الاشتقاقية

الكفاءة المستهدفة

1 - توظيف المشتقات لحل مشكلات.
2 - استعمال المشتقات لدراسة تغيرات دالة .
3- استعمال المشتقات لتعيين التقريب الخطي لدالة
4- استعمال المشتقات لتعيين نقط الانعطاف والنقطة الزاوية.
5- حساب مشتق دالة مركبة.
6- حل معادلات تفاضلية : $y'=f(x)$ و $y''=f(x)$

تصميم الدرس

أنشطة

قابلية الاشتقاق للدالة عند عدد

نقطة الانعطاف

المعادلات التفاضلية

تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

تمـارين و مشكلات

الحـلـــــــول

أنشطة

النشاط 1 :

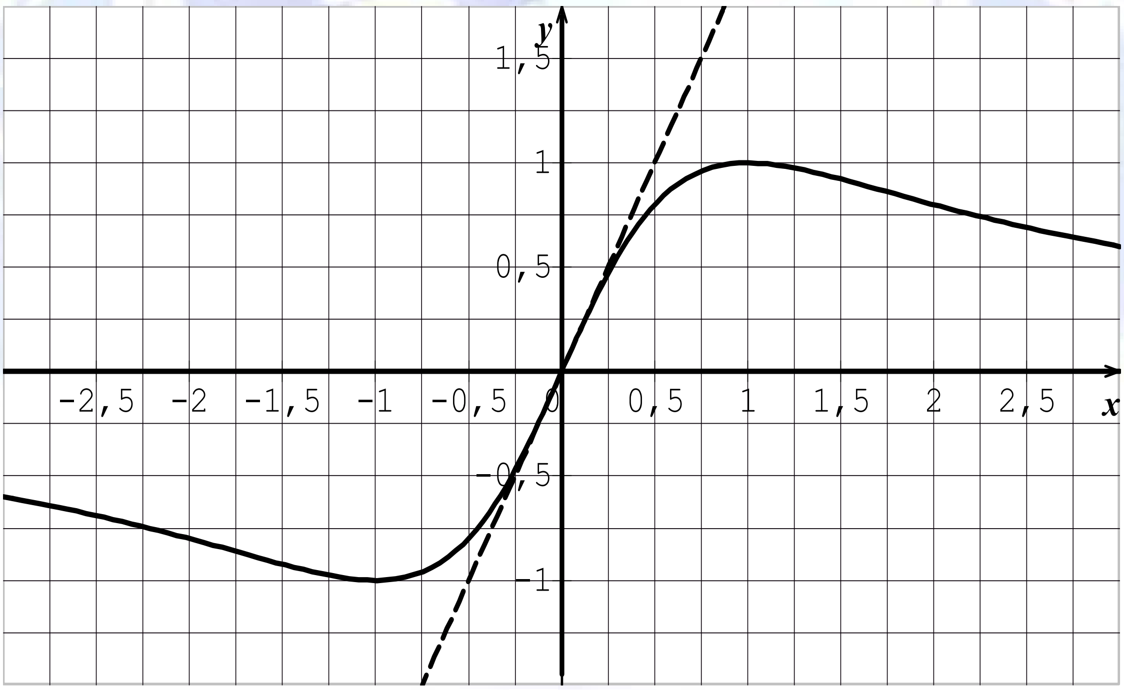
1- أنشئ بآلة بيانية التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ والتمثيل البياني للمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = 2x$.

2- ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند العدد 0 . ماذا تستنتج ؟

3- ناقش بيانيا وضعية البيان (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) تأكد من صحة النتائج حسابيا . ماذا تستنتج ؟

الحل :

1- التمثيل البياني



2- دراسة قابلية الاشتقاق للدالة f عند العدد 0 :

لدينا : $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2h}{h^2+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h^2+1} \times \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h^2+1} = 2$$

وعليه الدالة f تقبل الاشتقاق عند العدد 0 لدينا $f'(0) = 2$

الاستنتاج : المستقيم (Δ) يشمل المبدأ 0 و معامل توجيهه 2 و عليه (Δ) هو المماس للمنحني (C) في المبدأ 0 .

3- وضعية البيان (C) و المستقيم (Δ) بيانيا .

في المجال $]-\infty ; 0[$: البيان (C) يقع فوق (Δ)

في المجال $]0 ; +\infty[$: البيان (C) يقع تحت (Δ)

في النقطة O البيان (C) و (Δ) يتقاطعان.

- دراسة الوضعية حسابيا :

$$f(x) - y = \frac{2x}{x^2+1} - 2x = \frac{2x - 2x(x^2+1)}{x^2+1}$$

إذن : $$f(x) - 2x = \frac{-2x^3}{x^2+1}$$

جدول الإشارة : $f(x) - 2x$

x	$-\infty$ $\quad$ 0	$+\infty$
$-2x^3$	+	-
x^2+1	+	+
$f(x)-2x$	+	-

لما $x > 0$: (C) يقع تحت (Δ)

لما $x < 0$: (C) يقع فوق (Δ)

لما $x = 0$ (C) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0 وهي المبدأ O .

الاستنتاج :

المماس (Δ) يخترق البيان (Δ) في نقطة التماس O و تدعى النقطة O نقطة انعطاف.

النشاط 2 :

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

1) احسب النسبة : $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ من أجل x_0 و h

عددان حقيقيان مع $h \neq 0$. ثم بين أن :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{2x_0 + h}{\sqrt{(x_0 + h)^2 + 4} + \sqrt{x_0^2 + 4}}$$

2) استنتج : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ماذا تمثل هذه النهاية.

3) استنتج عبارة الدالة المشتقة للدالة f .

الحل :

1- حساب النسبة :

الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{(x_0 + h)^2 + 4} - \sqrt{x_0^2 + 4}}{h}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{(x_0+h)^2+4} - \sqrt{x_0^2+4}\right]\left[\sqrt{(x_0+h)^2+4} + \sqrt{x_0^2+4}\right]}{h\left[\sqrt{(x_0+h)^2+4} + \sqrt{x_0^2+4}\right]}$$

$$= \frac{(x_0 + h)^2 + 4 - (x_0^2 + 4)}{h\left[\sqrt{(x_0 + h)^2 + 4} + \sqrt{x_0^2 + 4}\right]}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 4 - x_0^2 - 4}{h\left[\sqrt{(x_0 + h)^2 + 4} + \sqrt{x_0^2 + 4}\right]}$$

$$= \frac{2x_0h + h^2}{h\left[\sqrt{(x_0 + h)^2 + 4} + \sqrt{x_0^2 + 4}\right]}$$

$$= \frac{h\,(2x_0 + h)}{h\left[\sqrt{(x_0 + h)^2 + 4} + \sqrt{x_0^2 + 4}\right]}$$

وعليه :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{\sqrt{(x_0 + h)^2 + 4} + \sqrt{x_0^2 + 4}}$$

2- استنتاج النهاية :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{\sqrt{(x_0 + h)^2 + 4} + \sqrt{x_0^2 + 4}}$$

$$= \frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2 + 4} + \sqrt{x_0^2 + 4}}$$

$$= \frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 4}}$$

إذن :
$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right)}{h} = \frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2 + 4}}$$

هذه النهاية تمثل العدد المشتق للدالة f عند x_0 .

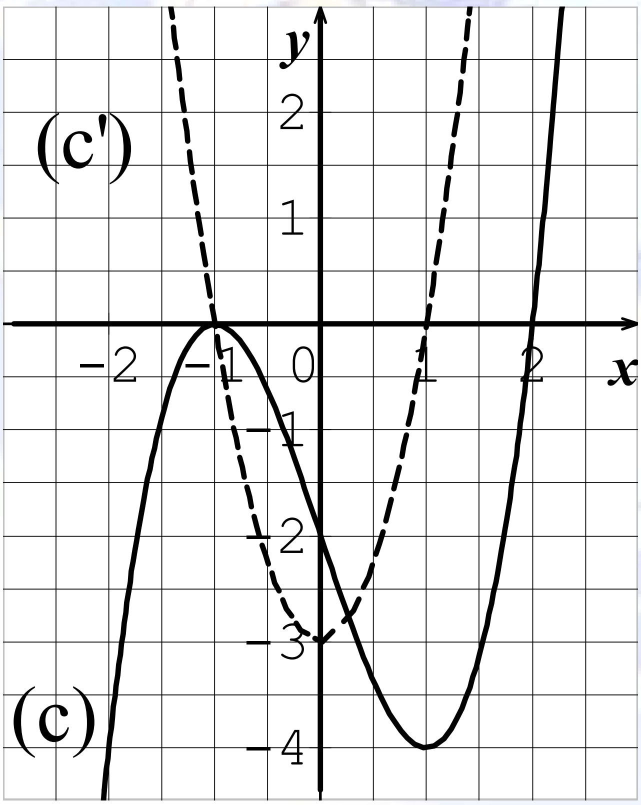
2- استنتاج عبارة الدالة المشتقة للدالة f :

الدالة المشتقة للدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f'\left(x\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

النشاط 3 :

إليك التمثيل البياني (C) للدالة f و التمثيل البياني $\left(C'\right)$ لدالتها



المشتقة f' على $\mathbb{R}$.

1- ادرس إشارة $f'\left(x\right)$ بيانيا.

2- عين اتجاه تغير الدالة f .

3- استنتج العلاقة بين اتجاه تغير الدالة f و إشارة دالتها المشتقة.

الحل :

1- دراسة إشارة $f\left(x'\right)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

2- تعيين اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty ; -1]$ و $[1 ; +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $[-1 ; 1]$

3- الاستنتاج :

إذا كانت f' موجبة تماما أو معدومة عند قيم معزولة من المجال I فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

وإذا كانت f' سالبة تماما أو معدومة عند قيم معزولة من مجال J فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال J .

1- قابلية الاشتقاق للدالة عند عدد

تعريف 1 :

f دالة معرفة على مجال D_f . نقول عان الدالة f أنها تقبل الاشتقاق عند العدد x_0 إذا وافق إذا كان :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \quad ; \ \ell \in \mathbb{R}$$

العدد ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f .

و نرمز له بالرمز $f(x')$.

مثال 1:

ادرس قابلية الاشتقاق للدالة : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ عند العدد 2 .

الحل : $D_f = \mathbb{R}^*$. $f(2) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2 - 2 - h}{2\,(2+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{2\,(2+h)} \times \frac{1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2\,(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 2 حيث : $f'(2) = -\frac{1}{4}$

مثال 2 :

ادرس قابلية الاشتقاق عند 0 للدالة f : $x \mapsto |x|$

الحل :

$$D_f = \mathbb{R} \ . \quad \begin{cases} f(x) = x \ , \ x \geq 0 \\ f(x) = x \ , \ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$\lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{-h}{h} = -1$$

ومنه ليس للنسبة نهاية و عليه f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

التفسير البياني :

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند x_0 فإن تمثيلها البياني يقبل في النقطة $A\left(x_0 ; f\left(x_0\right)\right)$

مماسا معامل توجيهه $f'\left(x\right)$. ويقبل كمعادلة :

$$y = f\left(x_0\right) \times \left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$$

التفسير العددي :

إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند x_0 فإن الدالة التآلفية :

$x \mapsto f\left(x\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$ هي تقريب تآلفي للدالة f بجوار x_0 .

أي أن المماس عند x_0 هو أحسن تقريب للدالة f عند x_0 .

التفسير الفزيائي :

إذا كان قانون الحركة : $x \mapsto x\left(t\right)$ فإن : $x'\left(t_0\right)$ هو السرعة

اللحظية في اللحظة t_o .

إذا كان $x \mapsto v\left(t\right)$ هو قانون حركة فإن :

$v'\left(t_0\right)$ هو التسارع في اللحظة t_o .

تعريف 2 :

f دالة عددية معرفة على الأقل ، على مجال من الشكل $\left[x_0 ; x_0 + \alpha\right[$ حيث x_0 و α

عددان حقيقيان مع $\alpha > 0$ نقول عن الدالة f أنها تقبل الاشتقاق عند x_0 من اليمين إذا وفق

إذا كانت :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right)}{h} = \ell_1$$

حيث ℓ_1 عدد حقيقي ويسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليمين

تعريف 3 :

f دالة عددية معرفة على الأقل ، على مجال من الشكل $\left]x_0 - \alpha\ ;\ x_0\right]$ حيث x_0 و α عددان حقيقيان مع $\alpha > 0$ نقول عن الدالة f أنها تقبل الاشتقاق عن x_0 من اليسار إذا وافق إذا كانت :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell_2$$

حيث ℓ_2 عدد حقيقي ويسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليسار

مثال 1 :

الدالة f : $x \mapsto x\sqrt{x}$ قابلية للاشتقاق في 0 على اليمين لأنها معرفة على $[0\ ;\ +\infty[$ و

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h\sqrt{h}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \sqrt{h} = 0$$

مثال 2 :

الدالة f : $x \mapsto \sqrt{4-x}$ غير قابلية للاشتقاق في 4 على اليسار لأن :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\sqrt{-h}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{-h}\ .\ \sqrt{-h}}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{1}{-\sqrt{-h}} = -\infty$$

مثال 3 :

الدالة f : $x \mapsto |x|$ قابلية الاشتقاق في 0 على اليمين لأنها معرفة على $\mathbb{R}$ و

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h}{h} = 1$$

وقابلية الاشتقاق في 0 على اليسار لأن :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{|h| - |0|}{h} = = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{-h}{h} = -1$$

لكن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

نتيجة :

تكون الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وافق إذا قبلت هذه الدالة نفس العدد المشتق من اليمين و من اليسار في x_0 .

الاستمرارية و قابلية الاشتقاق :

مبرهنة :

إذا كانت f قابلة للاشتقاق من أجل x_0 تكون هذه الدالة مستمرة عند x_0 .

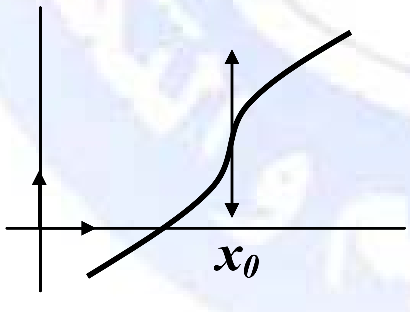
ملاحظة :

عكس هذه النظرية غير صحيح .

