3 – الدوال الأصلية

الكفاءة المستهدفة

1- تعيين دالة أصلية لدالة مستمرة على مجال .

2 - تعيين دالة أصلية لدالة مألوفة .

3- تعيين الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة y_0 **من أجل القيمة** x_0 **للمتغير**

تصميم الدرس

أنشطة

1 – تعريف

2 – وجود الدوال الأصلية

3 – مجموعة الدوال الأصلية لدالة على مجال

4 – الدالة الأصلية التي تأخذ القيمة y_0 من أجل القيمة x_0 للمتغير

5 – جدول الدوال الأصلية المألوفة

6 – البحث عن الدوال الأصلية

تمـارين و مشكلات

الحـلـــــــول

أنشطة

النشاط 1 :

α و β عددان حقيقيان

f و g دالتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ ،

$$g(x)=\frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1}$$

عين α و β بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x :

$g'(x)=f(x)$ ؛ ماذا نستنتج ؟

الحل :

تعيين α و β :

$$g'(x)=\frac{\alpha\left(x^2+x+1\right)-(\alpha x+\beta)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$g'(x)=\frac{\alpha x^2+\alpha x+\alpha-2\alpha x^2-\alpha x-2\beta x-\beta}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$g'(x)=\frac{-\alpha x^2-2\beta x+\alpha-\beta}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

و بما أن $g'(x)=f(x)$ فإن : $\begin{cases}-\alpha=1\\-2\beta=2\\\alpha-\beta=0\end{cases}$

و عليه : $\alpha=-1$ و $\beta=-1$

و منه : $g(x)=\dfrac{-x-1}{x^2+x+1}$

نستنتج أن : g دالة أصلية للدالة f .

النشاط 2 :

نعتبر الدالتان g و h المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$h(x)=\frac{4x^2-5x+10}{2x^2-3x+5} \text{ ، } g(x)=\frac{x}{2x^2-3x+5}$$

عين كل من g' و h' ؛ ماذا نلاحظ ؟

الحل :

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$g'(x)=\frac{1\times\left(2x^2-3x+5\right)-(4x-3)\times x}{\left(2x^2-3x+5\right)^2}$$

$$g'(x)=\frac{2x^2-3x+5-4x^2+3x}{\left(2x^2-3x+5\right)^2}$$

إذن : $$g'(x)=\frac{-2x^2+5}{\left(2x^2-3x+5\right)^2}$$

الدالة h تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$h'(x)=\frac{(8x-5)\left(2x^2-3x+5\right)-(4x-3)\left(4x^2-5x+10\right)}{\left(2x^2-3x+5\right)^2}$$

$$h'(x)=\frac{16x^3-24x^2+40x-10x^2+15x-25-16x^3}{\left(2x^2-3x+5\right)^2}+$$

$$\frac{20x^2-40x+12x^2-15x+30}{\left(2x^2\text{-}3x+5\right)^2}$$

و منه : $h'(x)=\dfrac{-2x^2+5}{\left(2x^2-3x+5\right)^2}$

الاستنتاج لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x)=h'(x)=f(x)$$

حيث : $f(x)=\dfrac{-2x^2+5}{\left(2x^2-3x+5\right)^2}$

و نقول أن g و h دالتان أصليتان لنفس الدالة f .

1 – تعريف :

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$

نسمي دالة أصلية للدالة f على I كل دالة g مجموعة تعريفها I

و قابلة للاشتقاق على I

وتحقق : من أجل كل عنصر x من I : $g'(x) = f(x)$

الأمثلة :

1) الدالة $g : x \mapsto 4$ هي دالة أصلية للدالة $f : x \mapsto 0$ على $\mathbb{R}$

2) الدالة $g : x \mapsto x^3 + 4x$ هي دالة أصلية للدالة

$f : x \mapsto 3x^2 + 4$ على $\mathbb{R}$

3) الدالة $g : x \mapsto \sqrt{x}$ هي دالة أصلية للدالة $f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ على المجال

$]0;+\infty[$

4) الدالة $g : x \mapsto \cos x$ هي دالة أصلية للدالة

$f : x \mapsto \sin x$ على $\mathbb{R}$

5) الدالة $g : x \mapsto x^2 + \sin x$ هي دالة أصلية للدالة

$f : x \mapsto 2x + \cos x$ على $\mathbb{R}$

2 – وجود الدوال الأصلية :

مبرهنة 1 (تقبل دون برهان) :

كل دالة مستمرة على مجال تقبل على الأقل دالة أصلية على هذا المجال

العكس غير صحيح :

ليست كل دالة غير مستمرة لا تقبل دوال أصلية .

مثال مضاد :

الدالة f المعرفة كما يلي :

من أجل $x \neq 0$: $f(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

و من أجل $x = 0$: $f(x) = 0$

غير مستمرة عند 0 (لأنها لا تقبل نهاية عند 0)

لكنها تقبل الدالة g على الأقل المعرفة كما يلي :

من أجل $x \neq 0$: $g(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$

و من أجل $x = 0$: $g(x) = 0$

كدالة أصلية على $\mathbb{R}$

و عليه فشرط الاستمرارية لوجود دالة أصلية شرط كاف و غير لازم .

أي يكفي أن تكون دالة f مستمرة على مجال I لتقبل دالة أصلية على I

3 – مجموعة الدوال الأصلية لدالة على مجال :

مبرهنة :

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي مجموعة الدوال g_λ التي مجموعة تعريفها I و المعرفة بما يلي : $g_\lambda(x) = g(x) + \lambda$

حيث g هي إحدى الدوال الأصلية للدالة f

البرهان :

لدينا g هي إحدى الدوال الأصلية للدالة f على I

و عليه : من أجل كل عدد x من I فإن : $g'(x) = f(x)$

و لدينا : g_λ مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I

و عليه : من أجل كل عدد x من I فإن $g'_\lambda(x) = f(x)$

و عليه من أجل كل عدد x من I : $g'_\lambda(x) = g'(x)$

و منه $g'_\lambda(x) - g'(x) = 0$ أي أن : $(g_\lambda - g)'(x) = 0$

إذن : $g_\lambda - g$ دالة ثابتة .

