f(x) = x + \log|x|$

2) $f(x) = x^2 - 1 - \log(x^2 - 1)$

3) $f(x) = \dfrac{1}{\log x - 1}$

4) $f(x) = (\log x)^2$

التمرين 20 .

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = \log|x-1|$

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- ادرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) الممثل لتغيرات f في معلم متعامد متجانس .

3- اكتب معادلة المماس للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 2

4- هل توجد مماسات للمنحنى (C) يكون معامل توجيهها مساويا إلى 10 .

5- أنشئ (C) بعد تعيين نقط تقاطع (C) مع المحاور الإحداثية

6- ناقش بيانيا عدد نقط تقاطع (C) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = m$ حيث m وسيط حقيقي .

التمرين 21 .

f دالة معرفة بالمعادلة : $f(x) = -4 + 4\log x$

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- ادرس الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة للمنحنى (C) الممثل لتغيرات f في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

3- أنشئ (C) .

التمرين 22 .

ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{1}{\log x}$ ثم أنشئ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

التمرين 23 .

ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{\log x-1}{x}$ ثم أنشئ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ بآلة بيانية .

الحـــــــل

التمرين 1 .

1- خطأ . الدالة معرفة من أجل $-x > 0$ و عليه $x < 0$ و منه فهي معرفة على $]-\infty;0[$

2- صحيح . الدالة معرفة من أجل $|x| > 0$ و عليه $x \neq 0$ وبالتالي فهي معرفة على $\mathbb{R}^*$

3- صحيح . الدالة معرفة من أجل $x > 0$

4- خطأ . لأن : $\ln \alpha^2 = 2\ln \alpha$ لكن $\ln 2^2 = \alpha \ln 2$

5- خطأ . $\ln|x| > 0$ تكافئ $|x| > 1$ أي $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

6- خطأ . بل $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

7- صحيح . إذا كان $|x| < 1$ فإن $\ln|x| < \ln 1$ و عليه $\ln|x| < 0$
(لأن الدالة $\ln$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$)

8- خطأ . الدالة معرفة من أجل $x > 0$ و $\ln x \neq 0$ و عليه $x > 0$ و $x \neq 1$ و منه فهي معرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$

9- خطأ . المساواة صحيحة من أجل $x > 0$

10- صحيح . $\ln e^{2008} = 2008 \ln e = 2008$.

11- صحيح لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x}} = +\infty$

12- صحيح لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(-x) = \lim\limits_{z\to+\infty} \ln z = +\infty$

13- صحيح لأن : $\ln(-2)^{1830} = \ln 2^{1830} = 1830 \ln 2$

وبصفة عامة إذا كان x عدد حقيقي غير معدوم وكان n عدد طبيعي زوجي فإن : $\ln x^n = n \ln|x|$

14- صحيح . إذا كان $x > 0$: $\ln x^2 = 2\ln x$ و إذا كان $x < 0$

فإن : $\ln x^2 = \ln(-x)^2 = 2\ln(-x)$ و عليه : $\ln x^2 = 2\ln|x|$

15 – خطأ . لأن $\ln\frac{12}{3} = \ln 12 - \ln 3$

لكن : $\frac{\ln 12}{\ln 3} = \frac{\ln(4\times 3)}{\ln 3} = \frac{\ln 4 + \ln 3}{\ln 3}$

التمرين 2 .

التبسيط :

$$1)\ln\sqrt{e} - \ln e^{-3} = \ln e^{\frac{1}{2}} - (-3)\ln e = \frac{1}{2}\ln e + 3\times 1 = \frac{1}{2}\times 1 + 3 = \frac{7}{2}$$

$$2)\ln\sqrt{e^3} - \ln\frac{\sqrt{e}}{e^2} = \ln\left(e^3\right)^{\frac{1}{2}} - \ln e^{\frac{1}{2}} + \ln e^2 = \ln e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\ln e + 2\ln e$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2 = 3$$

$$3)\frac{1}{5}\ln 2^5 + \frac{\ln\sqrt{2}}{4} = \frac{5}{5}\ln 2 + \frac{\ln 2^{\frac{1}{2}}}{4} = \ln 2 + \frac{1}{8}\ln 2 = \frac{9}{8}\ln 2$$

$$4)\ln 2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\ln 2 = \ln\left(2\times 2^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{3}{2}\ln 2 = \ln 2^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\ln 2$$

$$= \frac{3}{2}\times\ln 2 - \frac{3}{2}\times\ln 2 = 0$$

$$5)\ln(128)^2 - \ln(16\times 32) = \ln\left(2^7\right)^2 - \ln\left(2^4\times 2^5\right) = \ln 2^{14} - \ln 2^9$$

$$= 14\ln 2 - 9\ln 2 = 5\ln 2$$

$$6)\ln 243 + \ln 6^{10} + \ln\left(\frac{1}{1024}\right) = \ln 3^5 + 10\ln 6 - \ln(1024)$$

$$= 5\ln 3 + 10\ln(2\times 3) - \ln 2^{10}$$

$$= 5\ln 3 + 10(\ln 2 + \ln 3) - 10\ln 2$$

$$= 5\ln 3 + 10\ln 2 + 10\ln 3 - 10\ln 2$$
$$= 15\ln 3$$

التمرين 3

القيم المقربة :

- $\ln(2007)^{2006} = 2006\ln(2007)$

و منه : $\ln(2007)^{2006} \simeq 15262,02$

- $\ln(1962)^{1954} = 1954\ \ln(1962)$

و منه : $\ln(1962)^{1954} \simeq 14841,68$

- $\dfrac{1}{\ln 1830} \simeq 0,13$

- $\ln(2)^{1418} = 1418\ \ln 2$

و منه : $\ln(2)^{1418} \simeq 982,88$

- $\ln(2,0005)^{12} = 12\ln(2,0005)$

و منه : $\ln(2,0005)^{12} \simeq 8,32$

- $\ln\left(2^5 \times 3^7 \times 5^3\right) = \ln 2^5 + \ln 3^7 + \ln 5^3$

$$= 5\ln 2 + 7\ln 3 + 3\ln 5$$

و منه : $\ln\left(2^5 \times 3^7 \times 5^3\right) \simeq 15,98$

التمرين 4 .

دراسة الإشارة :

- $a = 3\ln 7 - 5\ln 5$

$$a = \ln 7^3 - \ln 5^5 = \ln \frac{7^3}{5^5} = \ln \frac{343}{3125}$$

و بما أن : $\dfrac{343}{3125} < 1$ فإن : $\ln\left(\dfrac{343}{3125}\right) < 0$ إذن : $a < 0$

- $b = 3\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 15 = \ln 2^3 - \ln(15)^{\frac{1}{2}}$

$$b = \ln 8 - \ln\sqrt{15} = \ln\frac{8}{\sqrt{15}}$$

لدينا : $\frac{8}{\sqrt{15}} > 1$ و منه : $\frac{8}{\sqrt{15}} > 0$ إذن : $b > 0$

- $c = \ln\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

لدينا : $\sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$ ومنه : $\ln\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) < 0$ وعليه : $c < 0$

- $d = \frac{\ln 3}{\ln 0,5} = \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\ln 3}{-\ln 2}$

وعليه : $d = -\frac{\ln 3}{\ln 2}$ إذن : $d < 0$

التمرين 5 .

التحقيق من صحة المساواة :

$$2\ln\left(\sqrt{3} - 1\right) + \ln\left(\frac{2\sqrt{3} + 4}{4}\right) = 0$$

$$2\ln\left(\sqrt{3} - 1\right) + \ln\left(\frac{2\sqrt{3} + 4}{4}\right) = \ln\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 + \ln\left(\frac{2\sqrt{3} + 4}{4}\right)$$

$$= \ln\left(\sqrt{3} - 1\right)^2\left(\frac{2\sqrt{3} + 4}{4}\right) = \ln\left(4 - 2\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3} + 2}{2}\right)$$

$$= \ln\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = \ln(4 - 3) = \ln 1 = 0$$

التمرين 6 .