فمثلا الدالة $x \mapsto x$ متسمرة عنده و لكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0 كما سبق.

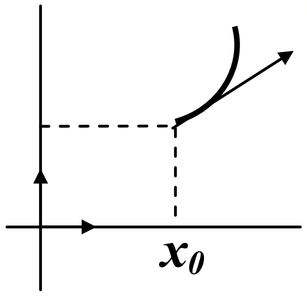
حالات خاصة :

* إذا كانت : $\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x_0 + \mathrm{h}) - f(x_0)}{h} \right| = +\infty$ فإن التمثيل البياني للدالة f يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة x_0 يوازي حامل محور الترتيب



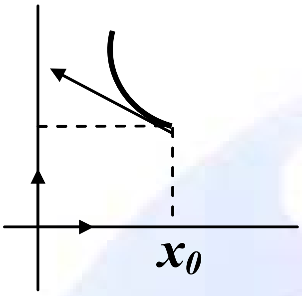
* إذا قبلت الدالة f الاشتقاق في x_0 من اليمين فإن تمثيلها البياني يقبل نصف المماس من اليمين و هو معرف كما يلي :

من أجل $\mathrm{y} - f(x_0) = \ell_1 \; (x - x_0) : x \geq x_0$



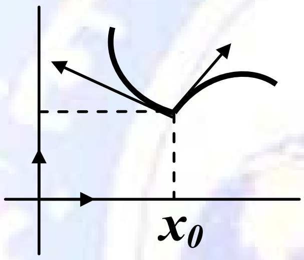
حيث ℓ_1 هو العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليمين .

* إذا قبلت دالة f الاشتقاق في x_0 من اليسار فإن تمثيلها البياني يقبل نصف المماس من اليسار و هو معرف كما يلي :



من أجل $x \leq x_0$: $\text{y} - f(x_0) = \ell_1 (x - x_0)$

حيث ℓ_2 هو العدد المشتق للدالة f عند x_0 من اليسار .



* إذا كان العددان المشتقان ℓ_1 و ℓ_2 مختلفان فإن النقطة ذات الفاصلة x_0 تدعى نقطة زاوية.

2- الدالة المشتقة لدالة :

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد x من مجال I فإن الدالة : $x \mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على I .

فإذا وضعنا : $\text{y} = f(x)$

فإننا نرمز إلى $f(x)$ بالرمز $\frac{\text{dy}}{\text{d}x}$

ونكتب : $\frac{\text{dy}}{\text{d}x} = f'(x)$

أي أن : $\text{dy} = f'(x)\, \text{d}x$

- حساب المشتقات :

- مشتقات الدوال المألوفة :

الدالة	الدالة المشتقة	شرط مجال التطبيق
$x \longrightarrow k$; k ثابت	$x \longrightarrow 0$	0
$x \longrightarrow x$;	$x \longrightarrow 1$	$\mathbb{R}$
$x \longrightarrow x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$x \longrightarrow nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \longrightarrow \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$x \longrightarrow -n$	$\mathbb{R}^*$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$	$x \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longrightarrow \sin x$	$x \longrightarrow \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \longrightarrow \cos x$	$x \longrightarrow -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \longrightarrow \tan x$	$x \longrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x \neq 0$

- عمليات على الدوال المشتقة :

إذا كانت f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال $]a\ ;\ b[$ و كان λ عددا حقيقيا فإن :

1) الدوال $f+g$ و $f \times g$ و λf تقبل الاشتقاق على $]a\ ;\ b[$

حيث : $(\lambda f)' = \lambda f'$

$$(f+g)' = f' + g' \ ; \ (f.g)' = f'.g + f.g'$$

2) إذا كان g لا ينعدم على $]a\ ;\ b[$ فإن : $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ تقبلان الاشتقاق على $]a\ ;\ b[$

بحيث :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}\ ;\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\ .\ g - f\ .\ g'}{g^2}$$

- مشتق الدالة المركبة :

مبرهنة :

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 و f دالة قابلة للاشتقاق عند $u(x_0)$ فإن الدالة fou قابلة للاشتقاق عند x_0 ولدينا :

$$(fou)'\ (x_0) = u'(x_0)\ .f'\left[u(x_0)\right]$$

مثال :

نعتبر الدالة g المعرفة بالعبارة : $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

عين عبارة الدالة المشتقة g' للدالة g .

الحل :

الدالة g هي مركب الدالتين u و f حيث :

$$f(x) = \sin x \quad \text{و} \quad u(x) = 2x + \frac{\pi}{3}$$

وعليه : $g(x) = u'(x)\ .f'\left[u(x)\right] = 2\ .\ cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

نتائج :

1) u دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I .

مشتقة الدالة f حيث : $f(x) = \left[u(x)\right]^n\ ,\ n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

هي الدالة f' حيث : $f'(x) = n \, . \, [\mathrm{u}(x)]^{n-1} . \mathrm{u}'(x)$

لأن الدالة f هي مركب الدالتين u و g حيث : $\mathrm{g}(x) = x^n$

مثال :

الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x) = (x^2 + 1)^4$

هي الدالة f' المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f'(x) = \mathrm{u}(2x)\,(x^2 + 1)^3$

إذن : $f'(x) = 8x\,(x^2 + 1)^3$

2) u دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I وموجبة تماما أيضا.

الدالة المشتقة للدالة f حيث : $f(x) = \sqrt{\mathrm{u}(x)}$

هي الدالة f' المعرفة على I بالعبارة : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{u}'(x)}{2\sqrt{\mathrm{u}(x)}}$

لأن الدالة f هي مركب الدالتين u وg حيث : $\mathrm{g}(x) = \sqrt{x}$

مثال :

الدالة المشتقة للدالة f : $x \mapsto \sqrt{x^2 + 4}$ هي الدالة f'

المعرفة كما يلي : $f'(x) = \dfrac{2\,x}{2\sqrt{x^2 + 4}}$

إذن : $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

3) a وb عددان حقيقيان حيث $\mathrm{a} \neq 0$.

الدالة المشتقة للدالة f : $x \mapsto \sin(\mathrm{a}x + \mathrm{b})$

هي الدالة f المعرفة كما يلي : $f'(x) = \mathrm{a}\, cos\,(ax + b)$

لأن الدالة f هي مركب الدالتين : $x \mapsto \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ و $x \mapsto \sin x$

4) a وb عددان حقيقيان حيث $\mathrm{a} \neq 0$.

الدالة المشتقة للدالة f : $x \mapsto cos\left(\mathrm{a}x+\mathrm{b}\right)$

هي الدالة f المعرفة كما يلي : $f'\left(x\right)=\text{-a sin}\left(\mathrm{a}x+\mathrm{b}\right)$

لأن الدالة f هي مركب الدالتين : $x\mapsto cos\ x$ و $x\mapsto \mathrm{a}x+\mathrm{b}$

اتجاه تغير دالة :

مبرهنة :

لتكن دالة f وقابلة للاشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة.

- إذا كانت f' موجبة تماما (يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال D_f .
- من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال D_f .
- إذا كانت f' معدومة على المجال D_f فإن الدالة f ثابتة على المجال D_f .

القيمة الحدية المحلية لدالة :

مبرهنة :

لتكن f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة.

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قمة C من I مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال I' محتوى في I يشمل C تقبل فيه f قيمة حدية $f\left(\mathrm{C}\right)$. تسمى $f\left(\mathrm{C}\right)$ قيمة حدية محلية .

ملاحظة :

- يمكن وجود عدة قيم حدية محلية على I .
- إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة C من I فإن الرسم البياني للدالة f يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها C .

المشتقات المتتابعة لدالة :

لتكن f دالة عددية دالتها المشتقة f' تقبل الاشتقاق على المجال I .

الدالة المشتقة للدالة f' تدعى الدالة المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بالرمز f'' .

و إذا كانت f'' قابلية الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تدعى الدالة المشتقة الثالثة أو الدالة المشتقة ذات الرتيبة . للدالة f ونرمز لها بالرمز f''' و هكذا يمكن تعريف الدوال المشتقة التي رتبتها

4 ، 5 ، 6 ، ... ، n حيث n عدد طبيعي ، $n \geq 4$ و التي نرمز لها كما يلي

$f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots, f^{(n)}$.

تدعى الدوال المشتقة $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f .

مثال :

نعتبر الدالة f ذات المتغير x المعرفة بالعبارة :

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x + 6$$

- عين كل من $f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}$.

الحل :

الدالة f هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12$$

الدالة f' هي دالة كثير حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f''(x) = 12x^2 - 24$$

الدالة f'' هي دالة كثير حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'''(x) = 24x$$

الدالة f''' هي دالة كثير حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f^{(4)}(x) = 24$$

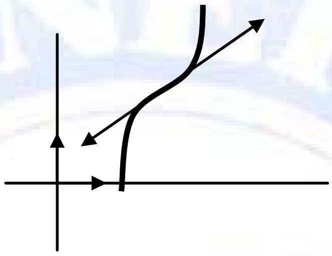
الدالة $f^{(4)}$ هي دالة كثير حدود فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f^{(5)}(x) = 0$$

نقطة الانعطاف :

تعريف :

نقطة انعطاف هي نقطة يخترق المماس فيها المنحني.



نتيجة :

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال مفتوح يشمل x_0 و إذا انعدمت دالتها المشتقة الثانية من أجل x_0 مغيرة إشارتها فإن النقطة M_0 ذات الفاصلة x_0 هي نقطة انعطاف للمنحني الممثل للدالة f .

المعادلات التفاضلية :

f دالة عدد متغيراتها $n+1$, $n \in \mathbb{N}$

نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة n كل معادلة من الشكل :

$$y^{(n)} = f\left[x , u , y' , . . . , y^{n-1}\right]$$

حيث y هو المجهول $y' , y'' , . . . , y^{(n-1)} , y^{(n)}$ هي صور المشتقات المتتابعة للدالة $f : y \mapsto x$.

نسمي حلا للمعادلة التفاضلية في المجال I كل دالة h تقبل الاشتقاق n مرة وتحقق :

$$h^{(n)}(x) = f\left[x , h(x) , h(x) , . . . , h^{(n-1)}(x)\right]$$

- المعادلة التفاضلية من الشكل : $y' = f(x)$

حيث f مألوفة. حل هذه المعادلة على مجال I هو إيجاد دالة g تقبل الاشتقاق على I و تحقق : $g'(x) = f(x)$ من أجل كل x من I

مثال :

حل المعادلة التفاضلية $y' = 2x - 4$ على $\mathbb{R}$.

الحل :

حل هذه المعادلة هو الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$

بالعبارة : $g(x) = x^2 - 4x + k$ حيث $k \in \mathbb{R}$

- المعادلة التفاضلية من الشكل : $y'' = f(x)$

حيث f دالة مألوفة. حل هذه المعادلة على مجال I هو إيجاد دالة g تقبل الاشتقاق مرتين على I و تحقق :

$g''(x) = f(x)$ من أجل كل x من I .

مثال :

حل المعادلة التفاضلية : $y'' = x$

الحل :

حل هذه المعادلة هو الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = \dfrac{x^3}{6} + kx + c$

حيث : $C \in \mathbb{R}$ و $k \in \mathbb{R}$

- المعادلة التفاضلية من الشكل : $y'' = -w^2 y$

حل هذه المعادلة من الشكل : $y = a\cos wx + b\sin wx$

حيث a وb عددان حقيقيان ثابتان.

مثال : حل المعادلة التفاضلية : $y'' + 25y = 0$

الحل : لدينا : $y'' = -(5)^2 y$ ومنه حلها هو :

$$y = a\cos 5x + b\sin 5x$$

التطبيق 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x)=x^4-2x^2$

تحقق باستعمال آلة بيانية التوافق بين اتجاه تغير الداة f وإشارة الدالة المشتقة f'

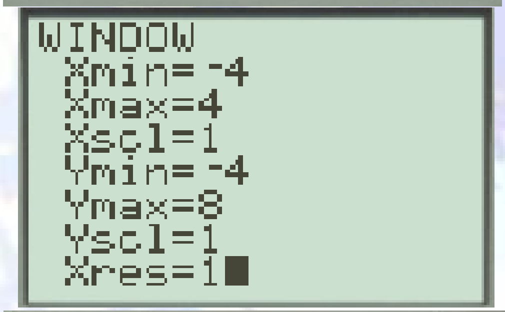
الحل :

1) ننقر على الزر : 

ونكتب عبارة الدالة f في y_1

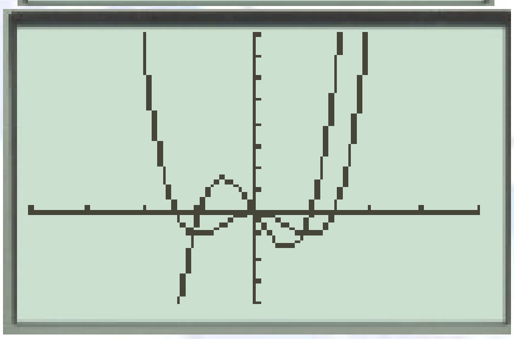
وعبارة الدالة المشتقة f'

في y_2 كما يلي :



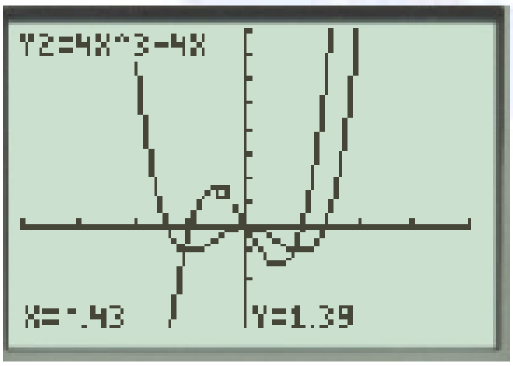
2) ننقر على 

وندخل المعلومات التالية كما يظهر على الشاشة :