و عليه يوجد عدد ثابت λ بحيث من أجل كل x من I

$$g_\lambda(x) - g(x) = \lambda$$

و بالتالي : $g_\lambda(x) = g(x) + \lambda$

مثال1 :

الدالة g : $x \mapsto x^4 - x$ دالة أصلية على $\mathbb{R}$

للدالة f : $f(x) = 4x^3 - 1$ و عليه مجموعة الدوال الأصلية g_λ

للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة كما يلي : $g_\lambda(x) = x^4 - x + \lambda$

حيث λ عدد حقيقي ثابت .

مثال2 :

الدالة g : $x \mapsto \cos x - \sin x$ دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة .

f : $x \mapsto -\sin x - \cos x$ و عليه مجموعة الدوال الأصلية g_λ للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بالعبارة : $g_\lambda(x) = \cos x - \sin x + \lambda$

حيث λ عدد حقيقي ثابت .

4 – الدالة الأصلية التي تأخذ القيمة y_0 من أجل القيمة x_0 للمتغير :

مبرهنة :

لكل دالة مستمرة على I دالة أصلية وحيدة على I تأخذ قيمة معينة y_0 من أجل قيمة معلومة x_0 ، من I ، للمتغير x .

البرهان :

لتكن f دالة مستمرة على المجال I و g دالة أصلية لها على I . x_0 عدد ينتمي إلى I .

y_0 عدد حقيقي معطى .

نعلم أن مجموعة الدوال الأصلية g_λ للدالة f على I معرفة

بالعبارة : $g_\lambda(x) = g(x) + \lambda$ حيث λ عدد حقيقي ثابت .

$g_\lambda(x_0) = y_0$ و منه : $g(x_0) + \lambda = y_0$ و عليه :

$\lambda = y_0 - g(x_0)$ و بالتالي : $g_\lambda(x) = g(x) + y_0 - g(x_0)$

و منه توجد قيمة وحيدة للعدد λ إذن توجد دالة أصلية وحيدة للدالة f .

مثال :

نعلم أن مجموعة الدوال الأصلية g_λ للدالة f : $x \mapsto x^2 - 4$

معرفة بالعبارة : $g_\lambda(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x + \lambda$ حيث : $\lambda \in \mathbb{R}$

لنبحث عن الدالة الأصلية التي تأخذ القيمة 4 من أجل $x = 0$

أي : $g_\lambda(0)=4$ و بالتالي : $\frac{0^3}{3}-4(0)+\lambda=4$

و منه : $\lambda=4$

و عليه : $g_\lambda(x)=\frac{x^4}{3}-4x+4$ و هي دالة أصلية وحيدة .

5 – جدول الدوال الأصلية المألوفة :

من جدول المشتقات و من تعريف الدوال الأصلية نستنتج الجدول الآتي الذي يعطي الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة g في المجال I . f يدل في هذا الجدول على عدد حقيقي ثابت λ :

الدالة f	الدالة g	المجال I
$f(x)=0$	$g(x)=\lambda$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\in\mathbb{N}$	$g(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\lambda$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$	$g(x)=\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+\lambda$	$\mathbb{R}_+^*$ أو $\mathbb{R}_-^*$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$g(x)=2\sqrt{x}+\lambda$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x)=\sin x$	$g(x)=-\cos x+\lambda$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$g(x)=\sin x+\lambda$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ أو $f(x)=1+\tan^2 x$	$g(x)=\tan x+\lambda$	كل المجال من الشكل $\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

6 – البحث عن الدوال الأصلية :

للبحث عن الدوال الأصلية لدالة ما يمكن استعمال الخواص الآتية التي تستنتج مباشرة من خواص الدوال المشتقة .

خاصية 1 :

إذا كانت g_1 و g_2 دالتان أصليتان للدالتين f_1 و f_2 على الترتيب على المجال I فإن الدالة $g_1 + g_2$ دالة أصلية للدالة $f_1 + f_2$ على I .

مثال :

الدالة: $x \mapsto x + \cos x$ هي دالة أصلية للدالة :

$f : x \mapsto 1 - \sin x$ على $\mathbb{R}$.

خاصية 2 :

إذا كانت g دالة أصلية للدالة f على المجال I و كان λ عددا حقيقيا فإن الدالة λg دالة أصلية للدالة λf .

مثال :

الدالة: $x \mapsto 2\sin x$ هي دالة أصلية للدالة: $x \mapsto 2\cos x$ على $\mathbb{R}$.

خاصية 3 :

n عدد طبيعي غير معدوم .

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن :

الدالة : $\frac{1}{n+1} f^{n+1}$ دالة أصلية للدالة : $f' . f^n$ على I

مثال :

الدالة : $x \mapsto 2x\left(x^2+1\right)^2$ هي دالة أصلية للدالة :

$x \mapsto \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^3$ على $\mathbb{R}$

خاصية 4 :

n عدد طبيعي غير معدوم . f دالة لا تنعدم على المجال I إذا كانت

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و دالتها المشتقة f'

فإن الدالة : $\dfrac{-1}{(n-1)f^{n-1}}$ دالة أصلية للدالة $\dfrac{f'}{f^n}$ على I .

مثال :

الدالة : $x \mapsto \dfrac{-1}{2\left(x^2+1\right)^2}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^3}$ على $\mathbb{R}$.

خاصية 5 :

f دالة تقبل الاشتقاق على المجال I .

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و دالتها المشتقة f' فإن الدالة : $\sqrt{f}$ دالة أصلية للدالة $\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$ على I .