1) لدينا : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln x$

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث :

$$f'(x)=x-1+\frac{1}{x}=\frac{x^2-x+1}{x}$$

2) لدينا : $f(x)=\ln(x^2-4)$ حيث : $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x^2-4>0\}$

x	$-\infty$ -2 2 $+\infty$
x^2-4	+ 0 - 0 +

إذن : $D_f=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f حيث : $f'(x)=\frac{2x}{x^2-4}$

3) لدينا : $f(x)=x\ln|x|$ حيث : $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x\neq 0\}$

وعليه : $D_f=]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f حيث : $f'(x)=1\ln|x|+x\times\frac{1}{x}$

إذن : $f'(x)=\ln|x|+1$

4) لدينا : $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ حيث : $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x\ln x\neq 0\ ,\ x>0\}$

وعليه : $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x\neq 0\ ,\ \ln x\neq 0\ ,\ x>0\}$

لكن : $\ln x\neq 0$ تكافئ : $x\neq 1$ و عليه : $D_f=]0;1[\cup]1;+\infty[$

الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f حيث :

$$f'(x)=\frac{-\left(1.\ln x+x\frac{1}{x}\right)}{(x\ln x)^2}=\frac{-(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}$$

5) لدينا : $f(x)=x\ln(-x)$ حيث : $D_f=\{x\in\mathbb{R}:-x>0\}$

لكن : $-x>0$ تكافئ : $x<0$ ومنه : $D_f=]-\infty;0[$

f تقبل الاشتقاق على D_f حيث :

$$f'(x)=1\ln(-x)+x\times\frac{-1}{-x}=\ln(-x)+1$$

6) لدينا : $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ حيث : $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x-1}{x-2}>0\,,\,x-2\neq 0\right\}$

إذن : $D_f=]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	0 +	+	
$x-2$	-	-	0 +	
$\frac{x-1}{x-2}$	+	0 -	+	

الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f حيث :

$$f'(x)=\frac{\frac{1.(x-2)-1.(x-1)}{(x-2)2}}{\frac{x-1}{x-2}}=\frac{\frac{-1}{(x-2)2}}{\frac{x-1}{x-2}}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-2)}\times\frac{x-2}{x-1}=\frac{-1}{(x-2)(x-1)}$$

7) لدينا : $f(x)=\ln(e^{2x}-5e^x+6)$ حيث : $D_f=\{x\in\mathbb{R}:e^{2x}-5e^x+6>0\}$

ندرس إشارة : $e^{2x}-5e^x+6$ بوضع : $e^x=\tau$ نجد : $\tau^2-5\tau+6$

ومنه : $\Delta=1\ ,\ \tau_1=2\ ,\ \tau_2=3$ وعليه : $\tau^2-5\tau+6=(\tau-2)(\tau-3)$

وبالتالي : $e^{2x}-5e^x+6=(e^x-2)(e^x-3)$

$e^x-2=0$ تكافئ : $e^x=2$ وعليه : $\ln e^x=\ln 2$ ومنه : $x=\ln 2$

$e^x-2>0$ تكافئ : $e^x>2$ وعليه : $\ln e^x>\ln 2$ ومنه : $x>\ln 2$

$e^x-3>0$ تكافئ : $e^x>3$ وعليه : $\ln e^x=\ln 3$ ومنه : $x=\ln 3$

$e^x-3=0$ تكافئ : $e^x=3$ وعليه : $\ln e^x>\ln 3$ ومنه : $x>\ln 3$

x	$-\infty$ $\ln 2$	$\ln 3$	$+\infty$
e^x-2	-	+	+
e^2-3	-	-	+
$\left(e^x-2\right)\left(e^x-3\right)$	+	-	+

ومنه : $D_f=\left]-\infty;\ln 2\right[\cup\left]\ln 3;+\infty\right[$

الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f حيث : $f'(x)=\dfrac{2e^{2x}-5e^x}{e^{2x}-5e^x+6}$

8) لدينا : $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ حيث : $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$

ومنه : $D_f=\left]0;+\infty\right[$

الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f حيث : $f'(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{1}{x}\times(\ln x)$

إذن : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

التمرين 7 .

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x-\frac{\ln x}{x}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(x-\frac{1}{x}\ln x\right)=+\infty$$

$$2)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{\ln x}=0$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)=-\infty$$

4) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \ln(\ln x) = -\infty$

5) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \dfrac{e^x}{\ln x} = 0$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - \ln x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{\ln z^2}{z} = \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{2\ln z}{z} = 0$

(بوضع $\sqrt{x} = z$ أي $x^2 = z$) لما $x \mapsto +\infty$ فإن : $z \mapsto +\infty$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^4} = \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{\ln \sqrt[4]{z}}{z} = \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{\ln z^{\frac{1}{4}}}{z} = \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{1}{4}\dfrac{\ln z}{z} = 0$

(بوضع $x^4 = z$ أي $x = \sqrt[4]{z}$) لما $x \mapsto +\infty$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{z\to+\infty} \dfrac{\left[\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right]^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left[2\ln\left(\sqrt{x}\right)\right]^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$: فإن

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{t\to+\infty} 4\left(\dfrac{\ln t}{t}\right)^2 = 0$

(بوضع $\sqrt{x} = t$) لما : $x \mapsto +\infty$ فإن : $t \mapsto +\infty$

10) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} (x - \ln x)\ln x = -\infty$

11) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \sqrt{x}\ \ln x = \lim\limits_{\substack{> \\ z\to 0}} z\ \ln z^2 = \lim\limits_{\substack{> \\ z\to 0}} 2z\ \ln z = 0$

(بوضع $\sqrt{x} = z$ أي $x^2 = z$) لما $x \overset{>}{\longmapsto} 0$ فإن : $z \overset{>}{\longmapsto} 0$

12) $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{\tau\overset{>}{\to}0}\frac{\ln(1+\tau)}{\tau} = 1$

(بوضع $\frac{1}{x}=\tau$) لما $x\longmapsto+\infty$ فإن : $\tau\overset{>}{\longmapsto}0$

التمرين 8 .

حل المعادلات :

1) لدينا : $\ln x - \ln(x-2) = 1$

مجموعة التعريف : $D=\{x\in\mathbb{R} : x>0; x>2\}$

ومنه : $D=]2;+\infty[$ وعليه المعادلة تكافئ : $\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = \ln e$

أي أن : $\frac{x}{x-2}=e$ ومنه : $x=xe-e$ إذن : $(1-e)x=-e$

ومنه : $x=\frac{-e}{1-e}$ أي : $x=\frac{e}{1-e}$ (مرفوض : لأن $x>2$)

وعليه ليس للمعادلة حلول .

2) لدينا : $\ln x^2 = 4$

مجموعة التعريف : $D=\{x\in\mathbb{R} : x\neq 0\}$ ومنه : $D=\mathbb{R}^*$

وعليه المعادلة تكافئ : $\ln x^2 = 4\ln e$ أي : $\ln x^2 = \ln e^4$

ومنه : $x^2=e^4$ أي : $x=e^2$ أو $x=-e^2$

إذن الحلول هي : e^2 , $-e^2$

3) لدينا : $\ln(x-1)+\ln(x+2)=\ln\left(x^2-3x+2\right)$

مجموعة التعريف : $D=\{x\in\mathbb{R} : x-1>0, x+2>0, x^2-3x+2>0\}$

ومنه : $x>1$ و $x>-2$ و $x^2-3x+2>0$

نحل المتراجحة : $x^2-3x+2>0$, $\Delta=1$, $x_1=1$, $x_2=2$

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$		
$x^2-3x+2>0$	+	-	+

ومنه الحلول : $]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ مجموعة التعريف : $D=]2;+\infty[$

وعليه المعادلة تكافئ : $\ln(x-1)(x+2)=\ln(x^2-3x+2)$

إذن : $(x-1)(x+2)=x^2-3x+2$

ومنه : $x^2+x-2=x^2-3x+2$ إذن : $4x=4$ وعليه : $x=1$

وهو مرفوض و منه ليس للمعادلة حلول .

4) لدينا : $2(\ln x)^2+5\ln x-3=0$

مجموعة التعريف : $D=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$ حيث : $D=]0;+\infty[$

بوضع : $\ln x=t$ نجد : $2t^2+5t-3=0$

ومنه : $\Delta=49$, $t_1=-3$, $t_2=\frac{1}{2}$

لما $t=-3$: $\ln x=-3$ و منه : $e^{Lnx}=e^{-3}$

وعليه : $\tau=e^{-3}$ أي : $\tau=\frac{1}{e^3}$ لما $t=\frac{1}{2}$: $\ln x=\frac{1}{2}$

ومنه : $e^{Lnx}=e^{\frac{1}{2}}$ إذن : $x=\sqrt{e}$ إذن الحلول هي : $\frac{1}{e^3}$, $\sqrt{e}$

التمرين 9 .