3) ننقر على 

فنحصل التمثيلين البيانيين كما يظهر على الشاشة



4)يمكن تحريك نقطة من البيان

لنلاحظ أنه كلما كانت $f'(x)\succ 0$

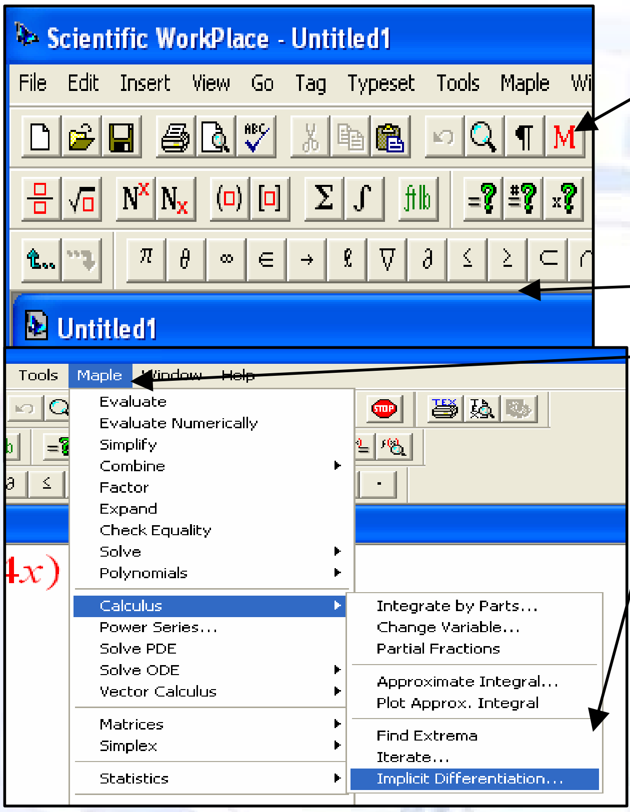
كانت الدالة f متزايدة تماما

فمثلا من أجل $x=-0.43$

$f'(x)=1.39$ **وعليه :** $f'(x)\succ 0$

التطبيق 2 :

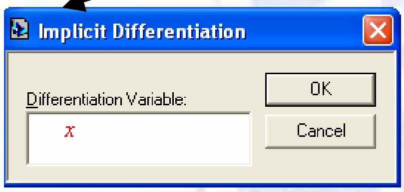
حساب الدالة المشتقة لدالة باستعمال البرمجية scientific workplace 3.0



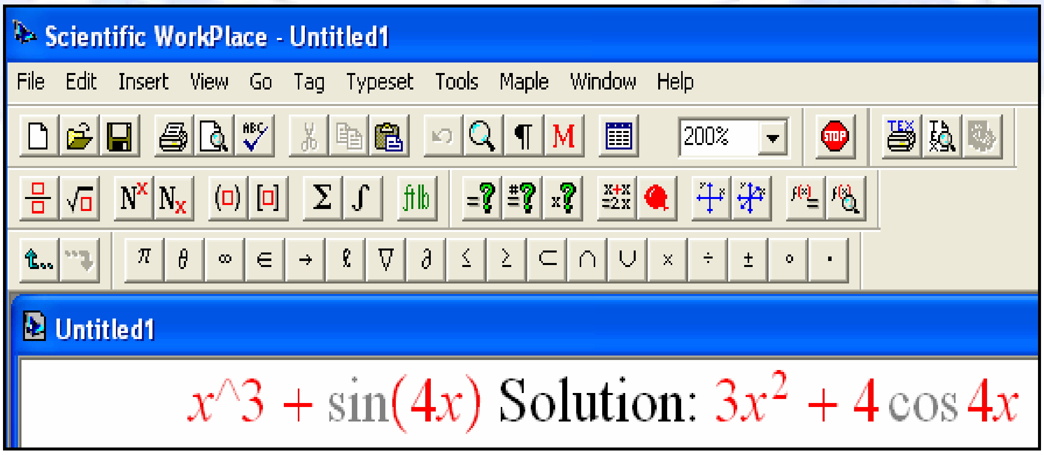
1) ننقر على الإيقونة التي تحمل الحرف T فنحصل على الحرف M و هذا لتحويل الكتابة من النص الأدبي إلى النص الرياضي .

2) نكتب عبارة الدالة .

3) ننقر على الإيقونة . ثم نختار منها . فتظهر علبة الحوار التالية التي نكتب بداخلها المتغير.



4) تظهر البرمجية عبارة الدالة المشتقة كما هو في الصورة .



تمـارين و مشكلات

التمرين 1 .

ضع العلامة "ص" أماما كل جملة صحيحة و العلامة "خ" أماما كل جملة خاطئة مع التعليل.

1- إذا كانت $\lim_{h\to0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = +\infty$

فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 .

2- إذا كانت : $\lim_{h\to0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$ فإن البيان (C_f) لدالة f

يقبل مماسا يوازي حامل محور التراتيب .

3- كل دالة مستمرة عند عدد x_0 قابلة للاشتقاق عند x_0

4- إذا كانت : $\lim_{x\to2} f(x) = 4$ فإن $f'(2) = 0$

5- إذا كان : $f'(2) = 0$ فإن المماس لمنحنى الدالة f يوازي حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 2.

6- إذا كانت $\lim_{h\to0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = +\infty$ غير موجود فإن الدالة f

غير قابلة للاشتقاق عند 1- .

7- كل دالة مستمرة على مجال فهي قابلة للاشتقاق على هذا المجال.

8- كل دالة سالبة على مجال هي دالة متناقصة تماما على هذا المجال.

9- مشتقة الدالة $\frac{f}{g}$ هل الدالة $\frac{f'}{g'}$

10- $f^{(n)}(x) = [f(x)]^n$

11- إذا انعدمت الدالة f'' عند x_0 فإن النقطة $M(x_0 , f(x))$ انعطاف لـ

(C_f)

12- إذا كانت $\lim\limits_{\substack{> \\ h\to 0}} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = -\infty$ فإن التمثيل البياني للدالة

f يقبل نصف مماس عند النقطةO من اليمين يوازي حامل

محور التراتيب.

13- إذا كانت $\lim\limits_{\substack{> \\ h\to 0}} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = 3$ و

$\lim\limits_{\substack{< \\ h\to 0}} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = -1$ فإن (C_f) يقبل نصف مماسين.

14- حل المعادلة التفاضلية $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ هو $y = \sqrt{x}$

على $]0\,;\,+\infty[$

15- حل المعادلة التفاضلية : $y'' = cosx$ هو $y = cosx$ على $\mathbb{R}$

16- الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$.

17- لدراسة قابلية الاشتقاق لدالة عند عدد x_0 نحسب دالتها

المشتقة f' ثم نحسب $f'(x_0)$.

18- كل دالة متزايدة تماما على مجال I هي دالة موجبة على I

التمرين 2 .

أدرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند العدد x_0 في كل حالة مما يلي :

1) $f(x) = \sqrt{x+5} \quad ; \quad x_0 = 1$

2) $f(x) = \sqrt{3x+10} \quad ; \quad x_0 = 2$

3) $f(x) = cosx \quad ; \quad x_0 = 0$

4) $f(x) = \sin x \quad ; \quad x_0 = \dfrac{\pi}{6}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2 + x - 2} \quad ; \quad x_0 = 2$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x + 3} \quad ; \quad x_0 = 1$

7) $7) \; f(x) = \dfrac{x^2 + 9x - 2}{x - 1} \quad ; \quad x_0 = 2$

التمرين 3 .

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

1) عين مجموعة التعريف .

2) احسب : $\lim_{\overset{<}{x \to 3}} \dfrac{f(x)}{x - 3}$. ماذا يمكن القول بالنسبة للدالة f .

ماذا يمكن القول بالنسبة إلى التمثيل البياني (C_f) للدالة f .

3) بين أن (C_f) هو نصف دائرة .

التمرين 4 .

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بالعبارة :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \sin x & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) أدرس استمرارية الدالة f عند O ثم على $\mathbb{R}$.

2) أدرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند O ثم على $\mathbb{R}$.

التمرين 5 .

نعتبر الدالة f المعرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2}}{(x+1)\left(x^2 + x + 1\right)} & ; x \neq -1 \\ f(-1) = +\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

1- عين مجموعة تعريف الدالة f .

2- ادرس استمرارية الدالة f عند 0 ثم عند 1- .

3- ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0 ثم عند 1- .

التمرين 6 .

احسب الدوال المشتقة للدوال المعرفة كما يلي :

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2 + x + 1}$ ؛ 2) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x-1)(x+2)}$

3) $f(x) = (2x+1)^2.(x^2+3)^2$ ؛ 4) $f(x) = \left(\dfrac{2}{5}x^3 + 4x + 1\right)^3$

5) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 5}{x+1}$ ؛ 6) $f(x) = -4x^2 + 5|x|$

7) $f(x) = \left|-x^2 + 8x - 15\right|$ ؛ 8) $f(x) = |-x+2|.|x+5|$

التمرين 7 .

عين الدوال المشتقة للدوال المعرفة كما يلي :

1) $f(x) = cos^3 x$ ؛ 2) $f(x) = \mathrm{ta}^3\mathrm{n}x$

3) $f(x) = \sqrt{\sin x}$ ؛ 4) $f(x) = \dfrac{cos2x}{1 - \sin x}$

5) $f(x) = \sqrt{\sin x - cos2x}$ ؛ 6) $f(x) = \dfrac{2 - \sin x}{4 - cosx}$

التمرين 8 .

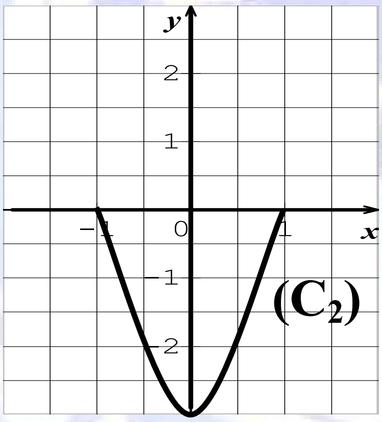
f دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و اتجاه تغير دالتها المشتقة معرفة في الجدول الآتي :

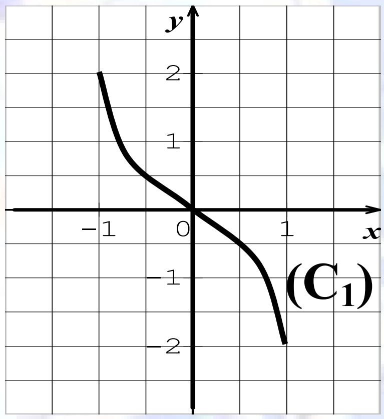
x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

استنتج اتجاه تغير الدالة f .

التمرين 9 .

إليك التمثيلين البيانيين الآتيين (C_1) و (C_2) على المجال $[-1 ; 1]$ للدالتين f_1 و f_2 .





- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1 ; 1]$

فإن : $f_1'(x) = f_2(x)$

التمرين 10 .

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \sqrt{1+x}$

1- عين مجموعة التعريف.

2- ادرس قابلية الاشتقاق عند 0 للدالة f ثم اكتب معادلة المماس للمنحني (C_f) عند O .

3- عين أحسن تقريب تآلفي للدالة f عند 0 .

4- احسب قيمة مقربة لكل من $\sqrt{1,00007}$ و $\sqrt{0,9999}$

5- ادرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ $\left(C_f\right)$.

التمرين 11 .

نعتبر الدالة f حيث : $f\left(x\right)=x^n \quad , n \in \mathbb{N}$

- احسب الدوال المشتقة $f' \;, f'' \;, f^{(3)} \;, f^{(4)}$

التمرين 12 .

f دالة معرفة بالعبارة : $f\left(x\right)=cos\left(ax+b\right)$ حيث : $a \neq 0$

a وb عددان حقيقيان نعلم أن : $cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$

- احسب كل من $f'''\left(x\right) \;, f''\left(x\right) \;, f'\left(x\right)$ بدلالة جيب التمام .

التمرين 13 .

حل المعادلة التفاضلية : $y''+\frac{16\pi^2}{25}y=0$ ثم استنتج الحل الذي

يأخذ القيمة 1 عند 0 و دالته المشتقة تنعدم عند $\frac{5}{4}$.

التمرين 14 .

نعتبر الدالة f حيث : $f\left(x\right)=cos^2 x$

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f''\left(x\right)+4f\left(x\right)-2=0$

2- استنتج حلا للمعادلة التفاضلية : $y''=-4y+2$

التمرين 15 .

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f\left(x\right)=x^4-6x^3+12x^2+24x-24$

1- احسب المشتقات المتتابعة للدالة f : $f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}$

ماذا تلاحظ ؟

2- ادرس إشارة $f''\left(x\right)$ ثم استنتج نقط الانعطاف للمنحني (C)

الممثل لتغيرات الدالة f .

التمرين 16 .

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = x\sqrt{x}$

1- ادرس تغيرات الدالة f ، ثم أنشئ بآلة بيانية تمثيلها البياني (C) .

2- عين حلا للمعادلة التفاضلية : $2y' - 3\sqrt{x} = 0$

التمرين 17 .

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 4$

حيث a و b و c أعداد حقيقية .

- عين الأعداد a و b و c تكون f حلا للمعادلة التفاضلية :

$$y'' = 12x^2 - 24x + 10$$

التمرين 18 .

f دالة معرفة بالعبارة $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$ ، (α) تمثيلها البياني

1- عين مجموعة التعريف للدالة f .

2- ادرس تغيرات الدالة f .

3- اكتب معدلة المماس (Δ) للمنحنى $(\wp)$ عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة .

4- أنشئ كل من (Δ) و $(\wp)$ بواسطة آلة بيانية .

5- عين أحسن تقريب تآلف للدالة f عند 0 .

6- احسب القيمة المقربة لكل من : $\dfrac{1}{(1,001)^3}$ ثم $\dfrac{1}{(0,999)^3}$

التمرين 19 .

I) نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x) \; \dfrac{(x+1)^2}{x^2 - 3x + 2}$

1- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم بين أنه من أجل كل عدد x

من D_f فإن : $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$

حيث a و b و c أعداد حقيقة يطاب تعيينها .

2- ادرس تغيرات الدالة f .

3- عين بواسطة معادلاتها المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) الممثل لتغيرات الدالة f .

- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم المقارب الأفقي (Δ) .

4- عين تقريب تآلفي للدالة f عند 0 .

5- أنشئ (C) .

II) نعرف الدالة g كما يلي : $g(x) = \frac{x + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2}$

1- عين مجموعة تعريف الدالة g .

2- اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

3- ادرس استمرارية و قابلية الاشتقاق للدالة g عند العدد 0 .

4- ادرس شفعية الدالة g .