مثال :

الدالة : $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ هي دالة أصلية للدالة :

$$x \mapsto \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

خاصية 6 :

f دالة مستمرة على المجال I و g دالة أصلية لها على I_1 .

h دالة معرفة في مجال I_2 و تأخذ قيمتها في I_1

إذا كانت h تقبل الاشتقاق على I_2 و كانت h' دالتها المشتقة مستمرة على I_2 فإن الدالة :

$x \mapsto g\left[h(x)\right]$ دالة أصلية للدالة

$x \mapsto h'(x).f\left[h(x)\right]$ على المجال I_2 .

مثال :

نعتبر الدالة g : $\quad x \mapsto a\cos(ax+b)$

و هي من الشكل : $x \mapsto h'(x).f\left[h(x)\right]$

حيث : $h(x) = ax + b$ و $h'(x) = a$ و $f(x) = \cos x$

و نعلم أن الدالة الأصلية للدالة g هي الدوال :

$$x \mapsto \sin(ax+b) + \lambda$$

نتائج :

- الدوال الأصلية للدالة : $x \mapsto \cos(ax+b)$ هي الدوال

$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + \lambda$ حيث a و b عددان حقيقيان

مع $a \neq 0$ و $\lambda \in \mathbb{R}$.

- الدوال الأصلية للدالة : $x \mapsto \sin(ax+b)$ هي الدوال :

$x \mapsto \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + \lambda$ حيث a و b عددان حقيقيان

مع $a \neq 0$ و $\lambda \in \mathbb{R}$.

تمـارين و مشكلات

التمرين 1 .

ضع علامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة× أمام كل جملة خاطئة :

1 – إذا كانت g دالة أصلية لدالة f على مجال I

فإن f هي الدالة المشتقة للدالة g .

2 – الدالة: $x \mapsto x^3 - 5x$ هي الدالة الأصلية الوحيدة

للدالة: $x \mapsto 3x^2 - 5$ على $\mathbb{R}$.

3 – كل دالة مستمرة على مجال يمكن تعيين دالتها الأصلية.

4 – إذا كانت g دالة أصلية لدالة f فإن g^2 دالة أصلية

للدالة f^2 .

5 – الدالة g' هي دالة أصلية للدالة g'' .

6 – كل دالة مستمرة على مجال I تقبل دالة أصلية وحيدة

تنعدم عند عدد x_0 من I .

7 – الدالة $x \mapsto \sin 2x$ هي الدالة الأصلية للدالة

$x \mapsto \cos 2x$ على $\mathbb{R}$.

8 – الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على $\mathbb{R}$.

9 – الدالة الأصلية لدالة كثير حدود هي دالة كثير حدود .

10 – الدالة : $f^{(n)}$ هي إحدى الدوال الأصلية للدالة f .

11 – الدالة: $x \mapsto \cos x + \sin x$ هي الدالة الأصلية

للدالة: $x \mapsto \sin x - \cos x$.

12 – إذا كانتا g و h دالتان أصليتان لنفس الدالة f على مجال I

فإنه من أجل كل عدد x من I : $h(x) - g(x) = \lambda$.

13 – الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ لاتقبل دوال أصلية على المجال $]0;+\infty[$

14 – توجد دالة كثير حدود إحدى دوالها الأصلية هي نفسها .

15 – الدالة $x \mapsto x^3$ هي الدالة الأصلية التي تنعدم عند0

للدالة $x \mapsto 3x^2$

16 – إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فهي تقبل دالة أصلية

وحيدة على هذا المجال .

17 – كل دالة معرفة على مجال I تقبل دالة أصلية على I .

18- كل دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$ تقبل دوال أصلية

على $[a;b]$.

19 – الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto (x^2+1)^2$ هي الدوال

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ ، } x \mapsto \frac{1}{3}(x^2+1)^3 + \lambda$$

20 – الدوال الأصلية للدالة : $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ هي الدوال :

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1} + \lambda$$

التمرين 2.

عين الدوال الأصلية للدالة f في كل مما يلي معينا مجال الدراسة :

$1)\ f(x) = 2x - 1$ $\qquad$ $2)\ f(x) = x^2 - 4x + 3$

$3)\ f(x) = -3x^3 + 5x^2 - 4$ $\qquad$ $4)\ f(x) = x^4 - x^3$

$5)\ f(x) = \frac{4}{x^2}$ $\qquad$ $6)\ f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

$$7)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad 8)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$9)\ f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x \qquad 10)\ f(x)=\frac{\sin 2x}{\cos^3 x}$$

التمرين 3.

عين الدوال الأصلية للدالة f في كل مما يلي معينا مجال الدراسة

$$1)\ f(x)=x^2\left(x^3+1\right)^2 \qquad 2)\ f(x)=(x+1)\left(x^2+2x-1\right)^3$$

$$3)\ f(x)=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} \qquad 4)\ f(x)=\frac{x-1}{\left(x^2-2x+4\right)^3}$$

$$5)\ f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} \qquad 6)\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$7)\ f(x)=\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \qquad 8)\ f(x)=\cos 2x-\sin 3x$$

$$9)\ f(x)=\sin x.\cos^3 x \qquad 10)\ f(x)=\cos 2x.\sin 2x$$

التمرين 4

عين الدالة الأصلية g للدالة f على المجال I التي تحقق $g(0)=0$ في كل حالة مما يلي

:

$$1)\ f(x)=sim\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2} \qquad 2)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$I=\mathbb{R} \qquad I=\left]-1;+\infty\right[$$

$$3)\ f(x)=\frac{1}{(x+2)^3} \qquad 4)\ f(x)=x^n-1\ ;\ n\in\mathbb{N}$$

$$I=\left]-\infty;-2\right[\qquad I=\mathbb{R}$$

$5)\ f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\text{I}=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

$6)\ f(x)=x+1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

$\text{I}=]-1;+\infty[$

$7)\ f(x)=\sin x.\cos^n x$

$\text{I}=\mathbb{R}$ ، $n\in\mathbb{N}$

$8)\ f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^3}$

$\text{I}=]-\infty;-2[$

التمرين 5

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\sin^3 x$

1) عين الدوال الأصلية g للدالة f .