حل المتراجحات :

1) لدينا : $\ln x<\frac{1}{2}$ مجموعة التعريف : $D=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$

حيث : $D=]0;+\infty[$ و المتراجحة تكافئ : $\ln x<\ln e^{\frac{1}{2}}$

ومنه : $x<e^{\frac{1}{2}}$ أي : $x<\sqrt{e}$ وعليه حلول المتراجحة هي

المجموعة : $\left]0\ ;\ \sqrt{e}\right[$.

2) لدينا : $\ln|x|<1$ مجموعة التعريف : $D=\{x\in\mathbb{R} : x\neq 0\}$

و المتراجحة تكافئ : $\ln|x|<\ln e$ ومنه : $|x|<e$ إذن : $-e<x<e$

وعليه حلول المتراجحة هي المجموعة : $\left]-e;0\right[\cup\left]0;e\right[$.

3) لدينا : $\ln x+\ln(x-1)>\ln 6$ مجموعة التعريف :

$D=\{x\in\mathbb{R} : x>0, x>1\}$ حيث : $D=\left]1;+\infty\right[$

و المتراجحة تكافئ : $\ln x(x-1)<\ln 6$ إذن : $x^2-x>6$

وعليه : $x^2-x-6>0$ ومنه : $\Delta=25$, $x_1=-2$, $x_2=3$

x	$-\infty$ -2 3 $+\infty$
x^2-x-6	+ 0 - 0 +

وعليه حلول المتراجحة هي المجموعة : $\left]-\infty;-2\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

لكن $D=\left]1;+\infty\right[$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي : $\left]3;+\infty\right[$

4) لدينا : $\dfrac{\ln(x-1)}{\ln(x+3)}<0$

مجموعة التعريف : $D=\{x\in\mathbb{R} : x-1>0, x+3>0, \ln(x+3)\neq 0\}$

ومنه : $x>1$, $x>-3$, $x+3\neq 1$

وعليه : $x>1$, $x>-3$, $x\neq -2$ إذن : $D=\left]1;+\infty\right[$

ندرس إشارة : $\ln(x-1)$

$\ln(x-1)=0$ تكافئ : $x-1=1$ ومنه : $x=2$

$\ln(x-1)>0$ تكافئ : $x-1>1$ ومنه : $x>2$

$\ln(x-1)<0$ تكافئ : $x<2$

ندرس إشارة : $Ln(x+3)$

$\ln(x+3)=0$ تكافئ : $x+3=1$ ومنه : $x=-2$

$\ln(x+3)>0$ تكافئ : $x+3>1$ ومنه : $x>-2$

$\ln(x+3) < 0$ تكافئ : $x < -2$

x	1		2		$+\infty$
$\ln(x-1)$		-	0	+	
$\ln(x+3)$		+	0	+	
$\ln\left(\frac{\ln(x-1)}{\ln(x+3)}\right)$		-		+	

مجموعة الحلول : $]1;2[$.

5) لدينا : $(\ln x)^2 - 8\ln x + 7 > 0$ مجموعة التعريف : $D =]0;+\infty[$

بوضع $\ln x = \tau$ نجد : $\tau^2 - 8\tau + 7 > 0$

ومنه : $\Delta = 36$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 7$

إذن : $\tau^2 - 8\tau + 7 = (\tau - 1)(\tau - 7)$

وعليه : $(\ln x)^2 - 8\ln x + 7 = (\ln x - 1)(\ln x - 7)$

$\ln x - 1 = 0$ تكافئ $\ln x = 1$ ومنه : $x = e$

$\ln x - 1 > 0$ تكافئ $\ln x > 1$ ومنه : $\ln x > \ln e$ إذن $x > e$

$\ln x - 7 = 0$ تكافئ $\ln x = 7$ ومنه : $\ln x = \ln e^7$ إذن $x = e^7$

$\ln x - 7 > 0$ تكافئ $\ln x > 7$ ومنه : $\ln x > \ln e^7$ إذن $x > e^7$

x	0		e		e^7		$+\infty$
$\ln x - 1$		-		+	0	+	
$\ln x - 7$		-	0	-	0	+	
$(\ln x - 1)(\ln x - 7)$		+	0	-		+	

إذن مجموعة حلول المتراجحة هي : $]0\ ;\ e[\cup]e^7\ ;\ +\infty[$

6) لدينا : $\left(x^2-4x\right)\ \ln x \geq 0$ مجموعة التعريف : $D=\left]0;+\infty\right[$

x	0		1		4		$+\infty$
x^2-4x		-		-	0	+	
$\ln x$		-	0	+		+	
$\left(x^2-4x\right)\ \ln x$		+	0	-	0	+	

مجموعة حلول المتراجحة : $\left]0\ ;\ 1\right]\cup\left[4\ ;\ +\infty\right[$.

التمرين 10 .

تعين الدوال الأصلية g :

1) لدينا : $f\left(x\right)=3x^2-\dfrac{2}{x}$ حيث : $g\left(x\right)=x^3-2\ \ln x+c\ \ ;\ \ c\in\mathbb{R}$

2) لدينا : $f\left(x\right)=-x^3+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}$ حيث :

$$g\left(x\right)=\frac{x^4}{4}+\ln\left(x-1\right)-\frac{1}{x-1}+c\quad ;\ c\in\mathbb{R}$$

3) لدينا : $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$ حيث : $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x-2}{x^2-2x}$

ومنه : $g\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\ \ln\left(x^2-2x\right)+c\quad ;\quad c\in\mathbb{R}$

4) لدينا : $f\left(x\right)=\dfrac{\left(\ \ln x\right)^2}{x}$ حيث : $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}\times\left(\ \ln x\right)^2$

ومنه : $g\left(x\right)=\dfrac{\left(\ \ln x\right)^3}{3}+c\quad ,\quad c\in\mathbb{R}$

5) لدينا : $f\left(x\right)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ حيث : $g\left(x\right)=\ \ln\left(\sin x\right)+c\quad ,\quad c\in\mathbb{R}$

6) لدينا : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ حيث : $c\in\mathbb{R}$, $g(x)=\ln(e^x+1)+c$

التمرين 11 .

1- نبين أن :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+3}+\frac{d}{x+1}$$

$$f(x)=\frac{(ax+b)(x+3)(x+1)+c(x+1)+d(x+3)}{(x+3)(x+1)}$$

$$f(x)=\frac{(ax+b)(x^2+4x+3)+cx+c+dx+d}{x^2+4x+3}$$

$$f(x)=\frac{ax^3+4ax^2+3ax+bx^2+4bx+3b+cx+c+dx+d}{x^2+4x+3}$$

$$f(x)=\frac{ax^3+(4a+b)x^2+(3a+4b+c)x+3b+c+d}{x^2+4x+3}$$

ومنه : $\begin{cases}a=-1\\4a+b=-12+e\\3a+4b+c=-9+4e\\3b+c+d=3e-2\end{cases}$ و عليه : $\begin{cases}a=-1\\b=-8+e\\c=26\\d=-4\end{cases}$

إذن : $f(x)=-x-8+e+\dfrac{26}{x+3}-\dfrac{4}{x+1}$

2- تعين الدالة الأصلية g :

$$g(x)=-\frac{1}{2}x^2-8x+ex+26\ \ln(x+3)-4\ \ln(n+1)+c$$

$$g(x)=-\frac{1}{2}x^2+(-8+e)x+26\ \ln(x+3)-4\ \ln(x+1)+c\ \ ,\ c\in\mathbb{R}$$

3- تعيين h : $h(x)=g(x)$ حيث : $g(0)=1$

لدينا : $g(0)=1$ ومنه : $26\ \ln3+c=0$ وعليه : $c=-26\ \ln3$

إذن : $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+(-8+e)x+26\ \ln(x+3)-4\ \ln(x+1)-26\ \ln3$

التمرين 12 .

-1 دراسة تغيرات f :

لدينا : $D_f=\{x\in\mathbb{R} : x+1>0\}$ حيث : $D_f=]-1;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\left(-x^2+x+2\ \ln(x+1)\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^2+x+2\ \ln(x+1)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{-x^2+x}{x+1}+\frac{2\ \ln(x+1)}{x+1}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\frac{2\ \ln(x+1)}{x+1}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x}}+\frac{2\ \ln(x+1)}{x+1}\right]=-\infty$$

- $f'(x)=-2x+1+\dfrac{2}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{(-2x+1)(x+1)+2}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^2-2x+x+1+2}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^2-x+3}{x+1}$$

$f'(x)$ له نفس إشارة البسط .