5- استنتج التمثيل البياني (γ) للدالة g انطلاقا من (C)

6- ناقش بيانيا وجود وعدد حلول المعادلة

$(m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m - 1 = 0$ حيث m وسيط حقيقي.

التمرين 20 .

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 1}$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

1- ادرس تغيرات الدالة f .

- ادرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة .

- عين إحداثية نقطة تقاطع (C) مع المستقيم المقارب الأفقي (Δ)

- أنشئ المنحنى (C) .

- ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$(m - 1) x^2 + 4x - m - 4 = 0$$

2- نعتبر الدالة g المعرفة بالعبارة : $g(x) = \dfrac{(|x| - 2)^2}{x^2 - 1}$

- اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

- ادرس استمرارية و قابلية الاشتقاق للدالة g عند 0 .

- بين أن $g(x) = f(x)$ على مجموعة يطلب تعيينها .

- ادرس شفعية الدالة g .

- استنتج التمثيل البياني (C') للدالة g .

3- نعتبر الدالة h حيث : $h(x) = \dfrac{(x - 2)^2}{|x^2 - 1|}$

- اكتب العبارة : $h(x)$ بدلالة $f(x)$.

- استنتج التمثيل البياني (γ) للدالة h .

4- نعرف دالة φ بالعبارة : $\varphi(x) = \dfrac{(\sin x - 2)^2}{\sin^2 x - 1}$

- عين مجموعة تعريف الدالة φ .

- بين أن φ هي مركب دالتين يطلب تعيينهما .

- احسب مشتقة الدالة φ .

التمرين 21 .

1) f دالة عددية معرفة بالعبارة : $f(x) = \alpha + \sqrt{\beta x + \gamma}$

حيث α , β , γ أعداد حقيقية (Γ) تمثيلها البياني .

عين α , β , γ بحيث تكون النقطتان O و $A(1\ ; -1)$ من (Γ)

و يكون معامل توجيه المماس عند النقطة O من (Γ) مساويا

إلى $\frac{-3}{4}$.

2) g دالة معرفة كما يلي :
$$\begin{cases} g(x) = -2 + \sqrt{4 - 3x} \ , \ x < 1 \\ g(x) = x - 3 + \sqrt{x - 1} \ , x \geq 1 \end{cases}$$

(C) تمثيلها البياني .

أ- عين مجموعة تعريف الدالة g .

ب- ادرس استمرارية و قابلية الاشتقاق للدالة g عند 1 .

جـ- ادرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة للمنحنى (C) .

د- عين نقط تقاطع (C) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$.

هـ- اكتب معادلات المماسات في نقط تقاطع (C) و (Δ) .

و- أنشئ المنحنى (C) .

الحـــــــــلـــول

التمرين 1 .

1) خاطئة

التعليل : نهاية النسبة هي دراسة قابلة الاشتقاق عند 1 و بما أنها تتناهى نحو $+\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق عند 1 .

2) خاطئة

المماس يوازي محور التراتيب إذا كنت نهاية النسبة $+\infty$ أو $-\infty$ وعليه فالمماس هناك يوازي حامل محور الفواصل .

3) خاطئة

فمثلا الدالة $x \mapsto |x|$ مستمرة عنده لكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0.

4) خاطئة

$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ مجرد نهاية عند 2 ولدراسة قابلية الاشتقاق عند 2

نحسب : $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

5) صحيحة

ميل المماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 يساوي 0 و منه المماس يوازي حامل محور الفواصل .

6) صحيحة

لأنه إذا كانت نهاية النسبة عدد فالدالة تقبل الاشتقاق .

7) خاطئة

فالدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $[0\ ;+\infty[$ لكنها قابلة للاشتقاق فقط على $]0\ ;+\infty[$.

8) خاطئة

فالدالة $x \mapsto x^2$ سالبة على $\mathbb{R}$ لكنها غير متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

فهي متزايدة تماما على $\left[0 ; -\infty\right]$ و متناقصة تماما على $\left[0 ; +\infty\right[$

9) خاطئة

مشتقة الدالة $\dfrac{f}{g}$ هي الدالة h حيث $h = \dfrac{f'h - g'h}{g^2}$

10) خاطئة

الرمز $f^{(n)}$ هو رمز للمشتق من الرتبة n للدالة f ، f^n هو رمز للدالة مرفوعة للأس n .

11) خاطئة

بل يجب أن تغير $f''(x)$ إشارتها عند x_0 .

12) صحيحة

بما أن نهاية النسبة هي $-\infty$ فإن ميل نصف المماس $-\infty$ $\tan\theta \to -\infty$

ومنه $\theta \to \dfrac{-\pi}{2}$ وعليه نصف المماس يوازي حامل محور التراتيب.

13) صحيحة

لأن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 من اليمين و عددها المشتق هو 3 وتقبل الاشتقاق عند 2 من اليسار و عددها المشتق هو 1- .

و بما أن العددين المشتقين غير متساوين فإن التمثيل البياني يقبل نصفي مماسين .

14) صحيحة

لأن مشتقة الدالة $x \mapsto y = \sqrt{x}$ هو الدالة : $x \mapsto y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

على $\left]0 ; +\infty\right[$.

15) خاطئة

لأن : $y' = -\sin x$ ومنه : $y'' = -cosx$

16) خاطئة

الدالة متناقصة تماما على كل من المجالين $\left]-\infty ; 0\right[$ و $\left]0 ; +\infty\right[$

17) خاطئة

بل نحسب : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

18) خاطئة

الدالة f : $x \mapsto 2x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأن : $f'(x) > 0$

لكن الدالة f غير موجبة على $\mathbb{R}$.

التمرين 2 .

دراسة قابلية الاشتقاق عند x_0 :

1) لدينا : $f(x) = \sqrt{x+5} \quad ; \quad x_0 = 1$

و منه : $f(1) = \sqrt{6} \quad ، \quad D_f = [-5 ; +\infty[$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h+5}-\sqrt{6}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{6+h}-\sqrt{6}}{h} \times \frac{\sqrt{6+h}+\sqrt{6}}{\sqrt{6+h}+\sqrt{6}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6+h-6}{h\left[\sqrt{6+h}+\sqrt{6}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{6+h}+\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

ومنه f تقبل الاشتقاق عند 1 حيث : $f'(1) = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$

2) لدينا : $f(x) = \sqrt{3x+10} \quad ; \quad x_0 = 1$

و منه : $f(2) = 4 \quad ، \quad D_f = \left[\dfrac{-10}{3} ; +\infty\right[$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(2+h)+10}-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{16+3h}-4}{h}\times\frac{\sqrt{16+3h}+4}{\sqrt{16+3h}+4}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(16+3h)-6}{h\left[\sqrt{16+3h}+4\right]}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3}{\sqrt{16+3h}+4}=\frac{3}{8}$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 2 حيث : $f'(2)=\dfrac{3}{8}$

3) لدينا : $f(x)=cosx \quad ; \quad x_0=0$

و منه : $f(0)=1 \quad ؛ \quad D_f=\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-2\sin^2\frac{h}{2}-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(-\sin\frac{h}{2}\right)\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=0$$

4) لدينا : $f(x)=\sin x \quad ; \quad x_0=\dfrac{\pi}{6}$

و منه : $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2} \quad ؛ \quad D_f=\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\frac{1}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{\pi}{6}.\cos h + \cos\frac{\pi}{6}\sin h - \frac{1}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}\cos h + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h - \frac{1}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(\cos h - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}\left(-2\sin^2\frac{h}{2}\right)}{h} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sin h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{-1}{2}\frac{\left(\sin^2\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sin h}{h}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5) لدينا : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x + x - 2} \quad ; \quad x_0 = 2$

و منه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 \neq 0\}$

حلول المعادلة $x^2 + x - 2 = 0$ هي : 1 ، -2

إذن : $D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; 1\}$

$$f(2) = \frac{(2)^2 - 4(2) + 2}{(2)^2 + 2 - 2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(2+h)^2 - 4(2+h) + 2}{(2+h)^2 - 4(2+h) - 2} + \frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 2}{4 + 4h + h^2 + 2 + h - 2} + \frac{1}{2}\right] \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{h^2 + 2}{h^2 + 5h + 4} + \frac{1}{2}\right] \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4 + h^2 + 5h + 4}{2\left(h^2 + 5h + 4\right)} \times \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 + 5h}{2h\left(h^2 + 5h + 4\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 + 5h}{2h\left(h^2 + 5h + 4\right)} = \frac{5}{8}$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 حيث : $f'(2) = \frac{5}{8}$.

6) لدينا : $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x + 3} \quad ; \quad x = 1$

و منه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x + 3 \neq 0 \text{ و } x \geq 0\}$

$$D_f = [0 ; +\infty[\quad ; \quad f(1) = \frac{-1}{4}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+h} - 2}{1 + h + 3} + \frac{1}{4}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+h} - 2}{4+3} + \frac{1}{4}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4\sqrt{1+h} - 8 + 4 + h}{4+(4+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4\sqrt{1+h} - (4-h)}{4h(4+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4\sqrt{1+h} - (4-h)}{4h(4+h)} \times \frac{4\sqrt{1+h} + (4-h)}{4\sqrt{1+h}(4-h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-h+24)}{4(4+h)\left[4\sqrt{1+h} + 4 - h\right]}$$

$$= \frac{24}{16\,(4+14)} = \frac{24}{1608} = \frac{3}{32}$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 حيث $f'(1) = \frac{3}{32}$

7) لدينا : $f(x) = \frac{x^2 + 9x - 2}{x - 1} \quad ; \quad x_0 = 2$

و منه : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ ؛ $f(2) = 20$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(2+h)^2 + 9(2+h) - 2}{2+h-1} - 20}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4+4h+h^2+18+9h-2}{1+h} - 20}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2+13h+20}{1+h} - 20}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2+13h+20-20(1+h)}{1+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2-7h}{1+h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\,(h\ -\ 7)}{h\,(1\ +\ h)} = \lim_{h\to 0} \frac{h\ -\ 7}{1\ +\ h} = -7$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 حيث : $f'(2) = -7$

التمرين 3 .

1- تعيين مجموعة التعريف : $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : 9 - x^2 \geq 0 \right\}$

لدينا :

x	$-\infty$ -3 3 $+\infty$
$9-x^2$	- 0 + 0 -

وعليه : $D_f = [-3\ ;\ 3]$

2- حساب : $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{x-3}$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{\sqrt{9-x^2}\ .\ \sqrt{9-x^2}}{(x-3)\sqrt{9-x^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{9-x^2}{(x-3)\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{(3-x)(3+x)}{(x-3)\sqrt{9-x^2}}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ x \to 3}} \frac{-(x-3)(x+3)}{(x-3)\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\substack{< \\ x \to 3}} \frac{-(3+x)}{\sqrt{9-x^2}} = -\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} -(x+3) \longrightarrow -6 \\ \sqrt{9-x^2} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

ونقول أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 3 من اليسار وعليه $\left(C_f\right)$ يقبل نصف مماس عند 0 من اليسار يوازي حامل محور التراتيب .

3- تبيان أن $\left(C_f\right)$ هو نصف دائرة :

لدينا : $f\left(x\right) = \sqrt{9-x^2}$ ومنه $y = \sqrt{9-x^2}$

وبالتالي : $\begin{cases} y^2 = \left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} y^2 = 9 - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases}$

إذن : $\left(C_f\right)$ من نصف الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 3 حيث $y \geq 0$.

التمرين 4 .

1- دراسة الاستمرارية عند 0 : $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} f\left(x\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f\left(0\right)$$

ومنه f مستمرة عند 0 .

- الدالة f هي جداء دالتي المقلوب و sin و عليه فهي مستمرة على $\mathbb{R}^*$ لكن f مستمرة عند 0 ومنه f مستمرة على $\mathbb{R}$

2) قابلية الاشتقاق عند 0 :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{\frac{1}{h}\sin h}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{1}{h} \times \frac{\sin h}{h} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{1}{h} . \frac{\sin h}{h} = -\infty$$

إذن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند O .

التمرين 5 .

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 \left(x^2 + 2x + 1\right)}}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \quad ; \quad x \neq -1$$

ومنه : $$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 \left(x + 1\right)^2}}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \quad ; \quad x \neq -1$$

وعليه : $$f(x) = \frac{|x| . |x+1|}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

1- تعيين مجموعة التعريف :

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : (x+1)(x^2 - x + 1) \neq 0 \right\}$$

وعليه : $\left(x+1\right)\left(x^2 - x + 1\right) = 0$ تكافئ $x + 1 = 0$ أو

$x^2 - x + 1 = 0$ وأن $x = -1$ أو $x^2 - x + 1 = 0$

حل المعادلة : $x^2 - x + 1 = 0$

$D = -3$ ومنه ليس للمعادلة حلول .

وبالتالي : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

2 – دراسة الاستمرارية عند 0 :

لدينا : $$f(x) = \frac{|x| . |x+1|}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

ومنه :

x	$-\infty$ $\quad -1$	$\quad 0$	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$	x
$\lvert x+1\rvert$	$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x\rvert\cdot\lvert x+1\rvert$	$x(x+1)$	$-x(x+1)$	$-x(x+1)$

وبالتالي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\,(x+1)}{(x+1)\,(x^2-x+1)} & x \in \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left[0\,;+\infty\right[\\ f(x) = \dfrac{-x\,(x+1)}{(x+1)\,(x^2-x+1)} & x \in \left]-1\,;0\right] \\ f(-1) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

و عليه :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1} & ,\ x \in \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left[0\,;+\infty\right[\\ f(x) = \dfrac{-x}{x^2-x+1} & ,\ x \in \left]-1\,;0\right] \\ f(-1) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

و لدينا :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) \quad \frac{-x}{x+1} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) \quad \frac{x}{x+1} = 0$$

$$f(0) = \frac{|0| \,.\, |0+1|}{(0+1)\,(0^2 - 0 + 1)} = 0$$

إذن : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$

وعليه f مستمرة عند 0 .

- دراسة الاستمرارية عند -1 :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{-1}{3}$$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) \neq f(-1)$ وعليه f مستمرة عند 1 – من اليسار .

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{-x}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}$$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = f(-1)$ وعليه f مستمرة عند 1 – من اليمين

لكن الدالة f غير مستمرة عند 1 - .