2) استنتج الدالة الأصلية h للدالة f و التي تأخذ القيمة 2 من أجل $x=0$

التمرين 6

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x^3-3x}{(x-1)^2}$$

1) عين D_f مجموعة التعريف للدالة f .

2) بين أنه من أجل كل عدد x من D_f فإن :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-1)^2}$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

3) عين الدوال الأصلية g للدالة f على $]1;+\infty[$.

4) استنتج الدالة الأصلية h التي تنعدم عند $x=2$

للدالة f على $]1;+\infty[$.

التمرين 7

1) ادرس تغيرات الدالة g حيث : $g(x)=\sqrt{3-2x}$

2) نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{3-2x}$

عين الأعداد الحقيقية α و β و γ بحيث تكون f دالة أصلية للدالة g على المجال $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$.

3) أنشئ التمثيل البياني للدالة g بآلة بيانية .

التمرين 8

نعتبر الدالة f : $f(x)=\sin x+\sin^3 x$

1) احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

2) بين أنه يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f''(x)+\alpha f(x)=\beta \sin x$

3) استنتج الدوال الأصلية g للدالة f على $\mathbb{R}$.

4) استنتج الدالة الأصلية h للدالة f بحيث : $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

التمرين 9

f دالة فردية و مستمرة على $\mathbb{R}$. F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

G دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $G(x)=F(x)-F(-x)$

بين أن G دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

التمرين 10

f دالة معرفة على $\mathbb{R}_+$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

(C) تمثيلها البياني .

1 – ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}_+$

2 – بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا .

3 – لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$ و التي تنعدم عند 0 . بين أن F موجودة .

4 – استنتج اتجاه تغير الدالة F .

5 – نعرف على $\mathbb{R}_+$ الدالتان H و K كما يلي :

$$H(x)=F(x)-x \text{ و } K(x)=F(x)-\frac{2}{3}x$$

- ادرس اتجاه تغير الدالتان H و K على $\mathbb{R}_+$.
- استنتج أنه من أجل كل عدد x حيث $x \geq 0$

فإن : $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

- استنتج $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

6 – استنتج أن المعادلة $F(x)=\pi$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+$.

- بين أن: $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$

التمرين 11

نعتبر المعادلة التفاضلية : $y' = x^2 + \frac{1}{(x+1)^2}$

- عين حلا للمعادلة التفاضلية على $\mathbb{R}-\{-1\}$.
- استنتج الحل الذي ينعدم من أجل $x=0$.
- نضع : $y=f(x)$. عين الدالة f .
- ادرس تغيرات الدالة f .
- ادرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) الممثل لتغيرات الدالة f .
- أنشئ (C) بعد حساب : $f(-2), f(0), f(2), f(1)$.

التمرين 12

عين الحل الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x = 2$ للمعادلة التفاضلية :

$y' = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}$ على $\mathbb{R}$.

- بوضع : $y = f(x)$. ادرس اتجاه تغير الدالة f .

- ادرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) الممثل لتغيرات f .

- احسب كل من: $f(0), f(2), f(3), f(-2), f(-4), f(-5)$

أعطي القيم مدورة إلى 10^{-2} ثم أنشئ (C) .

الحـــــــــلـــول

التمرين 1.

1) √	2) ×	3) ×	4) ×
5) √	6) ×	7) ×	8) ×
9) √	10) ×	11) √	12) √
13) ×	14) √	15) √	16) ×
17) ×	18) √	19) ×	20) √

التمرين 2.

تعيين الدوال الأصلية :

1) لدينا : $f(x)=2x-1$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$g(x)=x^2-x+\lambda \quad ,\lambda\in\mathbb{R}$$

2) لدينا : $f(x)=x^2-4x+3$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$g(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+\lambda \quad ,\lambda\in\mathbb{R}$$

3) لدينا : $f(x)=-3x^3+5x^2-4$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$g(x)=-\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-4x+\lambda \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

4) لدينا : $f(x)=x^4-x^3$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

$$g(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\lambda \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

5) لدينا : $f(x)=\frac{4}{x^2}$ و منه : $D_f=\mathbb{R}^*$

الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ و عليه تقبل دوال أصلية

g على كل منهما معرفة بالعبارة : $g(x)=\frac{-4}{x}$.

6) لدينا : $6)f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$ و منه : $D_f=\mathbb{R}^*$

الدالة f هي مجموع دالتين ناطقتين فهي مستمرة على مجموعة التعريف و عليه فهي دوال أصلية

على كل من المجالين :

$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$ معرفة بالعبارة :

$$g(x)=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\lambda \quad ,\lambda\in\mathbb{R}$$

7) لدينا : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ و منه : $D_f=\mathbb{R}_+^*$

الدالة f هي مقلوب دالة صماء مستمرة و عليه فهي مستمرة على D_f و منه تقبل دوال أصلية

g حيث :

$$g(x)=2\sqrt{x}+\lambda \quad ; \ \lambda\in\mathbb{R}$$

8) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ و منه : $D_f=]1;+\infty[$

الدالة f مستمرة لأنها مقلوب مركب دالتين مستمرتين و عليه تقبل دوال أصلية g حيث :

$$g(x)=2\sqrt{x-1}+\lambda \quad ; \ \lambda\in\mathbb{R}$$

9) $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$ و منه : $D_f=\mathbb{R}$

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و عليه تقبل دوال أصلية g

و لدينا : $f(x)=\cos 2x$

و منه : $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\lambda \quad ; \ \lambda\in\mathbb{R}$

10) لدينا : $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos^3 x}$

ومنه : $D_f=\{x\in\mathbb{R} : \cos x\neq 0\}$

إذن : $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \;\; ; \;\; k\in\mathbb{R}$

أي : $D_f=\left]\dfrac{\pi}{2}+k\pi \; ; \; \dfrac{\pi}{2}+(k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[\;,\; k\in\mathbb{R}$

و عليه f مستمرة على D_f لأنها حاصل قسمة مركب دوال مثلية

و كثيرات حدود تقبل دوال أصلية g

و لدينا : $f(x)=\dfrac{2\sin x.\cos x}{.\cos^3 x}=\dfrac{2\sin x}{.\cos^2 x}=-2.\dfrac{-\sin x}{[\cos x]^2}$

و منه : $g(x)=-2\times\dfrac{-1}{\cos x}+\lambda$

إذن : $g(x)=\dfrac{2}{\cos x}+\lambda$ حيث λ ثابت حقيقي .