ندرس إشارة $-2x^2-x+3$: $\Delta=25$

$x_1=1$, $x_2=-\dfrac{3}{2}$

x	-1		1		$+\infty$
$-2x^2-x+3$		+	0	-	

إذن f متناقصة تماما على $[1;+\infty[$ و متزايدة تماما على $]-1\ ;\ 1]$

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2.ln2	↘	$-\infty$

$f(1)=2\ \ln 2$

- دراسة الفروع اللانهائية : هنالك فرعين لانهائيين

بما أن : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}} f(x)=-\infty$ فإن : $x=-1$ معادلة مستقيم مقارب

و لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+1+2\frac{\ln(x+1)}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+1+\frac{2(x+1)}{x}\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=-\infty$$

إذن يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب عند $+\infty$.

2- إيجاد المماسات ذات معامل التوجيه 3 :

نحل المعادلة $f'(x)=3$ و عليه : $\dfrac{-2x^2-x+3}{x+1}=3$

إذن : $-2x^2-x+3=3x+3$ و عليه : $-2x^2-4x=0$

و عليه : $-2x(x+2)=0$ و منه : $x=0$ أو $x=-2$

إذن : $x=0$ (2- قيمة مرفوضة)

إذن هناك مماس واحد عند النقطة ذات الفاصلة 0 ومعادلته $y=f'(0)\times(x-0)+f(0)$

حيث $f(0)=0$ و عليه : $y=3x$

3- نبين أن $f(x)=0$ تقبل حلا :

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{25}{4}+\frac{5}{2}+2\ln\frac{7}{2}=\frac{-15}{4}+2\ln\frac{7}{2}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)\simeq-1,24$$

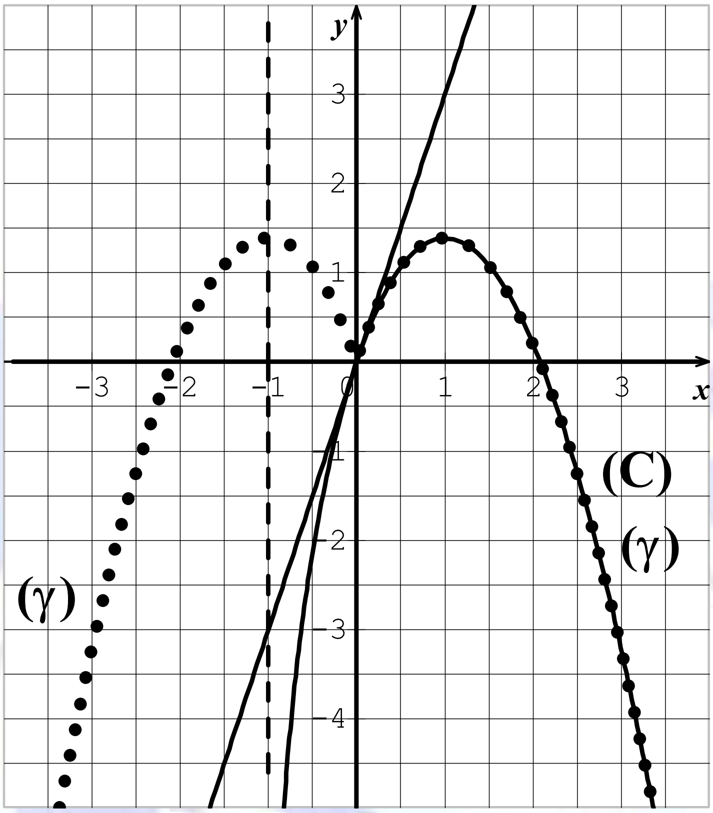
$$f(2)=-2+2\ln 3 \qquad ; \qquad f(2)\simeq 0,19$$

وعليه الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left[2\ ;\ \frac{5}{2}\right]$

و لدينا : $f(2).f\left(\frac{5}{2}\right)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة

يوجد عدد وحيد x_0 بحيث : $f(x_0)=0$; $2<x_0<\frac{5}{2}$

4- إنشاء الممسات و (C):



5- أ) إثبات أن g زوجية :

لدينا : $D_g = \mathbb{R}$ و عليه من أجل كل عدد x من D_g : $-x \in D_g$ و

$g(-x) = g(x)$ و منه g زوجية .

ب) كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

$$\begin{cases} g(x) = -x^2 + x + 2\ \ln(x+1) \quad ; \quad x > 0 \\ g(x) = -x^2 - x + 2\ \ln(-x+1) \quad ; \quad x > 0 \end{cases}$$

ج) إنشاء (γ) : (في الرسم السابق)

- من أجل $x > 0$: $g(x) = f(x)$ و منه (γ) ينطبق على (c)

- من أجل $x < 0$: الدالة g زوجية و عليه بيانها متناظر بالنسبة لمحور التراتيب .

التمرين 13 .

I – 1- الحساب : $\varphi(3) = 0 \quad ; \quad \varphi(1) = 0$

2- دراسة التغيرات :

$$D_{\varphi} = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\}$$

$$D_{\varphi} =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 - 4x + 3 + 6\ \ln|x-2| = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 - 4x + 3 + 6\ \ln|x-2| = +\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 2}} \varphi(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 2}} x^2 - 4x + 3 + 6\ \ln|x-2| = -\infty$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to -\infty}} \varphi(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 2}} x^2 - 4x + 3 + 6\ \ln|x-2| = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - 4x + 3 + 6\ln|x-2| = +\infty$$

$$\varphi'(x) = 2x - 4 + \frac{6}{x-2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{(2x-x)(x-2)+6}{x-2} = \frac{2(x-2)^2+6}{x-2}$$

$\varphi'(x)$ له نفس إشارة $x-2$ لأن : $2(x-2)^2+6>0$ و عليه :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-		+

φ متزايدة تماما على $]2;+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty;2[$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	‖	+	
$\varphi(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3- استنتاج إشارة $\varphi(x)$:

من جدول تغيرات الدالة ℓ فإن إشارة تكون كما يلي :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	

II) 1) نبين أن : $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{(x-2)^2}$

لدينا : $D_f=\{x\in\mathbb{R} : x-2\neq 0\}$ حيث : $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

$$f'(x)=1+\frac{5}{(x-2)^2}-6\times\frac{\frac{1}{x-2}\times(x-2)-\ln|x-2|}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-2)^2+5-6+6\ln|x-2|}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-4x+4-1+6\ln|x-2|}{(x-2)^2}$$

و عليه : $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{(x-2)^2}$

2) استنتاج تغيرات f :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+2-\frac{5}{x-2}+6\frac{\ln(-x+2)}{-x+2}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} x+2-\frac{5}{x-2}-\frac{6\ln|x-2|}{x-2}=+\infty$$

$$=\lim_{\substack{x\to 2\\ <}}\frac{1}{x-2}\left((x+2)(x-2)-5-6\ln|x-2|\right)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} x+2-\frac{5}{x-2}-\frac{6\ln|x-2|}{x-2}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 2\\ >}}\frac{1}{x-2}\left[(x+2)(x-2)-5-6\ln|x-2|\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x+2-\frac{5}{x-2}-\frac{6\ln|x-2|}{x-2} = +\infty$$

$$f'(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-2)^2}$$

و منه $f'(x)$ له نفس إشارة $\varphi(x)$ و عليه :

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	|	-	0 ||	-	0	+

إذن f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty ; 1]$ و $[3 ; +\infty[$

و متناقصة تماما على كل من المجالين $[1 ; 2[$ و $]2 ; 3]$

x	$-\infty$		1			2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	‖		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$ ↗		8	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↘		0	↗ $+\infty$	

إذن : $f(3)=0 \quad , \quad f(1)=8$

3) دراسة الفروع لانهائية :

هنالك 4 فروع اللانهائية و مستقيم المقارب معادلته $x=2$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$$

و عليه $y=x+2$ معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$ و عند $-\infty$

4) الحساب :

$$f(-1)=1+\frac{5}{3}\simeq 4,8$$

$$f(0)=2+\frac{5}{2}+3\ln 2\simeq 6,5$$

$$f(4)=6-\frac{5}{2}-3\ln 2\simeq 1,4$$

$$f(-4)=-2+\frac{5}{6}+\ln 6\simeq 0,6$$

5) التحقق من أن w مركز تناظر :

نتحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_f : $4-x\in D_f$ و هو محقق و كذلك

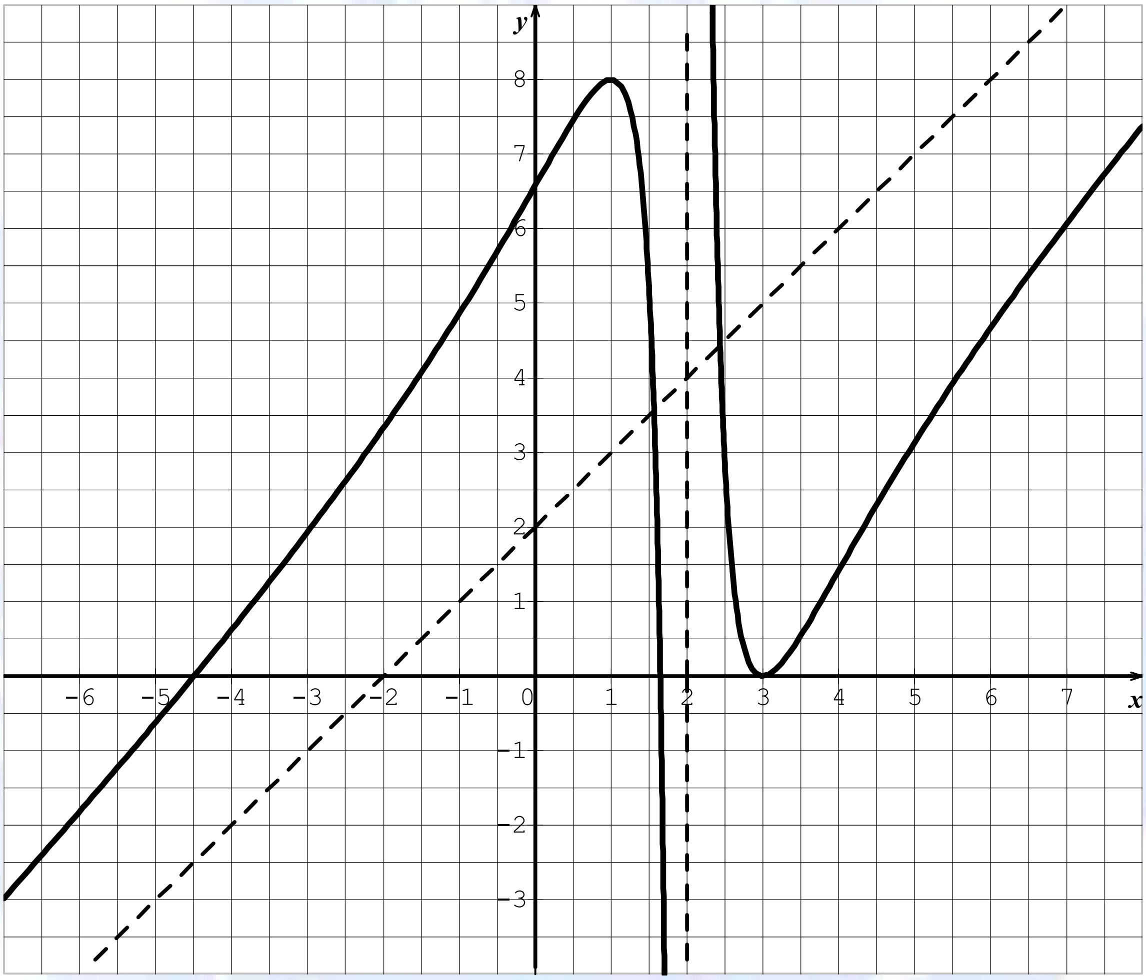
$f(4-x)+f(x)=8$.

$$f(4-x)+f(x)=6-x-\frac{5}{2-x}-\frac{6\ln|2-x|}{2-x}+x+2-\frac{5-}{x-2}-\frac{6\ln|2-x|}{x-2}$$

$$= 8 + \frac{5}{x-2} + 6\frac{\ln|x-2|}{x-2} - \frac{5}{x-2} - \frac{6\ln|x-2|}{x-2} = 8$$

إذن $w\left(2;4\right)$ مركز تناظر للمنحنى $\left(\Gamma\right)$.

6- إنشاء $\left(\Gamma\right)$:



التمرين 14 .

1- دراسة الاستمرارية عند 0 من اليمين : $D_f = \left[0;+\infty\right[$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f\left(x\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} -x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} -\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} -\frac{\ln\left(1+t\right)}{t} = 0$$

إذن f مستمرة عند 0 من اليمين .

2- دراسة قابلية الاشتقاق عند 0 من اليمين :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

إذن f لا تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين و البيان (C) يقبل نصف مماس يوازي محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

3- حساب $f'(x)$ و $f''(x)$:

$$f'(x) = (-1)\times\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + (-x)\times\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = -\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{+x+1-x}{x(x+1)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x+1} = 0$$

- استنتاج إشارة $f'(x)$:

x	0 $+\infty$
$f''(x)$	+
$f'(x)$	$-\infty$ ↗ 0

نلاحظ أن $f'(x) < 0$

4- دراسة تغيرات f :

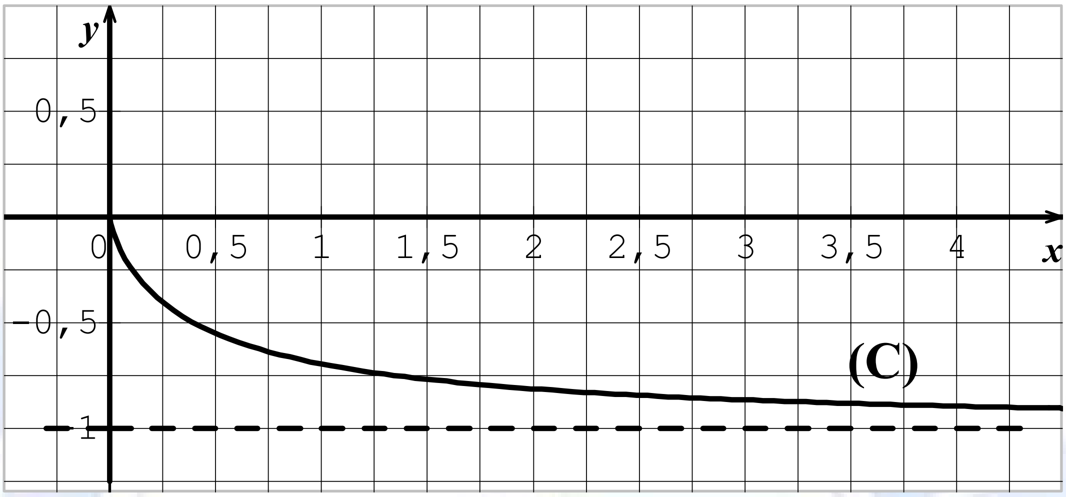
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to 0} -\frac{\ln(1+t)}{t} = -1$$

(بوضع $t = \frac{1}{x}$) .

و لدينا $f'(x) < 0$ و منه f متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	-
$f''(x)$	0 ↘ -1

5) إنشاء (C) : $y=-1$ معادلة مستقيم مقارب



6) حساب $g'(x)$:

$$g'(x)=1.f(x)-1$$
$$g'(x)=f(x)-1$$
$$g'(x)=-xLn\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$$

- استنتاج دالة أصلية للدالة f :

مما سبق $g'(x)=f(x)-1$ ومنه : $f(x)=g'(x)+1$

وعليه الدوال h حيث : $h(x)=g(x)+x+c \quad ; \quad c\in\mathbb{R}$

هي دوال أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

التمرين15 .