3 – دراسة الاشتقاقية عند 0 :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{\frac{-h}{h^2 - h + 1}}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{-h}{h^2 - h + 1} \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{-1}{h^2 - h + 1} = -1$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار .

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{\frac{-h}{h^2 - h + 1}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{-h}{h^2 - h + 1} \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{-1}{h^2 - h + 1} = 1$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين لكنها غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

- دراسـة الاشتقاقية عند 1 - :

$$\lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{f(1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{\frac{-1 + h}{(-1+h)^2 - (-1+h) + 1} - \frac{1}{3}}{h}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \left[\frac{-1 + h}{1 - 2h + h^2 + 1 - h + 1} - \frac{1}{3} \right] \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \left[\frac{3(-1 + h) - (h^2 - 3h + 3)}{3(h^2 - 3h + 3)} \right] \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{-3 + 3h - h^2 + 3h - 3}{3(h^2 - 3h + 3)} \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{-h^2 + 6h - 6}{3(h^2 - 3h + 3)} \times \frac{1}{h} = +\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند 0 من اليسار ويمكن الإجابة أيضا بقولنا بما أن f غير مستمرة عند 1 – من اليسار فهي غير قابلة للاشتقاق عند 1- من اليسار .

$$\lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{\frac{+1 - h}{(-1+h)^2 - (-1+h) + 1} - \frac{1}{3}}{h}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{\frac{1 - h}{1 - 2h + h^2 + 1 - h + 1} - \frac{1}{3}}{h}$$

$$= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{\frac{1 - h}{h^2 - 3h + 3} - \frac{1}{3}}{h}$$

$$= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{3 - 3h - h^2 + 3h - 3}{3\,(h^2 - 3h + 3)} \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{-h^2}{3h\,(h^2 - 3h + 3)}$$

$$= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{-h}{3(h^2 - 3h + 3)} = 0$$

ومنه f تقبل الاشتقاقية عند 1- من اليمين لكنها غير قابلة للاشتقاق عند 1 - .

التمرين 6 .

حساب الدالة المـشـتقـة :

1) لدينا : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 + x + 1}$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \neq 0 \right\}$$

نحل المعادلة : $x^2 + x + 1 = 0$ ولدينا $\Delta = -3$

ومنه لا توجد حلول . $D_f = \mathbb{R}$

الدالة f هي دالة ناطقة و منه فهي تقبل الاشتقاق على D حيث :

$$f'(x) = \frac{(2x - 4)\,(x^2 + x + 1) - (2x + 1)\,(x^2 - 4x + 2)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - 4x^2 - 4x - 4 - 2x^3 + 8x^2 - 4x - x^2 + 4x - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5x^2 - 2x - 6}{(x^2 - x - 1)^2}$$

2) لدينا : $f(x) = \frac{x + 3}{(x - 1)(x + 2)}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : (x - 1)(x + 2) \neq 0\}$$

إذن : $D_f = \mathbb{R} - \{1 ; -2\}$

$$f'(x) = \frac{1(x - 1) - [1(x + 2) + 1(x - 1)](x + 3)}{(x - 1)^2 (x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x - 1)(x + 2) - (2x + 1)(x + 3)}{(x - 1)^2 (x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + x - (2x^2 + 7x + 3)}{(x - 1)^2 (x + 2)^2}$$

إذن : $f'(x) = \frac{-x^2 - 6x - 5}{(x - 1)^2 (x + 2)^2}$

3) لدينا : $f(x) = (2x + 1)^2 (x^2 + 3)^2$

و منه : $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2.2.(2x + 1)(x^2 + 3)^2 + 3(2x)(x^2 + 3) . (2x + 1)^2$$

$$f'(x) = (x + 1)(x^2 + 3)[4(x^2 + 3) + 6x(x - 1)]$$

$$f'(x) = (x + 1)(x^2 + 3)(16x^2 + 6x + 12)$$

4) لدينا : $f(x) = \left(\frac{2}{5}x^3 + 4x + 1\right)^3$ و منه : $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3 \times \left(\frac{6}{5}x^2 + 4\right)\left(\frac{2}{5}x^3 + 4x + 1\right)^2$$

5) لدينا : $f\left(x\right) = \dfrac{-x^2 + 3x - 5}{x + 1}$

و منه : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'\left(x\right) = \frac{(-2x + 3)(x + 1) - 1(-x^2 + 3x - 5)}{(x + 1)^2}$$

$$f'\left(x\right) = \frac{-2x^2 - 2x + 3x + 3 + x^2 - 3x + 5}{(x + 1)^2}$$

$$f'\left(x\right) = \frac{-x^2 - 2x + 8}{(x + 1)^2}$$

6) لدينا : $f\left(x\right) = -4x^2 + 5|x|$

و منه : $D_f = \mathbb{R}$.

ولدينا :

$$\begin{cases} f\left(x\right) = -4x^2 + 5x & ; \quad x \geq 0 \\ f\left(x\right) = -4x^2 - 5x & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$$

- من أجل $x > 0$: $f'\left(x\right) = -8x + 5$
- من أجل $x < 0$: $f'\left(x\right) = -8x - 5$

ندرس الاشتقاق عند 0 : $f\left(0\right) = 0$

$$\lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{f\left(h\right) - f\left(0\right)}{h} = \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{-4h^2 - 5h}{h}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{h(-4h - 5)}{h} = -5$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين لكن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

7) لدينا : $f(x) = \left|-x^2 + 8x - 15\right|$ و منه : $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 8x - 15 \quad ; \quad x \in [3\,;5] \\ f(x) = -x^2 + 8x - 15 \quad ; \quad x \in [3\,;5] \cup [5\,;+\infty] \end{cases}$$

- ندرس إشارة : $-x^2 + 8x - 15$

لدينا : $\Delta' = 1$ ومنه : $x_1 = 5$ ؛ $x_2 = 3$

و منه الإشارة هي :

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
		+	0	-	0	+	

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 8x - 15 \,; -x^2 + 8x - 15 \geq 0 \\ f(x) = -x^2 + 8x - 15 \,; -x^2 + 8x - 15 \leq 0 \end{cases}$$

لما $]3\,;5[$ $f'(x) = -2x + 8 \quad x \in$

لما $]5\,;+\infty[$ $f'(x) = -2x + 8 \;:\; x \in \;]-\infty\,;3[\; \cup$

قابلية الاشتقاق عند 3 : $f(3) = 0$

$$\lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{f(3+h) - f(h)}{h} = \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{f(3+h) - f(h) + 15}{h}$$

$$\lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{f(3+h) - f(h)}{h} = \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{f(3+h) - 8(3+h) + 15}{h}$$

$$\lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{h^2 - 2h}{h} = \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} (h - 2) = -2$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 3 من اليسار

$$\lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{f(3+h) - f(h)}{h} = \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{f(3+h) - 8(3+h) + 15}{h}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{-9 - 6h - h^2 + 24 + 8h - 15}{h} = \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{-h^2 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{h\left(-h + 2h\right)}{h} = \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} (-h + 2) = 2$$

إذن f تقبل الاشتقاق على ....3 .

لكن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 3 .

- قبلة الاشتقاق عند 5 : $f\left(5\right) = 0$

$$\lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{f\left(5 + h\right) - f\left(5\right)}{h} = \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{-\left(5 + h\right)^2 - 8\left(5 + h\right) - 15}{h}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{-25 - 10h - h^2 + 40 + 8h - 15}{h} = \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{-h^2 - 2h}{h}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{h\left(-h - 2\right)}{h} = \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} (-h - 2) = -2$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 5 من اليسار.

$$\lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{f\left(5 + h\right) - f\left(5\right)}{h} = \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{\left(5 + h\right)^2 - 8\left(5 + h\right) + 15}{h}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{25 + 10h + h^2 - 40 - 8h + 15}{h} = \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{h^2 + 2h}{h}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{h\left(h + 2\right)}{h} = \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} (h + 2) = 2$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 5 من اليمين .

لكن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 5

8) لدينا : $f\left(x\right) = \left|-x + 2\right| . \left|x + 5\right|$ و منه : $D_f = \mathbb{R}$

نكتب $f\left(x\right)$ دون رمز القيمة المطلقة

x	$-\infty$	-5	2 $+\infty$
$\lvert -x+2 \rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$-(-x+2)$
$\lvert x+5 \rvert$	$-(x+5)$	$x+5$	$x+5$
$\lvert -x+2 \rvert \lvert x+5 \rvert$	$-(-x+2)(x+5)$	$(-x+2)(x+5)$	$-(-x+2)(x+5)$

إذن :

$$\begin{cases} f(x) = -(-x+2)(x+5) \; ; \; x \in \left]-\infty \, ; -5\right] \cup \left[2 \, ; +\infty\right[\\ f(x) = (-x+2)(x+5) \; ; \; x \in \left[-5 \, ; 2\right[\end{cases}$$

* لما $x \in \left]-5 \, ; 2\right[$: $f'(x) = -1\,(x+5) + 1\,(-x+2)$

$$f'(x) = -x - 5 - x + 2$$

* لما $x \in \left]-\infty \, ; -5\right[\cup \left]2 \, ; +\infty\right[$: $f'(x) = -\,(-2x - 3)$

$$f'(x) = 2x + 3$$

- قابلية الاشتقاق عند 5- : $f(-5) = 0$

$$\lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{-(5 - h + 2)(-5 + h + 5)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} \frac{-h\,(7 - h)}{h} = \lim_{\substack{< \\ h \to 0}} -(7 - h)$$

$$= -7$$

وعليه f تقبل الاشتقاق عند 5- من اليسار.

$$\lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{(5 - h + 2)(-5 + h + 5)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} \frac{h\,(-h + 7)}{h} = \lim_{\substack{> \\ h \to 0}} (-h + 7) = 7$$

ومنه تقبل الاشتقاق عند 5- من اليمين لكن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 5-.

- قابلية الاشتقاق عند2 .

$$\lim_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{(-2-h+2)(2+h+5)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{-h(7+h)}{h} = \lim_{\substack{< \\ h\to 0}} -(7+h) = -7$$

إذن f قبل الاشتقاق عند 2 من اليسار .

$$\lim_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{-(-2-h+2)(2+h+5)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{h(7+h)}{h} = \lim_{\substack{> \\ h\to 0}} (7+h) = 7$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 2 من اليمين.

لكن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 2 .

التمرين 7 .

تعيين الدوال المشتقة :

$$1)\ f(x) = cos^3 x \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -3\ \sin x\ cos^2 x$$

$$2)\ f(x) = \sin^3 x$$

$$D_f = \{x \in k : cosx \neq 0\}$$

$$cosx = 0$$ معناه : $$x = \frac{\pi}{2} + \mathbb{R}\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f'(x) = 3\ (1+\tan^2 x)\ (\tan^2 x)$$

$$f'(x) = 3\ .\ \tan^2 g\ (1+\tan^2 x)$$

3) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \sin x \geq 0\}$$

نجد المتراجحة : $\sin x \geq 0$

حلولها من الشكل : $S = [2k\pi \ ; (2k+1)\pi]$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

ومنه : $D_f = [2k\pi \ ; (2k+1)\pi]$

مع $k \in \mathbb{Z}$

و الدالة f تقبل الاشتقاق على $]2k\pi \ ; (2k+1)\pi[$ مع $k \in \mathbb{Z}$

و منه : $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

4) $f'(x) = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - \sin x \neq 0\}$$

حل المعادلة $1 - \sin x = 0$ أي $\sin x = 1$

ومنه : $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f'(x) = \frac{-2\sin 2x\,(1 - \sin) - (-\cos x) \,.\, \cos 2x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1\ \sin x \cos x\,(1 - \sin x) + \cos x \,.\, \cos 2x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x\,[-4\sin x\,(1 - \sin x) + \cos 2x]}{(1 - \sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x\left(-4\sin x + 4\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x\right)}{(1-\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x\left(2\sin^2 x - 4\sin x + 1\right)}{(1-\sin x)^2}$$

5) $f(x) = \sqrt{\sin x - \cos 2x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \sin x - \cos 2x \geq 0\}$$

نحل المتراجحة : $\sin x - \cos 2x \geq 0$ أي

$$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) \geq 0$$

$$\sin x + 1 + 2\sin^2 x \geq 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 \geq 0 \ . . . (1)$$

نضع $\sin x = z$ نجد : $2z^2 + z - 1 \geq 0$

$\Delta = (1)^2 - 4(-1)(2)$ ومنه $\Delta = 9$

وعليه : $z_1 = \frac{-1+3}{4} = -1$, $z_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$

إذن : $2z^2 + z - 1 = 2(z+1)\left(z - \frac{1}{2}\right)$

إذن : $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 2(\sin x + 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$

وعليه (1) تكافئ : $2(\sin x + 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \geq 0$

ومنه : $\sin x - \frac{1}{2} \geq 0$ لأن : $\sin x \ 1 + \geq 0$

وعليه : $\sin x \geq \frac{1}{2}$ إذن : $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

$D_f \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right] \; , \; k \in \mathbb{Z}$: حيث

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

حيث :

$$f'(x) = \frac{cosx + 2\ \sin 2x}{2\ \sqrt{\sin x - cos2x}}$$

6) $f(x) = \dfrac{2 - \sin x}{4 - cosx}$

بما أن $4 - cosx > 0$ فإن : $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-cosx\ (4 - cos) - \sin x\ (2 - \sin x)}{(4 - cosx)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-cosx\ (4 - cos) - \sin x\ (2 - \sin x)}{(4 - cosx)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4\ cosx - 2\ \sin x + 1}{(4 - cosx)^2}$$

التمرين 8 .

اتجاه تغير الدالة f :

1- في المجال $]-\infty \; ; -1[$: لدينا $f'(x) > 0$ ومنه f متزايدة تماما.

2- في المجال $[-1 \; ; 0]$: لدينا $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة تماما.

3- في المجال $[0 \; ; 2]$: لدينا $f'(x) \leq 0$ و منه f متناقصة تماما.

4- في المجال $[2 \; ; 3]$: لدينا $f'(x) \leq 0$ ومنه f متناقصة تماما.

5- في المجال $[3 \; ; +\infty[$: $f'(x) \geq 0$ ومنه f متزايدة تماما .

التمرين 9 .

في المجال $[-1\ ;\ 0]$: $f_2(x) < 0$ ولدينا f_1 متناقصة تماما .