التمرين 3.

تعيين الدوال الأصلية للدالة f في كل مما يلي :

1) لدينا : $f(x)=x^2\left(x^3+1\right)^2$ و $D_f=\mathbb{R}$

و منه : $f(x)=\dfrac{1}{3}.3x^2\left(x^3+1\right)^2$

إذن : $g(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\left(x^3+1\right)^3+\lambda \;\; ; \;\; \lambda\in\mathbb{R}$

أي : $g(x)=\dfrac{1}{9}\left(x^3+1\right)^3+\lambda$.

2) لدينا : $2)\, f(x)=(x+1)(x^2+2x-1)^3$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

و منه : $f(x)=\frac{1}{2}.(2x+2)(x^2+2x-1)^3$

إذن : $g(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}(x^2+2x-1)^4+\lambda \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$

أي : $g(x)=\frac{1}{8}(x^2+2x-1)^4+\lambda \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

3) لدينا : $f(x)=\frac{x}{(x^2+1)^2}$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

و منه : $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

إذن : $g(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x^2+1}+\lambda \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

4) لدينا : $f(x)=\frac{x-1}{(x^2-2x+4)^3}$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

و منه : $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x-2}{(x^2-2x+4)^2}$

إذن : $g(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{x^2-2x+4}+\lambda \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

5) لدينا : $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

و منه : $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}$

إذن : $g(x)=\frac{1}{4}\times\sqrt{x^4+1}+\lambda \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

6) لدينا : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ ؛ $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

و منه : $f(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$

إذن : $g(x)=\sqrt{x^2-1}+\lambda \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$.

7) لدينا : $f(x)=\frac{1}{2}cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

إذن : $g(x)=\frac{1}{2}sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\lambda \quad ; \lambda\in\mathbb{R}$

8) لدينا : $f(x)=cos\,2x-sin\,3x$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

إذن : $g(x)=\frac{1}{2}sin\,2x+\frac{1}{3}cos\,3x+\lambda \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$

9) لدينا : $f(x)=sin\,x.cos^3x$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

إذن : $g(x)=\frac{1}{4}cos^4x+\lambda \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$

10) لدينا : $f(x)=cos\,2x.sin\,2x$ ؛ $D_f=\mathbb{R}$

و منه : $f(x)=\frac{1}{2}\times 2\,sin\,2x.cos\,2x$

و عليه : $f(x)=\frac{1}{2}sin\,4x$

إذن : $g(x)=\frac{-1}{2}\times\frac{1}{4}cos\,4x+\lambda$

أي : $g(x)=\frac{-1}{8}cos\,4x+\lambda \quad ; \quad \lambda\in\mathbb{R}$

التمرين 4.

تعيين الدوال الأصلية :

1) لدينا : $f(x)=sin\frac{x}{2}+cos\frac{x}{2}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

إذن : $g(x)=\frac{-1}{\frac{1}{2}}cos\frac{x}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}sin\frac{x}{2}+\lambda$

أي : $g(x)=-2\,cos\frac{x}{2}+2\,sin\frac{x}{2}+\lambda$

لكن : $g(0)=0$ ومنه : $-2+0+\lambda=0$ أي: $\lambda=2$

إذن: $g(x)=-2\,cos\frac{x}{2}+2\,sin\frac{x}{2}+2$.

2) لدينا : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ؛ $I=]-1;+\infty[$

و منه : $f(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

إذن : $g(x)=2\sqrt{x+1}+\lambda$

لكن : $g(0)=0$ ومنه : $2+\lambda=0$ أي : $\lambda=-2$

إذن : $g(x)=2\sqrt{x+1}-2$.

3) لدينا : $f(x)=\frac{1}{(x+2)^3}$ ؛ $I=]-\infty;-2[$

إذن : $g(x)=\frac{-1}{2(x+2)^2}+\lambda$

لكن : $g(0)=0$ و منه: $-\frac{1}{8}+\lambda=0$ أي: $\lambda=\frac{1}{8}$

إذن : $g(x)=\frac{-1}{2(x+2)^2}+\frac{1}{8}$.

4) لدينا : $n\in\mathbb{N}$; $f(x)=x^n-1$ ؛ $I=\mathbb{R}$

إذن : $g(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}-x+\lambda$

لكن : $g(0)=0$ و منه : $0-0+\lambda=0$ أي : $\lambda=0$

إذن : $g(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}-x$.

5) لدينا : $f(x)=\frac{1}{cos^2 x}$ ؛ $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

إذن : $g(x)=tan\,x+\lambda$

لكن : $g(0)=0$ و منه: $tan\,0+\lambda=0$ أي: $\lambda=0$

إذن : $g(x)=tan\,x$.

6) لدينا : $6)f(x)=x+1-\frac{1}{(x+1)^2}$ ؛ $I=]-1\ ;+\infty[$

إذن : $g(x)=\frac{x^2}{2}\ +\ x\ +\ \frac{1}{x+1}\ +\lambda$

لكن : $g(0)=0$ و منه: $1+\lambda=0$ أي: $\lambda=-1$

إذن : $g(x)=\frac{x^2}{2}+x\frac{1}{x+1}-1$.