1- دراسة تغيرات f :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}:6-x<0\}$$

إذن : $D_f=]-\infty;6[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-11}{x-6}-\ln(6-x)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 6}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 6}} \frac{2x-11}{x-6} - \ln(6-x)$$

$$= \lim_{\substack{< \\ x \to 6}} \frac{1}{x-6}\left[2x-11+(6-x)\ln(6-x)\right] = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{2(x-6)-1(2x-11)}{(x-6)^2} - \frac{-1}{6-x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-6)^2} - \frac{1}{x-6} = \frac{-1-(x-6)}{(x-6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x+5}{(x-6)^2}$$

$f'(x)=0$ تكافئ : $-x+5=0$ ومنه : $x=5$

$f'(x)>0$ تكافئ : $-x+5>0$ ومنه : $x<5$

إذن f متزايدة تماما على $]-\infty;5]$

$f'(x)<0$ تكافئ : $x>5$ و منه f متناقصة تماما على $[5;6[$

x	$-\infty$	5	6
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$

إذن : $f(5) = \frac{-1}{-1} = 1$

2- معادلة المماس :

$$f'(0)=\frac{5}{36} \quad ; \quad f(0)=\frac{11}{6}-Ln6$$

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$y=\frac{5}{36}x+\frac{11}{6}-\ln 6$$

3- الحساب :

$$f(-1)=\frac{13}{8}-\ln 6\simeq -0,16$$

$$f(0)=\frac{11}{6}-\ln 6\simeq 0,04$$

$$f(3)=\frac{5}{3}-\ln 3\simeq 0,56$$

$$f(4)=\frac{3}{2}-\ln 2\simeq 0,80$$

4- في المجال $]-1\ ;\ 0[$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و لدينا :

$f(-1).f(0)<0$ و منه يوجد عدد وحيد α بحيث $f(\alpha)=0$

5- لدينا: $f(5)=1-\ln 1=1$

في المجال $]5;6[$ الدالة f مستمرة و متناقصة تماما

ولدينا : $f(5)>0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ <}} f(x)=-\infty$ وعليه يوجد عدد

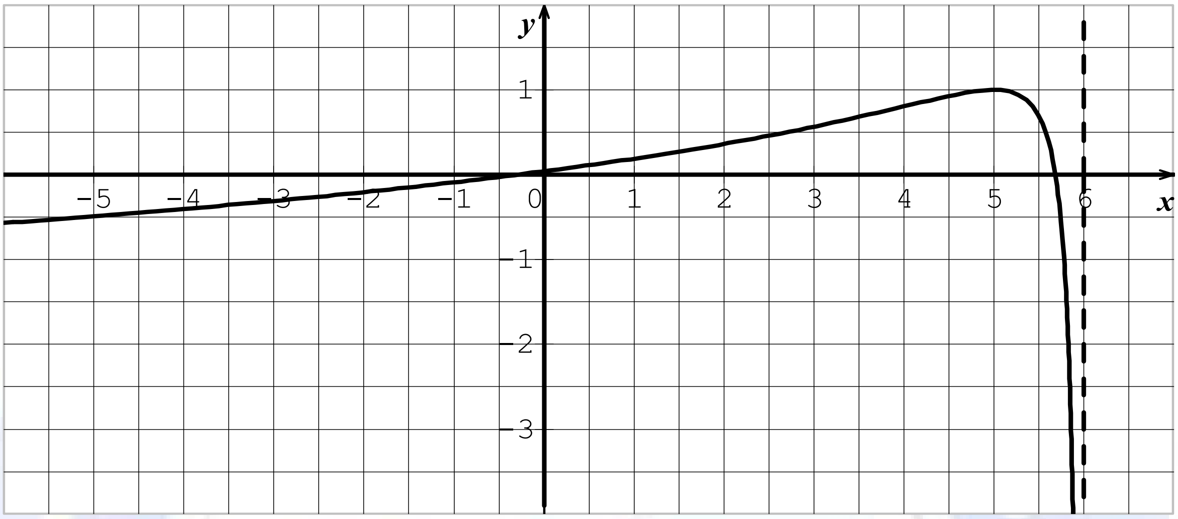
وحيد β بحيث : $f(\beta)=0$

6- إنشاء (C) :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-11}{x^2-6x}-\frac{\ln(6-x)}{x}=0$$

و منه (C) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور الفواصل عند $-\infty$

$x = 6$ معادلة مستقيم مقارب



7- المناقشة البيانية :

- لما $m \in \left]-\infty; \frac{11}{6} - Ln6\right[$: للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة .
- لما $m = \frac{11}{6} - Ln6$: للمعادلة حل موجب و أخر معدوم .
- لما $m \in \left]\frac{11}{6} - Ln6 \ ; \ 1\right[$: للمعادلة حلين موجبين .
- لما $m = 1$: للمعادلة حل مضاعف موجب .
- لما $m \in \left]1; +\infty\right[$: لا توجد حلول .

8- المناقشة البيانية للمتراجحة : $f(x) \leq 0$

$f(x) \leq 0$ تكافئ : $x \in \left]-\infty; \beta\right] \cup \left[\alpha; 6\right[$

9- تعيين a و b :

$$\frac{2x-11}{x-6} = a + \frac{b}{x-6}$$

$$\frac{2x-11}{x-6} = \frac{ax-6x+b}{x-6}$$

و منه : $\begin{cases} a=2 \\ -6a+b=-11 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

إذن : $\dfrac{2x-11}{x-6}=2+\dfrac{1}{x-6}$

10- تعيين الدالة المشتقة للدالة g : $D_g=]-\infty;6[$

$$g'(x)=1.\ln(6-x)+(x-6)\times\frac{1}{6-x}+1$$

$$g'(x)=\ln(6-x)-1+1=\ln(6-x)$$

11- استنتاج الدوال الأصلية للدالة f :

لدينا : $f(x)=2+\dfrac{1}{x-6}-\ln(6-x)$

و منه : $f(x)=2-\dfrac{1}{6-x}-g'(x)$

و منه الدوال الأصلية h للدالة f معرفة كما يلي :

$$h(x)=2x-\ln(6-x)-(x-6)\ln(6-x)-x+c$$

$$h(x)=x-(1-x+6)\ln(6-x)+c$$

$$h(x)=x-(7-x)\ln(6-x)+c \quad ; \quad c\in\mathbb{R}$$

التمرين 16 ..

1) √ 2) √ 3) × . 4) √ 5) √ . 6) × 7) √

8) × . 9) √ 10) × .

التمرين 17

1) حل كل المعادلات و المتراجحات :

$$log6=logx+log(x-1)$$

تكون المعادلة معرفة من أجل : $x>0$ و $x-1>0$

و منه $x>1$ و عليه فالمعادلة معرفة على $]1;+\infty[$ و المعادلة (1)

تكافئ : $logx(x-1)=log6$ و هي تكافئ : $x(x-1)=6$

إذن : $x^2 - x - 6 = 0$ ومنه : $\Delta = 25$; $x_1 = -2$; $x_2 = 3$

و عليه للمعادلة حل وحيد $s = \{3\}$

2) حل المعادلة : $2(logx)^2 + 5logx - 3 = 0$

المعادلة معرفة من أجل $x > 0$ بوضع $logx = t$ نجد $2t^2 + 5t - 3 = 0$ ومنه :

$\Delta = 49$; $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = -3$

لما $t = \frac{1}{2}$: $logx = \frac{1}{2}$ ومنه : $\frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{2}$ وعليه : $\ln x = \frac{1}{2}\ln 10$

ومنه : $\ln x = \ln\sqrt{10}$ وعليه : $x = \sqrt{10}$

لما $\tau = -3$: $\log x = -3$ وعليه : $\frac{\ln x}{\ln 10} = -3$

وعليه : $\ln x = \ln 10^{-3}$ و منه : $x = 10^{-3}$

مجموعة حلول المعادلة هي : $s = \{\sqrt{10}; 10^{-3}\}$

3) حل المتراجحة : $log\, x > 3$

المتراجحة تكون معرفة من أجل $x > 0$

وهي تكافئ : $\frac{\ln x}{\ln 10} > 3$ أي : $\ln x > \ln 10^3$ وعليه : $x > 10^3$

مجموعة الحلول : $s =]10^3; +\infty[$

4) 3) حل المتراجحة :

$$log(x-6) > 2logx$$

تكون المتراجحة معرفة من أجل $x > 0$ و $x - 6 > 0$ وعليه : $x > 6$

ومنه فهي معرفة على $]6; +\infty[$.

و المتراجحة تكافئ : $log(x-6) > logx^2$ وهي تكافئ : $x - 6 > x^2$

إذن : $-x^2 + x - 6 < 0$ وعليه ليس للمتراجحة حلول .