و في المجال $[0\ ;\ 1]$: $f_2(x) < 0$ و لدينا f_1 متناقصة تماما في النقطة

$M_1(-1\ ;\ 2)$ لدينا (C_1) يقبل نصف مماس يوازي محور الفواصل و لدينا

$f_2(-1) = 0$ في النقطة $M_1(1\ ;\ -2)$ فإن (C_1) يقبل نصف مماس يوازي محور

الفواصل و لدينا : $f_2(1) = 0$ إذن (C_1) هو التمثيل البياني للدالة f_1 و (C_2)

التمثل البياني لدالتها المشتقة f_1' إذن : $f_2 = f_1'$

التمرين 10 .

1- مجموعة التعريف : $D_f\ [-1\ ;\ +\infty[$

2- قابلية الاشتقاق عند 0 : $f(0) = 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\text{h}) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+\text{h}} - 1}{\text{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+\text{h}} - 1\right)\left(\sqrt{1+\text{h}} + 1\right)}{\text{h}\left(\sqrt{1+\text{h}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+\text{h}-1}{\text{h}\left[\sqrt{1+\text{h}} + 1\right]} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\text{h}} + 1} = \frac{1}{2}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 0 حيث $f'(0) = \frac{1}{2}$

معادلة المماس عند O :

$\text{y} = f(0) + f(0) \times (x - 0)$ أي : $\text{y} = 1 + \frac{1}{2}x$

3- التقريب التآلفي للدالة f :

أحسن تقريب تآلفي للدالة عند 0 هو الدالة g حيث : $g(x) = 1 + \frac{1}{2}x$

4- حساب القيم المقربة :

$$\sqrt{1,00007} = \sqrt{1 + 0,00007} \simeq 1 + \frac{1}{2}(0,00007)$$

$$\simeq 1 + 0,000035 \simeq 1,000035$$

إذن : $\sqrt{1,00005} \simeq 1,000035$

$$\sqrt{0,999917} = \sqrt{1 - 0,000083} = 1 - \frac{1}{2}(0,000083)$$

$$= 0,9999585$$

5- دراسة تغيرات الدالة f :

$$D_f = [-1 ; +\infty[$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \sqrt{1+x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+x} = +\infty$$

من أجل $x > -1$: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

قابلية الاشتقاق عند 1- من اليمين : $f(-1) = 0$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(\text{h}) - f(\;)}{\text{h}} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{\;} - 0}{\text{h}} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{\text{h}}}{\text{h}}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{\text{h}}} = +\infty$$

وعليه f لا تقبل الاشتقاق عند 1- و بيان (C_f) يقبل نصف مماس يوازي حامل محور التراتيب على يمين العدد1- .

الفروع اللانهائية :

بما أن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ فإننا نحسب : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

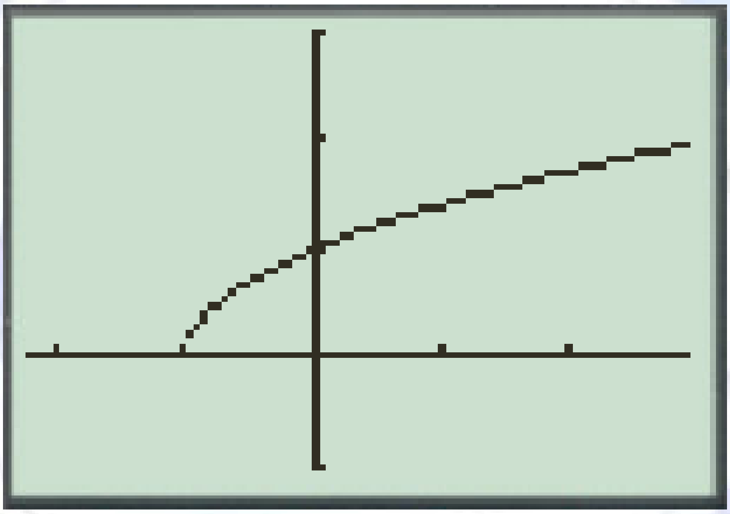
لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x}\ .\ \sqrt{1+x}}{x\ \sqrt{1+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 0$$

إذن $\left(C_f\right)$ يقبل فرع تقاطع مكافئ باتجاه محور الفواصل عند $+\infty$.

نقط التقاطع : من أجل : $x = 0$ فإن : y = 1 من أجل y = 0 فإن : $x = 1$.



التمرين 11 .

حساب الدوال المشتقة :

لدينا : $f(x) = x^n$ و عليه الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

الدالة f' تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f''(x) = n\ (n-1)\ x^{n-2}$

الدالة f'' تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'''(x) = n\ (n-1)\ (n-2)\ x^{n-3}$

الدالة f''' تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$$f^{(4)}(x) = n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ x^{n-4}$$

التمرين 12 .

حساب الدوال المشتقة :

لدينا $f\left(x\right) = cos\ (ax + b)$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f'\left(x\right) = a\ sin\ (ax + b)$

ومنه : $f'\left(x\right) = a\ cos\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$

الدالة f' تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f''\left(x\right) = a^2\ sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right)$

ومنه : $f''\left(x\right) = a^2\ cos\ (ax + b + \pi)$

الدالة f'' تقبل الاشتقاق على $f'''\left(x\right) = -a^3\ sin\ (ax + b + \pi)$

$f'''\left(x\right) = a^3\ sin\left(ax + b + \frac{3\pi}{2}\right)$

التمرين 13 .

لدينا : $y'' + \frac{16\pi^2}{25}\ y = 0$ ومنه : $y'' = -\left(\frac{4\pi}{5}\right)^2 y$

وعليه حلها هو : $y = a\ cos\ \frac{4\pi}{5}x + sin\ \frac{4\pi}{5}x$

ولدينا من أجل $x = 0$: $y = 1$ وعليه : $1 = a\ cos0 + b\ sin0$

ومنه : $a = 1$ و من أجل : $x = \frac{5}{4}$: $y' = 0$

لكن : $y' = \frac{4\pi a}{5}\ sin\ \frac{4\pi}{5}x + \frac{4\pi b}{5} cos\ \frac{4\pi x}{5}$

ومنه : $0 = \frac{4\pi a}{5}\ sin\pi + \frac{4\pi b}{5} cos\pi$

وعليه : $\frac{4\pi b}{5} cos\pi = 0$ ومنه $b = 0$

وعليه الحل هو : $y = cos \frac{4\pi x}{5} x$

التمرين 14 .

1- نبين أن : $f''(x) + 4f(x) - 2 = 0$

لدينا $f'(x) = -2\sin x \, cosx$ ومنه : $f'(x) = -\sin 2x$

إذن : $f''(x) = -2 \, cos2x$

وعليه : $f''(x) + 4f(x) - 2 = -2 \, cos2x + 4 \, cos^2x - 2$

$$= -2 \, (2cos^2x - 1) + 4 \, cos^2x - 2$$

$$= -4 \, cos^2x + 2 + 4 \, cos^2x - 2$$

إذن : $f''(x) + 4f(x) - 2 = 0$

2- حل المعادلة التفاضلية :

$$y'' = -4y + 2$$

نفرض $y = f(x)$ فنجد : $f''(x) + 4f(x) - 2 = 0$

ومن السؤال (1) : $f(x) = cos^2x$

التمرين 15 .

1- حساب المشتقات المتتابعة :

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x + 24$$

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24$$

$$f^{(3)}(x) = 24x - 36$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

$$f^{(5)}(x) = 0$$

نلاحظ أنه من أجل $n \geq 5$: $f^{(n)}(x) = 0$

2- دراسة إشارة $f''(x)$: $f''(x) = 12x^2 - 36x + 24$

ومنه : $f''(x) = 12\left(x^2 - 3x + 2\right)$

$f''(x) = 0$ تكافئ : $x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 1$ ومنه للمعادلة حلين : $x_1 = \frac{3 - 1}{2} = 1$, $x_2 = \frac{3 + 1}{2} = 2$

x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	+

الدالة f'' تنعدم عند 1 و 2 مغيرة في كل مرة إشارتها ومن هناك نقطتي انعطاف :

$M_1\ (1\,;f(1))$, $M_2\ (2\,;f(2))$

حيث : $f(7)$, $f(2) = 40$

التمرين 16 .

1- دراسة تغيرات الدالة f :

$D_f = [0\,;+\infty[$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\sqrt{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x} = +\infty$

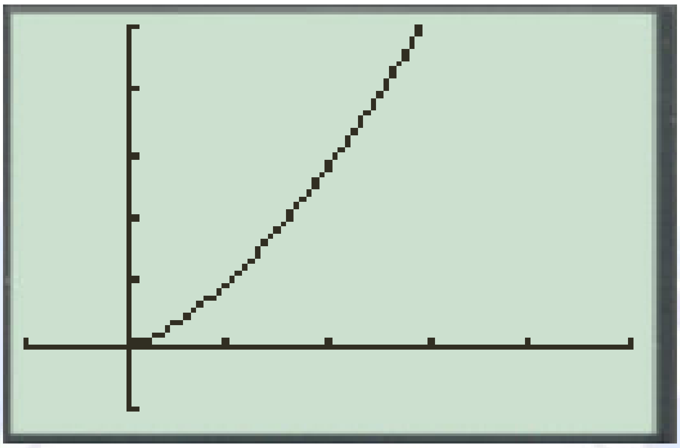
f تقبل الاشتقاق على $]0\,;+\infty[$ حيث : $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{2x + x}{2\sqrt{x}} + \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

ومنه $f'(x) > 0$ وعليه f متزايدة تماما على المجال

$[0\,;+\infty[$

الإنشاء بآلة بيانية :



2- حل المعادلة التفاضلية : $2y' = 3\sqrt{x}$

ومنه : $2y' = 3\sqrt{x}$ وعليه : $y' = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

وبالتالي حسب الدالة السابقة فإن $f(x)$ حل لهذه المعدلة التفاضلية ومنه : $y = f(x)$

أي $y = x\sqrt{x}$

التمرين 17 .

تعيين a و b وc

f حل للمعادلة التفاضلية : $y'' = 12x^2 - 24x + 1$

أي : $f''(x) = x^2 - 4x + 1$

لكن : $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx^2 + 2cx$$

ومنه : $\begin{cases} 12a = 12 \\ 6b = -24 \\ 2c = 10 \end{cases}$ أي أن : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases}$

التمرين 18 .

1) مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

2) دراسة التغيرات : $D_f = \left]-\infty ; -1\right[\cup \left]-1 ; +\infty\right[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(1+x)^3} = 0 \quad ; \quad \lim_{\substack{< \\ x\to-1}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1+x)^3} = 0 \quad ; \quad \lim_{\substack{> \\ x\to-1}} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{-3\,(1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{-3}{(1+x)^4}$$

وعليه : $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة تماما على كل من المجالين $\left]-\infty ; -1\right[$ و $\left]-1 ; +\infty\right[$

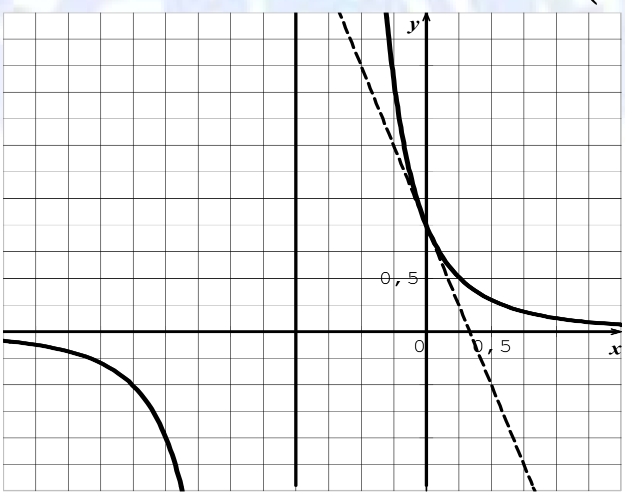
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	‖	-
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

3- معادلة المماس : $y = f(0) \times (x - 0) + f(0)$

حيث : $f(0) = 1$, $f'(0) = -3$

وعليه : $y = -3x + 1$ وهي معادلة المماس (Δ) .

4- إنشاء (Δ) و (γ) :



5- أحسن تقرب تآلفي للدالة f وهو الدالة : $x \mapsto -3x + 1$

6- حساب القيم المقربة :

$$\frac{1}{(1,001)^3} = \frac{1}{(1 + 0,001)^3} \simeq -3\,(0,001) + 1 \simeq 0,997$$

ومنه : $$\frac{1}{(1,001)^3} \simeq 0,997$$

$$\frac{1}{(0,999)^3} = \frac{1}{(1 - 0,001)^3} \simeq -3\,(-0,001) + 1$$

$$\simeq 1,003$$

وعليه : $$\frac{1}{(0,999)^3} \simeq 1,003$$

التمرين 19 .