7) لدينا : $f(x) = \sin x.\cos^n x$ $I=\mathbb{R}$

و منه : $f(x) = -1\times(-\sin x)(\cos x)^n$

إذن : $g(x) = \frac{-1}{n+1}\cos^{n+1} x + \lambda$

لكن: $g(0) = 0$ و منه: $\frac{-1}{n+1} + \lambda = 0$ أي: $\lambda = \frac{-1}{n+1}$

إذن : $g(x) = \frac{-1}{n+1}\cos^{n+1} x + \frac{1}{n+1}$

8) لدينا : $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3}$ ؛ $I =]-\infty ; -2[$

إذن : $g(x) = \frac{-1}{x+2} - \frac{1}{2(x+2)^2} + \lambda$

لكن: $g(0) = 0$ و منه: $\frac{-1}{2} - \frac{1}{8} + \lambda = 0$ أي: $\lambda = \frac{5}{8}$

إذن : $g(x) = \frac{-1}{n+2} - \frac{1}{2(n+2)^2} + \frac{5}{8}$.

التمرين 5.

1 – تعيين الدوال الأصلية للدالة f :

لدينا : $\sin^3 x = \sin x.\sin^2 x = \sin x(1-\cos^2 x)$

وعليه : $f(x) = \sin x - \sin x.\cos^2 x$

إذن : $g(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \lambda$

2 – استنتاج h حيث : $h(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \lambda$

مع : $h(0) = 2$ ومنه: $-1 + \frac{1}{3} + \lambda = 0$ أي: $\lambda = \frac{2}{3}$

إذن : $h(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{3}$.

التمرين 6.

1 – مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2 – تعيين a,b,c :

$$f(x) = \frac{(ax+b)(x^2-2x+1)+c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b + c}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{ax^3 + (-2a+b)x^2 + (a+2b)x + b + c}{(x-1)^2}$$

و منه : $\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = 0 \\ a - 2b = -3 \\ b + c = 0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} a = 1 \\ b = +2 \\ c = -2 \end{cases}$

و عليه : $f(x) = x + 2 - \frac{2}{(x-1)^2}$

3 – تعيين الدوال الأصلية g :

$$f(x)=x+2-\frac{2}{(x-1)^2}$$

و منه : $g(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{2}{x-1}+\lambda$ ؛ $\lambda\in\mathbb{R}$.

4- استنتاج الدالة الأصلية h حيث : $h(2)=0$

لدينا : $h(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{2}{x-1}+\lambda$

و منه : $h(2)=2+4+2+\lambda$ أي : $h(2)=\lambda+8$

إذن : $\lambda+8=0$ و منه : $\lambda=-8$

إذن: $h(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{2}{x-1}-8$.

التمرين 7.

1 دراسة تغيرات g : $D_f=\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3-2x}=+\infty$ ؛ $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ <}} g(x)=0$

$$g'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{3-2x}}=\frac{-1}{\sqrt{3-2x}}$$

و منه: $g'(x)<0$ و عليه g متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\frac{3}{2}$
$g'(x)$	-
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0

2- تعيين : α,β,γ :

f دالة أصلية للدالة g تكافئ : $f'(x)=g(x)$ و لدينا :

$$f'(x)=(2\alpha x+\beta)\sqrt{3\text{-}2x}+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\times\frac{-2}{2\sqrt{3\text{-}2x}}$$

$$=(2\alpha x+\beta)\sqrt{3\text{-}2x}-(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\frac{\sqrt{3\text{-}2x}}{3\text{-}2x}$$

$$f'(x)=\frac{(2\alpha x+\beta)(3\text{-}2x)\sqrt{3\text{-}2x}-(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{3\text{-}2x}}{3-2x}$$

$$=\frac{\sqrt{3\text{-}2x}}{3\text{-}2x}\left(6\alpha x-4\alpha x^2+3\beta-2\beta x-\alpha x^2-\beta x-\gamma\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3\text{-}2x}}{3\text{-}2x}\times\left[-5\alpha x^2+(6\alpha-3\beta)x+3\beta-\gamma\right]$$

تكون f دالة أصلية للدالة g إذا و فقط إذا كان :

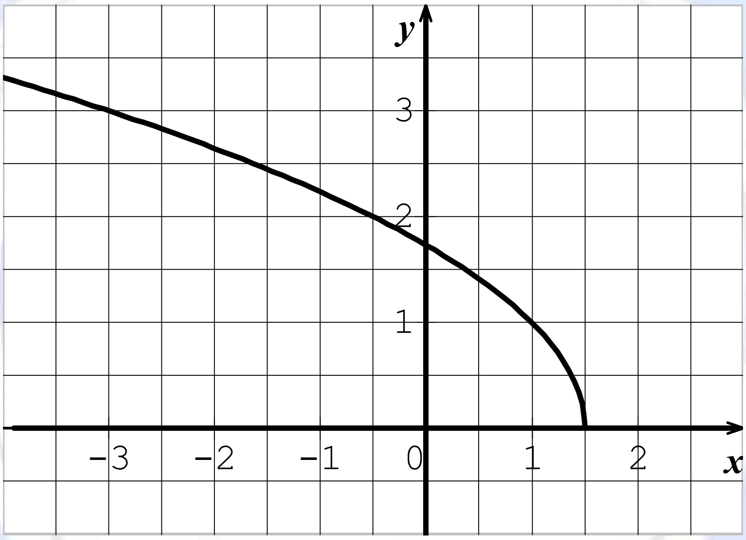
$$\frac{-5\alpha x^2+(6\alpha-3\beta)x+3\beta-\gamma}{3-2x}=1$$

و عليه : $-5\alpha x^2+(6\alpha-3\beta)x+3\beta-\gamma=3-2x$

و منه : $\begin{cases} -5\alpha = 0 \\ 6\alpha - 3\beta = -2 \\ 3\beta - \gamma = 3 \end{cases}$ و عليه : $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \dfrac{2}{3} \\ \gamma = -1 \end{cases}$

و منه : $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}x - 1\right)\sqrt{3 - 2x}$

3 – إنشاء بيان g :



التمرين 8.