التمرين 18

حساب S :

$$S=log\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times.....\times\frac{88}{99}\times\frac{99}{1000}\right)$$

$$S=log\left(\frac{1}{1000}\right)=-log1000$$

$$S=-log10^3=-3$$

التمرين 19

1) $f(x)=x+log|x|$

الدالة f معرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x+\frac{\ln|x|}{\ln10}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left[1+\frac{\ln(-x)}{-x}\times\frac{1}{\ln10}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{\ln10}\right]=+\infty$$

$$\lim_{\substack{>\\x\to0}}f(x)=\lim_{\substack{>\\x\to0}}x+\frac{\ln x}{\ln10}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{<\\x\to0}}f(x)=\lim_{\substack{<\\x\to6}}x+\frac{\ln(-x)}{\ln10}=-\infty$$

2) $f(x)=x^2-1-log(x^2-1)$

الدالة f معرفة على من أجل $x^2-1>0$

و عليه : $x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

إذن مجموعة التعرف هي $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2-1-log(x^2-1)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(x^2-1)\left[1-\frac{log(x^2-1)}{x^2-1}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2-1\right)\left[1-\frac{\log\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\right] = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} x^2-1-\log\left(x^2-1\right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ x>1}} x^2-1-\log\left(x^2-1\right) = -\infty$$

3) $f(x) = \dfrac{1}{Logx-1}$

الدالة f معرفة من أجل $Logx-1 \neq 0$ و $x>0$

$logx \neq 1$ معناه : $\dfrac{\ln x}{\ln 10} \neq 1$ وعليه : $\ln x \neq \ln 10$ أي : $x \neq 10$

إذن مجموعة التعريف هي : $]0,10[\cup]10;+\infty[$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to0}} \frac{1}{logx-1} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to10 \\ x>10}} f(x) = \lim_{\substack{x\to10 \\ x>10}} \frac{1}{logx-1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to10}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to10}} \frac{1}{logx-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{logx-1} = 0$$

4) $f(x) = (\log x)^2$

الدالة معرفة من أجل $x>0$ أي معرفة على $]0;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} (logx)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (logx)^2 = +\infty$$

التمرين 20

1 – دراسة التغيرات :

الدالة f معرفة من أجل $x-1 \neq 0$ أي $x \neq 1$

و منه مجموعة التعريف هي : $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} log|x-1| = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} log|x-1| = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} log|x-1| = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} log|x-1| = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x-1}$$

لما $x>1$: $f'(x)>0$ و منه f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$ و عليه f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	||	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗ $+\infty$

2- دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة هناك 4

فروع لانهائية و مستقيم مقارب معادلته : $x=1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{log(x-1)}{x} = 0$$

إذن يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور الفواصل عند $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\log(-x+1)}{x} = 0$$

إذن يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور الفواصل عند $-\infty$

3- معادلة المماس : $y = f'(2).(x-2) + f(2)$

$$f'(2) = \frac{1}{\ln 10} \quad , \quad f(2) = 0$$

و عليه : $y = \frac{1}{\ln 10}(x-2)$

4 – إيجاد المماسات ذات معامل التوجيه 10 :

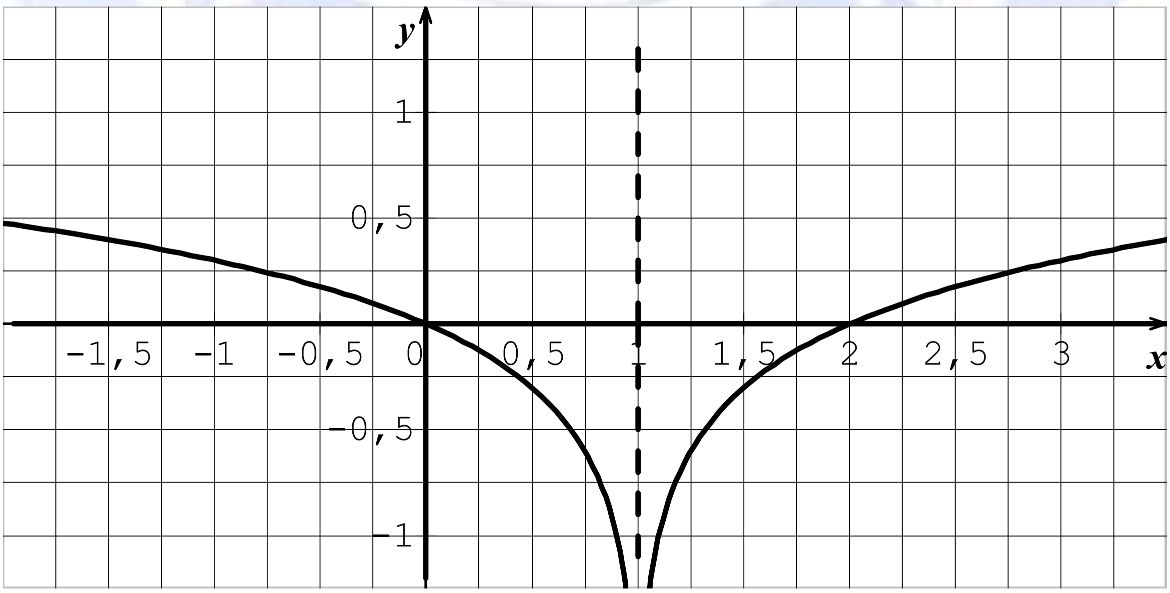
$f'(x) = 10$ و منه : $\frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x-1} = 10$

إذن : $10(\ln 10).(x-1) = 1$ وعليه : $x - 1 = \frac{1}{10.\ln 10}$

وعليه : $x = 1 + \frac{1}{\ln 10}$ إذن هناك مماس واحد في النقطة ذات

الفاصلة $1 + \frac{1}{\ln 10}$ معامل توجيهه 10 .

5- إنشاء (C) :



- نقط التقاطع : $y = 0 : x = 0$

* $(C) \cap (y'y) = \{0\}$ * $|x-1| = 1 : y = 0$

و منه : $x - 1 = 1$ أو $x = 1 = -1$ وعليه : $x = 2$ أو $x = 0$

$(C) \cap (x'x) = \{O, A\}$ حيث : $A(2;0)$

6- المناقشة البيانية :

يتقاطع (C) و (Δ) في نقطتين متمايزتين .

التمرين 21 .

-1 $D_f =]0;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} -4 + 4\log x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -4 + 4\log x = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{4}{Ln10} \times \frac{1}{x}$$

و منه : $f'(x) > 0$ و عليه f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

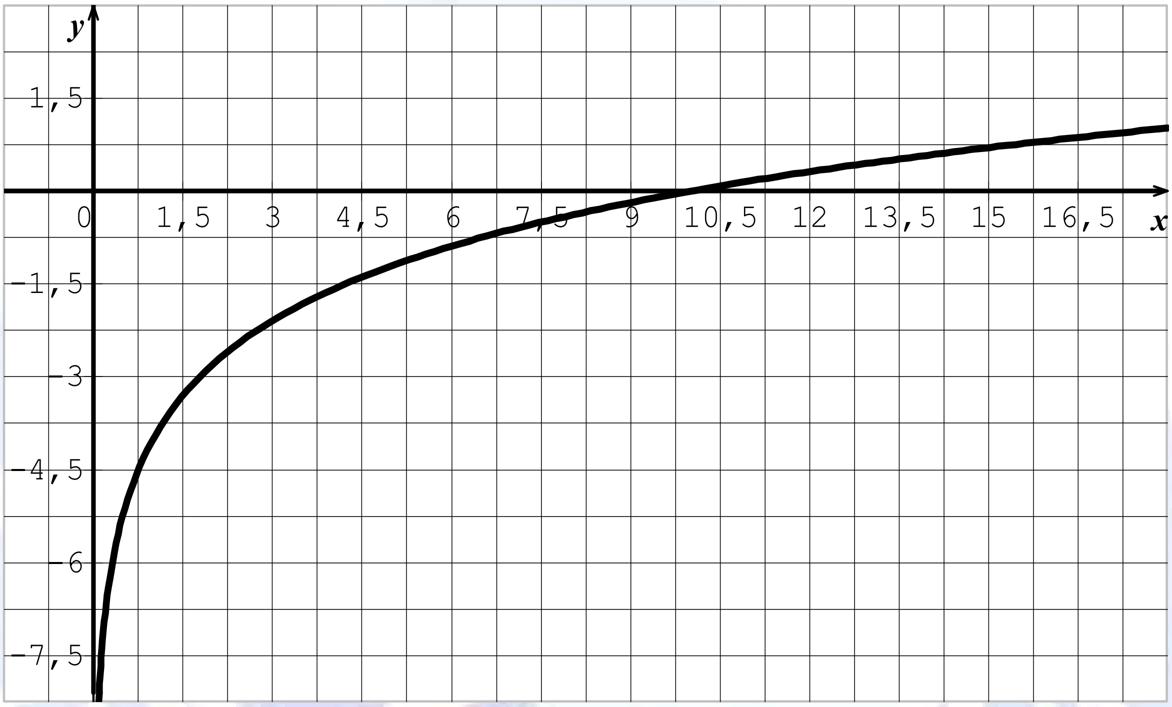
2 – دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

هناك فرعين لانهائيين و مستقيم مقارب معادلته : $x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{x} + \frac{\log x}{x} = 0$$

و عليه يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه محور الفواصل .