1- تعيين D_f :

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 \neq 0 \right\}$$

حلول المعادلة : $x^2 - 3x + 2 = 0$ هي : 1 ، 2 .

$$D_f = \mathbb{R} - \{1 ; 2\}$$

2- تعيين الأعداد a و b و c :

$$f(x) = a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x - 2}$$

$$f(x) = \frac{a\,(x - 1)\,(x - 2) + b\,(x - 2) + c\,(x - 1)}{(x - 1)\,(x - 2)}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 - 3ax + 2a + bx + 2b + cx - c}{x^2 - 3x - 2}$$

$$f(x) = \frac{a\,x^2\ (b - 3a+c)\,x + 2b - c}{x^2 - 3x + 2}$$

ومنه : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a + c = 2 \\ 2a - 2b - c = 1 \end{cases}$ لأن : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

وعليه : $\begin{cases} a = 1 \\ b + c = 5 \\ 2b - c = -1 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ b = 9 \end{cases}$

وعليه : $f(x) = 1 - \dfrac{4}{x - 1} + \dfrac{9}{x - 2}$

2- دراسة تغيرات الدالة f :

- $D_f = \left]-\infty ; 1\right[\cup \left]1 ; 2\right[\cup$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{4}{x - 1} + \frac{9}{x - 2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) \quad \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} 1 - \frac{4}{x - 1} + \frac{9}{x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) \quad \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} 1 - \frac{4}{x - 1} + \frac{9}{x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) \quad \lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} 1 - \frac{4}{x - 1} + \frac{9}{x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) \quad \lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} 1 - \frac{4}{x - 1} + \frac{9}{x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{4}{x - 1} + \frac{9}{x - 2} = 1$$

$$f'(x) = \frac{4}{(x - 1)^2} - \frac{9}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4\,(x-2)^2 - 9\,(x-1)^2}{(x-1)^2\,(x-2)^2}$$

$$f'(x)\ \frac{\left[2\,(x-2) - 3\,(x-1)\right]\ \left[2\,(x-2) + 3\,(x-1)\right]}{(x-1)^2\,(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-x-1) - (5x-7)}{(x-1)^2\,(x-2)^2}$$

إشارة المشتق :

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{7}{5}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	

إذن f متزايدة تماما على كل من المجالين $\left]-1\,;\,1\right[$ و $\left]1\,;\,\frac{7}{5}\right]$

ومتناقصة تماما على كل من المجالات $\left]-\infty\,;\,-1\right]$ و $\left[\frac{7}{5}\,;\,2\right[$ و $\left]2\,;\,+\infty\right[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{7}{5}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{7}{5}\right)$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	1

$$f(1) = 1 - \frac{4}{-1-1} + \frac{9}{-1-2} = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$f\left(\frac{7}{5}\right) = 1 - \frac{4}{\frac{7}{5} - 1} + \frac{9}{\frac{7}{5} - 2} = 1 - \frac{4}{\frac{2}{5}} + \frac{9}{\frac{-3}{5}}$$

$$f\left(\frac{7}{5}\right) = 1 - 4 \times \frac{5}{2} + 9 \times \frac{5}{-3} = 1 - 10 - 15 = -24$$

3 – تعين معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = 1$ فإن $y = 1$ معادلة مستقيم مقارب يوازي $(y'y)$.

وبما أن $\left|\lim\limits_{x \to 1} f(x)\right| = +\infty$ فإن : $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب يوازي $(x'x)$.

- دراسة الوضعية للمنحنى(C) و المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = 1$.

$$f(x) - 1 = \frac{-4}{x - 1} + \frac{9}{x - 2} = \frac{-4(x - 2) + 9(x - 1)}{(x - 1)(x - 2)}$$

$$f(x) = \frac{x - 1}{(x - 1)(x - 2)}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		1		2		$+\infty$
$5x - 1$		-	0	+		+		+	
$(x - 1)(x - 2)$		+		+	0	-	0	+	
$f(x) - y$		-	0	+	‖	-	‖	+	

وعليه (C) و (Δ) تتقاطعان في النقطة $M_1\left(\frac{1}{5} ; 1\right)$

(C) فوق (Δ) في كل من المجالين $\left]\frac{1}{5} ; 1\right[$ و $]2 ; +\infty[$

(C) يقع تحت $\left(\Delta\right)$ في كل من المجالين $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{5}\right[$ و $]1\ ;\ 2[$

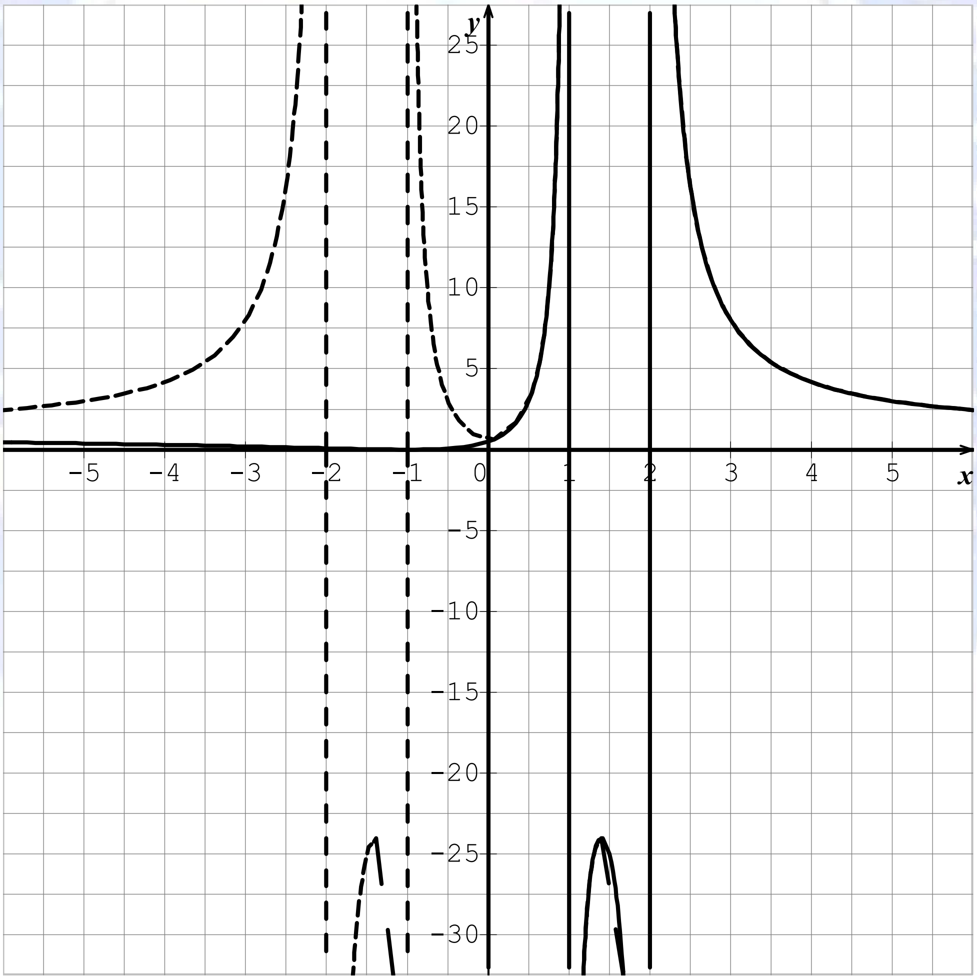
4- التقريب التآلفي للدالة f عند 0 :

لنكتب معادلة المماس عند : $y = f'(0)\,.\,(x-0) + f(0)$

حيث : $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(0) = \frac{7}{4}$ إذن : $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$

وعليه أحسب تقريب تآلفي للدالة f هو الدالة التآلفية : $x \mapsto \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$

5- إنشاء (C)



II) 1) تعيين مجموعة تعريف الدالة g :

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 3|x| + 2 = 0 \right\}$$

نحل المعادلة : $x^2 - 3|x| + 2 = 0$ أي : $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$

نوضع : $|x| = z$ نجد : $z^2 - 3z + 2 = 0$ و حليها

$z = 1$ أو $z = 2$ و بالتالي : $|x| = 1$ أو $x = 2$

ومنه : $x = 1$ أو $x = -1$ أو $x = -2$ أو $x = 2$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2 ; -1 ; 1 ; 2\}$$

2- كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} \quad ; \quad x \in]0 ; +1[\cup]1 ; 2[\cup].... ; +\infty[\\ f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \quad ; \quad x \in]-\infty ; -2[\cup]-2 ; -1[\cup]-1 ; 0[\end{cases}$$

3- دراسة الاستمرارية عند 0 :

$$g(0) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} g(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{2} = g(0)$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} g(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{2} = g(0)$$

إذن g مستمرة عند 0.

- قابلية الاشتقاق عند 0 : $g(0) = 0$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \left[\frac{h^2 + 2h + 1}{h^2 + 3h + 2} - \frac{1}{2}\right] \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{2h^2 + 4h + 2 - h^2 + 3h - 2}{2\left(h^2 - 3h + 2\right)} \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{h^2 + 7h}{2\left(h^2 - 3h + 2\right)} \times \frac{1}{h} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{h + 7}{2\left(h^2 - 3h + 2\right)} = \frac{7}{4}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليمين .

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \left[\frac{h^2 + 2h + 1}{h^2 + 3h + 2} - \frac{1}{2}\right] \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \left[\frac{2h^2 - 4h + 2 - h^2 - 2h - 2}{2\left(h^2 + 3h + 2\right)}\right] \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{h^2 - 6h}{2\left(h^2 + 3h + 2\right)} \times \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{h - 6}{2\left(h^2 + 3h + 2\right)} \times -\frac{3}{2}$$

إذن f تقبل الاشتقاق عند 0 من اليسار لكن f غير قابلة للاشتقاق عند0.

4- دراسة شفعية الدالة g :

لدينا من أجل كل x من D_f : $-x \in \mathbb{R}$

ولدينا : $$g(-x) = \frac{(-x)^2 + 2\,|-x| + 1}{x^2 - 3\,|-|x + 2} = g(x)$$

ومنه g زوجية .

5- استنتاج $(\wp)$ من (C) :

لدينا من أجل : $x \in [0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$

$$g(x) = f(x)$$

ومنه $(\wp)$ ينطبق على (C) .و باقي البيان يستنتج بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأن الدالة g زوجية.

6- المناقشة البيانية :

$$(m-1)x^2-(3m+2)x+2m-1=0$$
$$mx^2-x^2-3mx-2x+2m-1=0$$
$$m\left(x^2-3x+2\right)=x^2+2x+1$$
$$m=\frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}$$

وعليه :

$$m=\frac{\left(x+1\right)^2}{x^2-3x+2}$$

وعليه :

$$m=f\left(x\right)$$

لما : $m\in\left]-\infty\,;\,0\right[$ للمعادلة حلين .

لما $m=0$: للمعادلة ثلاث حلول أحدهما مضاعف .

لما $m\in\left]0\,;\,1\right[$: للمعادلة أربعة حلول.

لما $m\in\left]1\,;\,\frac{27}{2}\right[$: للمعادلة أربعة حلول.

لما $m=\frac{27}{2}$: للمعادلة ثلاث حلول أحدهما مضاعف.

لما $m\in\left]\frac{27}{2}\,;\,+\infty\right[$: للمعادلة حلين.

التمرين 20 .

1- دراسة إشارة الدالة f :

$$D_f=\left]-\infty\,;\,-1\right[\ \cup\ \left]-1\,;\,1\right[\ \cup\ \left]1\,;\,+\infty\right[$$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	-	0	+	

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} \frac{(x-2)^2}{x^2-1} = +\infty$$

لأن : $\begin{cases} (x-2)^2 \longrightarrow 9 \\ (x^2-1 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} \frac{(x-2)^2}{x^2-1} = -\infty$$

لأن : $\begin{cases} (x-2)^2 \longrightarrow 9 \\ (x^2-1 \xrightarrow{<} 0 \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ <}} \frac{(x-2)^2}{x^2-1} = -\infty$$

لأن : $\begin{cases} (x-2)^2 \longrightarrow 1 \\ (x^2-1 \xrightarrow{<} 0 \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{(x-2)^2}{x^2-1} = +\infty$$

لأن : $\begin{cases}(x-2)^2 \longrightarrow 1 \\ (x^2-1 \xrightarrow{>} 0\end{cases}$

$$\bullet\ f'(x) = \frac{2\,(x-2)\,(x^2-1) - 2x\,(x-2)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\,(x-2)\left[x^2-1-x\,(x-2)\right]}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\,(x-2)\,(2x-1)}{(x^2-1)^2}$$

إشارة المشتق :

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	+	‖	+	0	-	‖	-	0	+	

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالات $]-\infty\ ;\ -1[$ و $\left]-1\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ و $[2\ ;\ +\infty[$

ومتناقصة تماما على كل من المجالين $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[$ و $]1\ ;\ 2]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f\left(\frac{1}{2}\right)=-3$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(0)=0$	↗	1

- الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة

هناك 6 فروع لا نهائية و ثلاث مستقيمات مقاربة معادلتها $x = -1$, $x = 1$, $y = 1$

- دراسة الوضعية للمنحنى (C) و المستقيم المقارب الأفقي : $y = 1$

$$f(x) - 1 = \frac{(x-2)^2}{x^2-1} - 1 = \frac{x^2 - 4x + 4 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$f(x) - 1 = \frac{-4x + 5}{x^2 - 1}$$

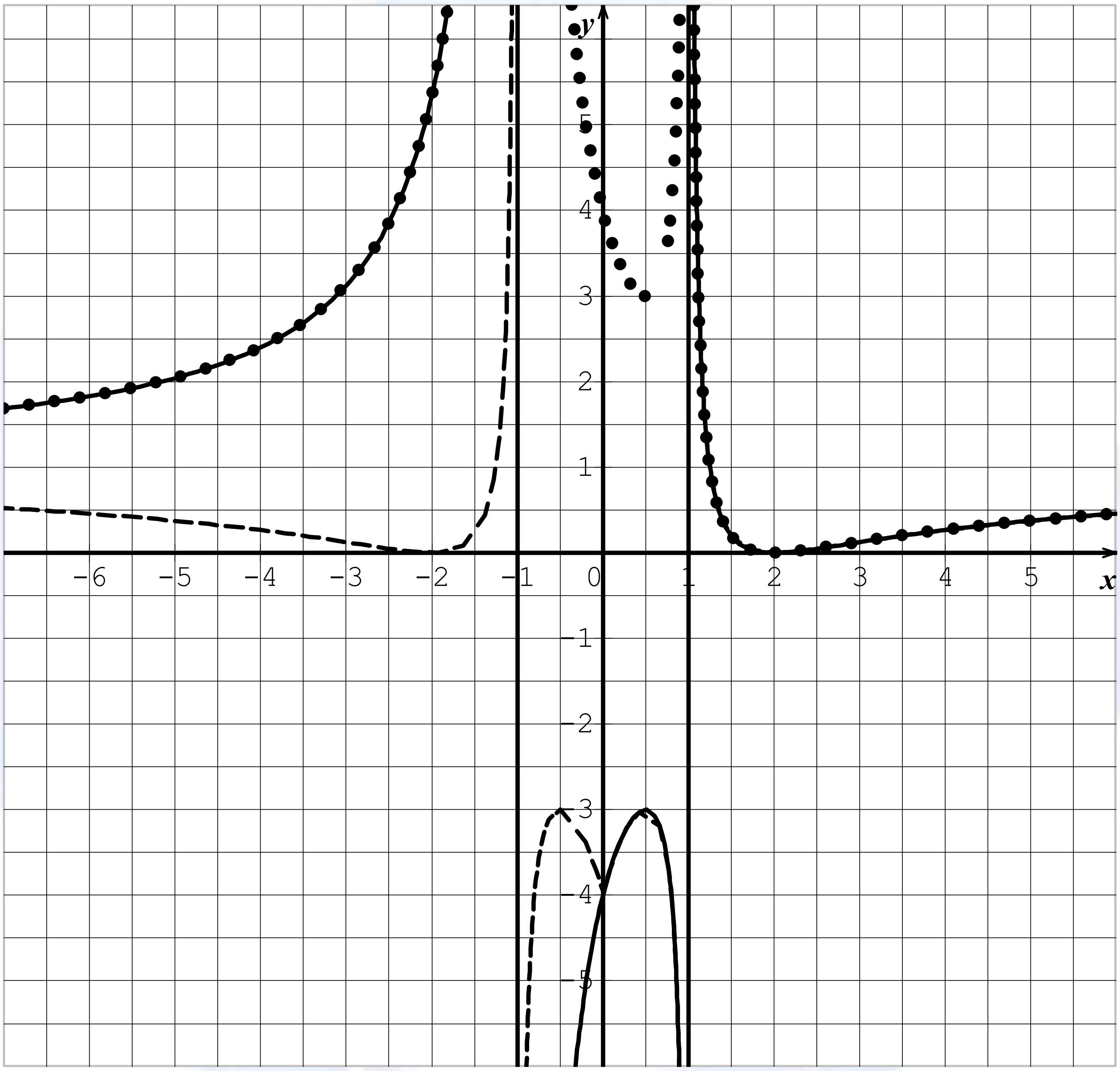
x	$-\infty$		-1		1		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$-4x+5$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-1$		$+$		$-$		$+$	0	$-$	