1) حساب $f'(x)$ و $f''(x)$:

لدينا : $f'(x) = \cos x + 3\cos x \sin^2 x$

و منه : $f'(x) = \cos x\left(3 + \sin^2 x\right)$

$$f''(x) = -\sin x\left(3 + \sin^2 x\right) + \cos x\left(2\cos x \sin x\right)$$

$$f''(x) = \sin x\left[-3 - \sin^2 x + 2\cos^2 x\right]$$

2) نبين وجود α و β : $f''(x) + \alpha f(x) = \beta \sin x$

$$-3\sin x-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x+\alpha\sin x+\alpha\sin^3 x=\beta\sin x$$

$$(\alpha-3)\sin x-\sin^3 x+2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)\times\alpha\sin^3 x=\beta\sin x$$

$$(\alpha-3)\sin x-\sin^3 x+2\sin x-2\sin^3 x+\alpha\sin^3 x-\beta\sin x=0$$

$$(\alpha-\beta-1)\sin x+(\alpha-3)2\sin^3 x=0$$

و منه : $\begin{cases}\alpha-3=0\\ \alpha-\beta-1=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=2\end{cases}$

إذن : $f''(x)+3f(x)=2\sin x$

3) إيجاد الدوال الأصلية g للدالة f :

مما سبق : $f(x)=\frac{1}{3}\left(-f''(x)+2\sin x\right)$

و عليه : $g(x)=\frac{1}{3}\left(-f'(x)-2\cos x\right)+\lambda \quad , \quad \lambda\in\mathbb{R}$

إذن : $g(x)=\frac{1}{3}\left(\cos x.\left(3+\sin^2 x\right)-2\cos x\right)+\lambda$

أي : $g(x)=\frac{1}{3}\left(\cos x+\cos x.\sin^2 x\right)+\lambda$

4) تعيين الدالة الأصلية h حيث : $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

لدينا : $h(x)=\frac{1}{3}\left(\cos x+\cos x\sin^2 x\right)+\lambda$

ومنه : $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\sin^2\frac{\pi}{2}\right)$

إذن : $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lambda$

ومنه : $\lambda = 1$ إذن : $h(x) = \frac{1}{3}\left(\cos x + \cos x \sin^2 x\right) + \lambda$

وعليه : $h(x) = \frac{1}{3}\cos x\left(1 + \sin^2 x\right) + 1$

التمرين 9.

نبين أن G دالة ثابتة على $\mathbb{R}$:

لدينا : $G(x) = F(x) - F(-x)$

و لدينا : F دالة أصلية للدالة f و منه : $F'(x) = f(x)$

و بما أن f فردية فإن : $f(-x) = f(x)$

لدينا : $G'(x) = F'(x) - (-1)F'(-x)$

$$G'(x) = F'(x) + F'(-x)$$

$$G'(x) = f(x) + f(-x)$$

$$G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

و عليه : $G(x) = \lambda$ حيث : λ عدد ثابت .

التمرين 10.

1 – دراسة تغيرات f على $\mathbb{R}_+$:

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ ومنه : $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{2x\left(x^2+x+1\right) - (2x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3+2x^2+2x-2x^3-2x-x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

و منه f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ و متناقصة تماما على $[0;1]$

جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	↘	$\frac{2}{3}$	↗	1

2- نبين أن (C) يقبل مستقيم مقارب :

بما أن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=1$ فإن $y=1$ معادلة مستقيم مقارب .

3- نبين أن F موجودة وبما أنها دالة ناطقة فهي مستمرة على

مجموعة تعريفها و عليه فهي مستمرة على $\mathbb{R}_+$ و منه f تقبل

دالة أصلية F و هذه الدالة وحيدة لأنها تأخذ القيمة 0 عند 0 .

4- استنتاج تغير الدالة F :

لدينا : $F'(x)=f(x)$ حيث : $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ لكن :

$\frac{2}{3}\leq f(x)\leq 1$ وعليه : $F'(x)>0$

ومنه F متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

5- دراسة اتجاه تغير H :

لدينا : $H'(x)=F'(x)-\frac{2}{3}=f(x)-\frac{2}{3}$ لكن $f(x)\geq\frac{2}{3}$

و منه : $H'(x)\geq 0$ وعليه H متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$.

- دراسة اتجاه تغير k :

$K'(x)=F'(x)-1=f(x)-1$ ، $f(x)\leq 1$

$K'(x)\leq 0$ و عليه K متناقصة تماما على $\mathbb{R}_+$

- استنتاج أن : $\frac{2}{3}x\leq F(x)\leq x$

لدينا : $f(x)\geq\frac{2}{3}$ ولدينا : $f(x)\leq 1$

و منه : $F(x)\leq x$ إذن : $\frac{2}{3}x\leq F(x)\leq x$

- استنتاج النهاية :

لدينا : $\lim_{x\mapsto+\infty} x=+\infty$ و $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2}{3}x=$ و عليه : $\lim_{x\mapsto+\infty}F(x)=+\infty$

6- استنتاج أن المعادلة $F(x)=\pi$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+$:

الدالة F مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+$ و بما أن $\pi\in\mathbb{R}_+$

فإن يوجد عدد وحيد α بحيث $f(\alpha)=\pi$

حسب نظرية القيم المتوسطة

- نبين أن $\pi\leq\alpha\leq\frac{3}{2}\pi$

لدينا : $\frac{2}{3}\pi\leq F(\pi)\leq\pi$ حيث : $\frac{2}{3}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\leq F\left(\frac{3\pi}{2}\right)\leq\frac{3\pi}{2}$

ومنه : $\frac{3\pi}{2} \leq F\left(\frac{3\pi}{2}\right) \leq \pi$ إذن : $F(\pi) \leq \pi \leq F\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

وعليه $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ حسب نظرية التزايدات المنتهية .