3 – إنشاء (C) :



التمرين 22 .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \; , \; \log x \neq 0\}$$

- دراسة التغيرات : $D_f =]0;+1[\; ; \;]1;+\infty[$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{1}{\log x} = 0$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} \frac{1}{\log x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} \frac{1}{\log x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log x} = 0$$

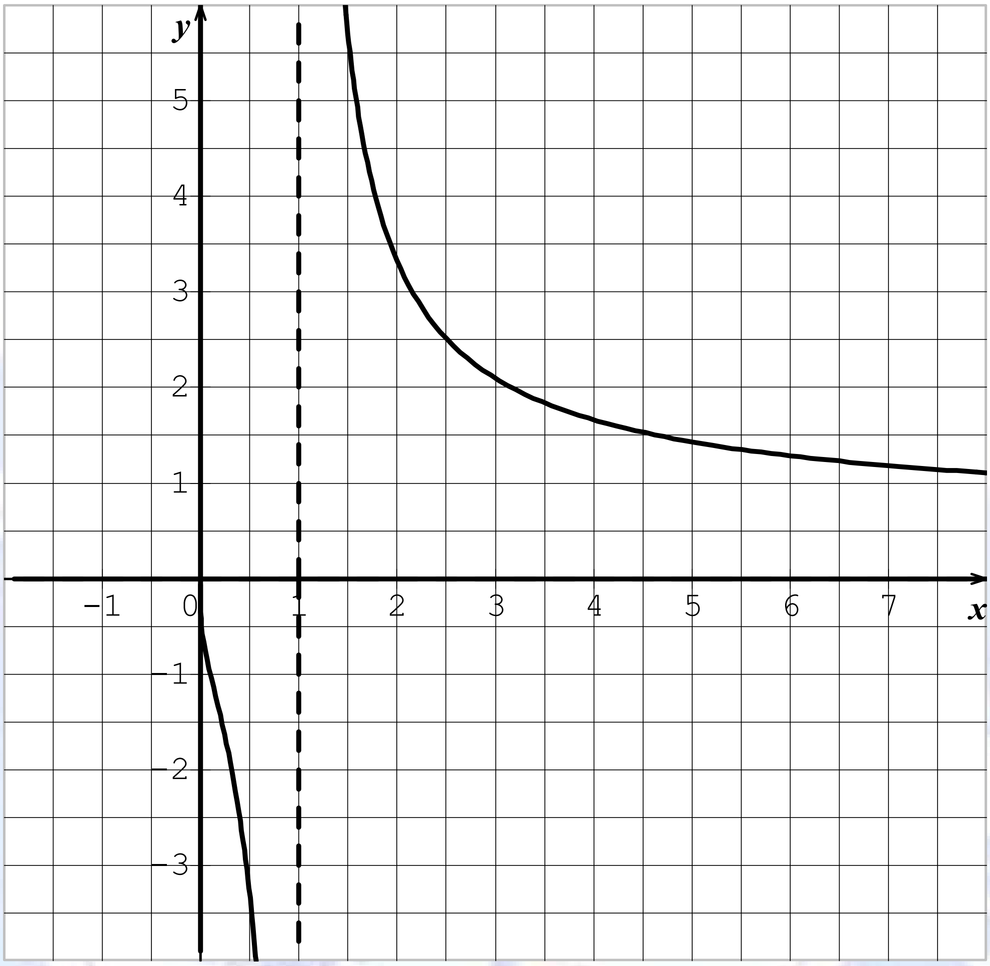
$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{-1}{(x\ln 10)(\log x)^2}$$

وعليه $f'(x) < 0$ و منه f متناقصة تماما على كل من المجالين $]0;1[$ و $]1;+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 0	

إنشاء (C) :

$x = 1$, $y = 0$ معادلتي المستقيمين المقاربين .



التمرين 23

دراسة التغيرات : $D_f =]0;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\log x - 1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}(\log x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\ln 10}.\frac{1}{x}.x - 1(\log x - 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\ln 10} - \log + 1}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\ln 10}-\frac{\ln x}{\ln 10}+1}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-\ln x+\ln 10}{x^2\ln 10}=\frac{1+\ln\frac{10}{x}}{x^2\ln 10}$$

$f'(x)=0$ تكافئ : $\ln\frac{10}{x}=-1$ و منه : $\frac{10}{x}=e^{-1}$

و عليه : $10=xe^{-1}$ أي : $x=\frac{10}{e^{-1}}$ إذن : $x=10e$

$f'(x)>0$ تكافئ : $\ln\frac{10}{x}>-1$ و منه : $\frac{10}{x}>e^{-1}$

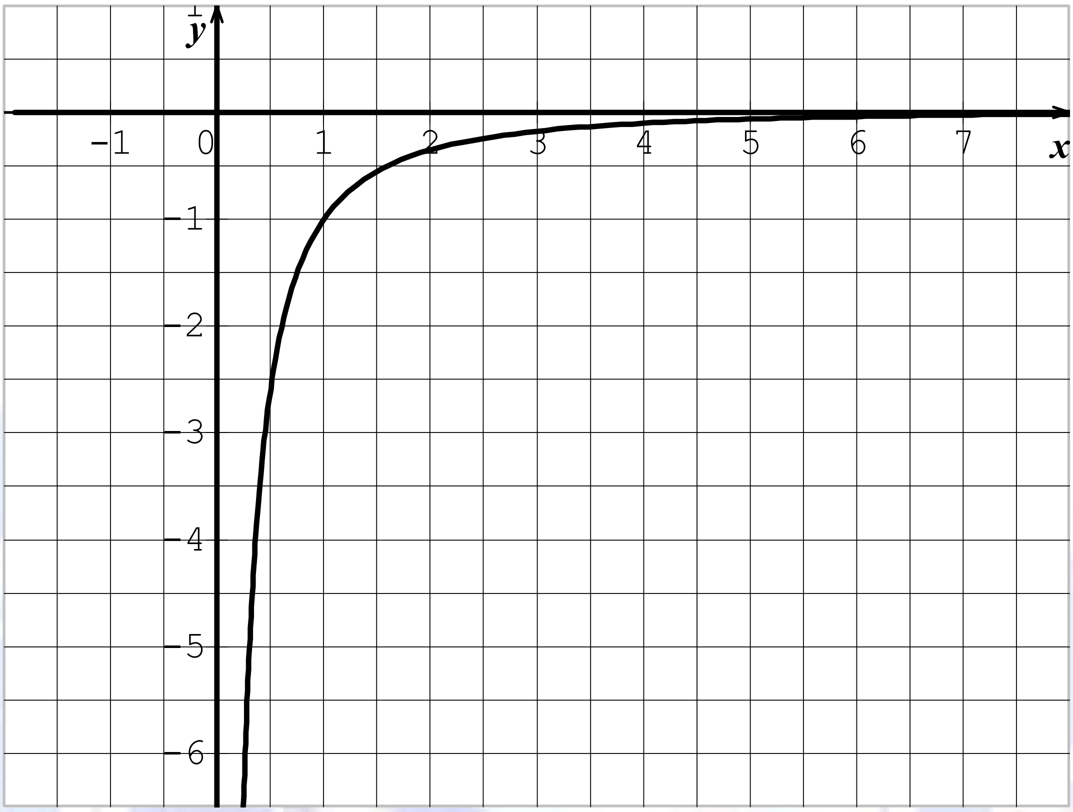
أي : $10>xe^{-1}$ وعليه : $x<10e$

و منه : f متزايدة تماما على المجال $]0\ ;\ 10e]$ و متناقصة تماما على $[10e\ ;\ +\infty[$

x	0		$10e$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(10e)$	↘	0

إذن : $f(10e)=\frac{\log 2e-1}{2e}\simeq 0,02$

إنشاء المنحني :


y
x
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
-1
-2
-3
-4
-5
-6