(C) يقطع (Δ) في النقطة $M\left(\frac{5}{4} ; 1\right)$

(C) يقطع فوق (Δ) في كل من المجالين $]-\infty ; -1[$ و $\left]1 ; \frac{5}{4}\right[$

(C) يقطع تحت $\left(\Delta\right)$ في كل من المجالين $\left]-1\ ;\ 1\right[$ و $\left]\frac{5}{4}\ ;\ +\infty\right[$

- أنشأ (C) بآلة بيانية :



- المناقشة البيانية :

$$(m - 1)\,x^2 + 4x - m - 4 = 0$$

$$m\,x^2 - x^2 + 4x - m - 4 = 0$$

$$m\,(x^2 - 1) = x^2 - 4x + 4$$

$$m\,(x^2 - 1) = (x - 2)^2$$

$$m \frac{(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$$

ومنه $m = f(x)$.

- لما $m \in]-\infty ; -3[$: للمعادلة حلين.
- لما $m = -3$: للمعادلة حل مضاعف.
- لما $m \in]-3 ; 0[$: ليس للمعادلة حلول.
- لما $m = 0$: للمعادلة حل مضاعف.
- لما $m \in]0 ; 1[$: للمعادلة حلين .
- لما $m = 1$: للمعادلة حل وحيد .
- لما $m \in]1 ; +\infty[$: للمعادلة حلين متمايزين .

2) كتابة $g(x)$ دون رمز القمة المطلقة

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 - 1} \; ; x \in [0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\\ g(g) = \dfrac{(-x - 2)^2}{x^2 - 1} \; ; x \in [-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0[\end{cases}$$

- دراسة الاستمرارية عند 0 : $g(0) = -4$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{(x - 2)^2}{x^2 - 1} = -4 = g(0)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{(x - 2)^2}{x^2 - 1} = -4 = g(0)$$

ومنه g مستمرة عند 0 .

- دراسة الاشتقاق عند 0 .

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{\frac{(-h-2)^2}{h^2-4}+4}{h} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{h^2+4h+4+4h^2-4}{h(4h^2-1)}$$

$$= \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{5h^2-4h}{h(h^2-1)} = \lim_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{5h+4}{h^2-1} = -4$$

ومنه g قابلية الاشتقاق على يسار 0

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{\frac{(h-2)^2}{h^2-4}+4}{h} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{h^2+4h+4+4h^2-4}{h(4h^2-1)}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{5h^2-4h}{h(h^2-1)} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{5h+4}{h^2-1} = 4$$

ومنه g تقبل الاشتقاق على يمين 0 .

لكن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0 .

- في المجموعة : $]1\,;+\infty[\ \cup\ [0\,,1[\ :\ g(x)=f(x)$

- دراسة شفعية الدالة g :

من أجل كل عدد حقيقي x من D_g لدينا : $-x \in D_g$

ولدينا : $g(-x) = \frac{(|x|-2)^2}{(-x)^2-1} = g(x)$ ومنه g زوجية .

- استنتاج (C') :

في المجموعة $]1\,;+\infty[\ \cup\ [0\,;1[\ :\ (C')$ ينطبق على (C) في المجال

$]-1\,;1[\ :\ (\wp)$ يناظر (C) بالنسبة لمحور الفواصل

-4 تعيين D_f :

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \sin^2 x - 1 \neq 0\right\}$$

نحل المعادلة : $\sin^2 x - 1 = 0$ أي $(\sin x - 1)(\sin x + 1)$

ومنه $\sin x = 1$ أو $\sin x = -1$

وعيه : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in ...$

$$D_\alpha = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- تبيان أن α مركب دالتين :

α ه مركب الدالتين : $f : x \longrightarrow f(x)$

$$g : x \longrightarrow \sin x$$

أن : $\alpha(x) = (fog)(x) = f(g(x)) = f(\sin x)$

$$\alpha(x) = \frac{(\sin x - 2)^2}{\sin^2 x - 1}$$

إذن : $\alpha = fog$

- حساب مشتقة الدالة α :

$$\alpha'(x) = g'(x) . f'[g(x)]$$

$$\alpha'(x) = \frac{2 (\sin x - 2)(2\sin x - 2)}{(\sin^2 x - 1)^2}$$

$$\alpha'(x) = \frac{2 \cos x (\sin x - 2)(2\sin x - 1)}{(\sin^2 x - 1)^2}$$

التمرين 21 .

1- تعيين α و β و γ :

بما أن $O \in (\Gamma)$ فإن : $f(0) = 0$ وعليه : $0 = \alpha + \sqrt{\gamma}$

وبما أن $A \in (\Gamma)$ فإن : $f(1) = -1$

ومنه: $-1 = \alpha + \sqrt{\beta + \gamma}$

إذن :
$$\begin{cases} \alpha + \sqrt{\gamma} = 0 \\ \alpha + \sqrt{\beta + \gamma} = -1 \end{cases}$$

ولدينا معامل توجيه المماس عند 0 يساوي $-\frac{3}{4}$ وعليه $f'(0) = -\frac{3}{4}$

لدينا $f'(x) = \frac{\beta}{2\sqrt{\beta x + \gamma}}$ ومنه $f'(0) = \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}}$

إذن : $\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma}} = -\frac{3}{4}$ وعليه : $-6\sqrt{\gamma} = 4\beta$

أي : $4\beta + 6\sqrt{\gamma} = 0$

إذن :
$$\begin{cases} \alpha + \sqrt{\gamma} = 0 \ldots (1) \\ \alpha + \sqrt{\beta + \gamma} = -1 \ldots (2) \\ 2\beta + 3\sqrt{\gamma} = 0 \ldots (3) \end{cases}$$

من (1) $\sqrt{\gamma} = -\alpha$ وعليه : $\gamma = \alpha^2$ مع $\alpha < 0$

من (2) $\sqrt{\beta + \gamma} = -\alpha - 1$ أي $\sqrt{\beta + \gamma} + 1 = -\alpha$

ومنه: $\left(\sqrt{\beta + \gamma} + 1\right)^2 = \alpha^2$ لأن : $\alpha < 0$

وعليه : $\beta + \gamma + 2\sqrt{\beta + \gamma} + 1 = \alpha^2$

ومنه : $\beta + \alpha^2 + 2\sqrt{\beta + \gamma} + 1 = \alpha^2$

وبالتالي : $2\sqrt{\beta + \gamma} = -\beta - 1$

وبالتربيع : $4(\beta + \gamma) = \beta^2 + 2\beta + 1$ مع $\beta < -1$

إذن : $\beta^2 - 2\beta + 1 = 4\gamma \ldots (4)$

من (3) $3\sqrt{\gamma} = -2\beta$ ومنه : $9\gamma = 4\beta^2$ $(\beta < 0)$

وعليه : $\gamma = \frac{4}{9}\beta^2$ وبالتعويض في (4) نجد : $\beta^2 - 2\beta + 1 = \frac{16}{9}\beta^2$ إذن :

$$9\beta^2 - 18\beta + 9 = 16^2\beta^2$$

وعليه : $7\beta^2 + 18\beta - 9 = 0$ لدينا : $\Delta' = 144$

ومنه للمعادلة حلين $\beta_1 = \frac{-9-12}{7} = -3$ ؛ $\beta_2 = \frac{-9-12}{7} = -3$

ومنه: $\beta = -3$ (لأن $\beta < -1$) وعليه: $\gamma = \frac{4(-3)^2}{9} = 4$

و عليه: $\alpha = -\sqrt{4} = -2$ إذن : $f(x) = -2 + \sqrt{-3x+4}$.

2- أ- تعيين مجموعة تعريف g :

• $g(x) = -2 + \sqrt{4-3x} \quad , \ x < 1$

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R} : 4 - 3x \geq 0 \text{ و } x < 1\}$$

$$D_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{3}{4} \text{ و } x < 1\right\}$$

$$D_1 =]-\infty ; 1[$$

• $g(x) = x - 3 + \sqrt{x-1}$

$$D_2 = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0 \text{ و } x \geq 1\}$$

وعليه : $D_2 = [1 ; +\infty[$ ومنه : $D_g = D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}$

ب- دراسة الاستمرارية عند 1 :

$$g(1) = 1 - 3 + \sqrt{1-1} = -2$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} x - 3 + \sqrt{x-1} = -2 = g(1)$$

إذن g مستمرة عند 1 من اليمين

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} -2 + \sqrt{4-3x} = -1$$

وعليه : $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} g(x) \neq g(1)$ و عليه g غير مستمرة عند 1 من اليسار ؛ و عليه g غير مستمرة عند 1 .

- دراسة الاشتقاق عند 1 :

- $$\lim\limits_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim\limits_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{1+h-3+\sqrt{1+h-1}+2}{h}$$

$$= \lim\limits_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{\sqrt{h}+h}{h} = \lim\limits_{\substack{> \\ h\to 0}} \frac{1}{\sqrt{h}}+1 = +\infty$$

وعليه g لا تقبل الاشتقاق عند 1 من اليمين

- $$\lim\limits_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim\limits_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{-2+\sqrt{4-3(1+h)}+2}{h}$$

$$= \lim\limits_{\substack{< \\ h\to 0}} \frac{\sqrt{1-3h}}{h} = -\infty$$

ومنه f لا تقبل الاشتقاق عند 1 من اليسار .

جـ - دراسة تغيرات g :

$$\lim\limits_{h\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{h\to-\infty} \left[-2+\sqrt{4-3x}\right] = +\infty$$

$$\lim\limits_{h\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{h\to+\infty} x-3+\sqrt{x-1}\Big] = +\infty$$

من أجل $x<1$: $g'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}}$

إذن $g'(x)<0$ وعليه g متناقص تماما على المجال $\left]-\infty\ ;\ 1\right[$.

- من أجل $x>1$: $g'(x) = 1+\dfrac{-3}{2\sqrt{x-1}}$

ومنه $g'(x)>0$ وعليه g متزايدة تماما على المجال $\left]1\ ;\ +\infty\right[$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$	-	$-\infty$	‖ $+\infty$	+	
$g(x)$	$+\infty$ ↘		-2	↗ $+\infty$	

5- دراسة الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة :

هناك فرعين لانهائيين .

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\sqrt{4-3x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x}+\frac{\sqrt{4-3x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x}+\frac{\sqrt{4-3x}\,.\,\sqrt{4-3x}}{x\sqrt{4-3x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x}+\frac{4-3x}{x}\times\frac{1}{\sqrt{4-3x}}=0$$

لأن : $\frac{-2}{x}\to 0$ و $\frac{4-3x}{x}\to -3$ و $\frac{1}{\sqrt{4-3x}}\to 0$

إذن (C) يقبل فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الفواصل عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3+\sqrt{x-1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x}+\frac{\sqrt{x-1}}{x}\times\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x}+\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{\sqrt{x-1}}=1$$

لأن : $\frac{x-3}{x}\to 1$ و $\frac{x-1}{x}\to 1$ و $\frac{1}{\sqrt{x-1}}\to 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}-3+\sqrt{x-1}=+\infty$$

ومنه (C) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي

معادلته: $y = x$ عند $+\infty$.

هـ - تعيين نقط تقاطع (C) و (Δ) :

- من أجل $x < 1$: $g(x) = x$ إذن : $-2 + \sqrt{4 - 3x} = x$

وعليه : $\sqrt{4 - 3x} = x + 2$ ومنه : $\begin{cases} 4 - 3x = (x+2)^2 \\ x \geq -2 \end{cases}$

وعليه : $4 - 3x = x^2 + 4x + 4$ و $x \geq -2$

إذن : $x^2 + 7x = 0$ ومنه $x = 0$ أو $x = -7$

إذن : $x = 0$ لأن $x \geq -2$ و $x < 1$

ومنه نقط التقاطع هي $O(0 ; 0)$

- من أجل $x \geq 1$: $g(x) = x$

إذن : $x - 3 + \sqrt{x - 1} = x$ ومنه : $\sqrt{x - 1} = 3$

إذن : $x - 1 = 9$ ومنه : $x = 10$

وعليه : $g(10) = 10$. إذن نقط التقاطع هي $B(10 ; 10)$

ومنه : $(C) \cap (D) = \{O ; B\}$.

و- كتابة معادلات المماسات :

عند O : $y = g'(0) \cdot (x - 0) + g(0)$ و منه : $y = -\frac{3}{2}x$

لأن $g'(0) = -\frac{3}{2}$

عند B : $y = g'(x_1)\ (x - x_1) + g(x_1)$

$y = g'(10)\ (x - 10) + g(10)$ ؛ $y = \frac{7}{6}\ (x - 10) + 10$

$\left(\text{لأن } g'(10) = \frac{7}{6} \right)$ و منه : $y = \frac{7}{6}x - \frac{35}{3} + 10$

إذن : $y = \frac{7}{6}x - \frac{5}{3}$

ي- إنشاء (C) :