التمرين 11

- حل المعادلة التفاضلية على $\mathbb{R} - \{-1\}$ هو :

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + \lambda \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- تعيين الحل f حيث $f(0) = 0$:

لدينا : $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + \gamma$ وبما أن : $f(0) = 0$

فإن : $0 = -1 + \lambda$ ومنه : $\lambda = 1$

وعليه : $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + 1$

- دراسة التغيرات للدالة f :

$$D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x+1} + 1 = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} f(x) = +\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = x^2 + \frac{1}{(x+1)^2}$$

من أجل كل عدد x من D_f لدينا : $f'(x) > 0$

إذن f متزايدة تماما على كل من المجالين : $]-1;+\infty[$ و $]-\infty;-1[$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

- دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

لدينا أربعة فروع لانهائية و مستقيم مقارب معادلته : $x=-1$

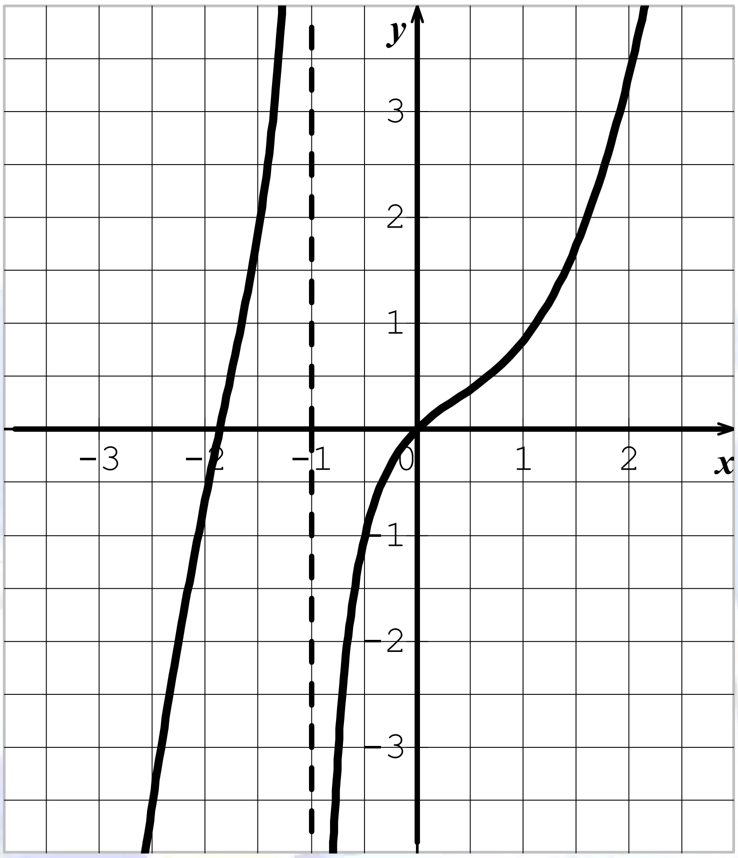
و لدينا : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{x}=+\infty$

وعليه (C) يقبل فرعا مكافئا باتجاه محور التراتيب عند $+\infty$

وآخر عند $-\infty$.

- إنشاء (C) : $f(1)=\dfrac{5}{6}$ ؛ $f(2)=\dfrac{10}{3}$ ؛ $f(-2)=\dfrac{-2}{3}$

. $f(0)=0$



التمرين 12.

- تعيين f :

لدينا : $y' = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}$ و منه : $y' = \dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+8}}$

وهي من الشكل : $y' = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

وعليه : $y = \sqrt{g(x)} + c = \sqrt{x^2+2x+8} + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

إذن : $f(x) = \sqrt{x^2+2x+8} + c$ ؛ $c \in \mathbb{R}$

لكن : $f(2) = 1$ وعليه : $\sqrt{(2)^2 + 2(2) + 8} + c = 1$

إذن : $4 + c = 1$ أي : $c = -3$

و عليه : $f(x) = \sqrt{x^2+2x+8} - 3$

- دراسة تغيرات f :

$$D_f =]-\infty;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}$$

إشارة المشتق :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

إذن الدالة متزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$

و متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$.

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$+\infty$

$$f(-1) \simeq -0,35 \quad ; \quad f(-1) = \sqrt{7} - 3$$

- دراسة الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة يوجد فرعان لانهائيان :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}}{x} - \frac{3}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}} - \frac{3}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}} - \frac{3}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+8} - 3 - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+2x+8}-(x+3)\right]\left[\sqrt{x^2+2x+8}+(x+3)\right]}{\left[\sqrt{x^2+2x+8}+x+3\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2+2x+8\right)-\left(x+3\right)}{\sqrt{x^2+2x+8}+x+3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+8-x^2-6x-9}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+1+\frac{3}{x}\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[-4-\frac{1}{x}\right]}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}}+1+\frac{3}{x}\right]} = -2$$

و عليه : $y = x - 2$ هي معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}}{x} - \frac{2}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}}{x} - \frac{3}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}} - \frac{3}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+8} - 3 + x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+2x+8}\text{-}(x+3)\left[\sqrt{x^2+2x+8}+(\text{-}x+3)\right]\right]}{\left[\sqrt{x^2+2x+8}+(\text{-}x+3)\right]}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x^2+2x+8\right)-\left(-x+3\right)^2}{\sqrt{x^2+2x+8}-x+3}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+8-x^2+6x-9}{\sqrt{x^2+2x+8}-x+3}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{8x-1}{\sqrt{x^2+2x+8}-x+3}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(8-\frac{1}{x}\right)}{x\left[-\sqrt{1+x+x^2}-1+x\right]} = -4$$

ومنه : $y = -x - 4$ هي معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

الحساب :

$f(0) = \sqrt{8} - 3$ ومنه : $f(0) \simeq -0,17$

$f(2) = \sqrt{16} - 3 = 1$

$$f(3) \simeq 1{,}80 \quad , \quad f(3) = \sqrt{23} - 3$$

$$f(-2) \simeq -0{,}17 \quad , \quad f(-2) = \sqrt{8} - 3$$

$$f(-4) = 1$$

$$f(-5) \simeq 1{,}80 \quad , \quad f(-5) = \sqrt{23} - 3$$

إنشاء (C) :