الاحـتـمـالات

الكفاءات القاعدية :

- تعيين قانون احتمال مرفق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات
- حساب احتمال حادثة علما حدوث حادثة أخرى
- بناء شجرة الإمكانيات المرجحة واستعمالها في حالة تكرار تجارب متطابقة ومستقلة
- استعمال أشجار المرجحة للحصول على علاقة الاحتمالات الكلية لحساب احتمال أو حل مشكلات
- التعرف على حادثتين مستقلتين
- الربط بين الوسط الحسابي و الأمل الرياضي و التباين التطبيقي والتباين النظري لسلسلة إحصائية
- إنجاز محاكاة لتبيان تلائم معطيات تجريبية مع قانون متساوي الاحتمال.

تصميم الدرس

I-تذكير لبعض المفاهيم القاعدية :

II الاحتمالات الشرطية ، شجرة الاحتمالات:

III الأمل الرياضي و التباين و الإنحراف المعياري المرفقة بقانون

تمارين ومشكلات حول الإحتمالات

حلول تمارين الإحتمالات

I- تذكير لبعض المفاهيم القاعدية :

1) مصطلحات :

- تجربة عشوائية هي تجربة تعرف مجموعة جميع النتائج الممكنة لها و لكن لا نستطيع أن نتنبأ بصفة مؤكدة أي نتيجة ستحقق فعلا عندما نقوم بهذه التجربة .
- نسمي مخرجا لتجربة عشوائية(أو إمكانية لتجربة عشوائية) كل نتيجة ممكنة لهذه التجربة العشوائية .
- مجموعة جميع المخارج لتجربة عشوائية تسمى ،كذلك، المجموعة الشاملة الممثلة لهذه التجربة العشوائية و يرمز إليها ، عادة، بالرمز Ω.
- لتكن Ω المجموعة الشاملة الممثلة لتجربة عشوائية:

نسمي حادثة متعلقة بهذه التجربة العشوائية كل مجموعة جزئية من المجموعة Ω.

- Ω هي مجموعة جزئية من Ω إذن Ω حادثة تسمى الحادثة الأكيدة.
- $\varnothing$ هي مجموعة جزئية من Ω إذن $\varnothing$ حادثة و هي تسمى الحادثة المستحيلة.
- إذا كانت A حادثة و كان ω مخرجًا، للتعبير على "$\omega \ni A$ " نقول :

" المخرج ω يحقق الحادثة A".

-نسمي حادثة بسيطة (أو حادثة ابتدائية أو حادثة أولية) كل حادثة يحققها مخرج واحد و واحد فقط.

- إذا كانت A،B حادثتين:

الحادثة المرمز إليها بالرمز	هي الحادثة	و هي الجزء من Ω المشكل من جميع المخارج التي
$\overline{A}$	المضادة للحادثة A (أو الحادثة العكسية للحادثة A)	لا تحقق الحادثة A
$A \cap B$	" A و B"	تحقق الحادثتين A و B
$A \cup B$	" A أو B"	تحقق واحدة على الأقل الحادثتين A و B .

القول «A و B غير متلائمتين » يعني $A \cap B = \varnothing$

- نقول عن حوادث A_1, A_2 ..... A_n أنها تشكل تجزئة للمجموعة Ω إذا و فقط إذا"

- كل واحدة من الحوادث A_1, A_2 ..... A_n غير مستحيلة .
- الحوادث A_1, A_2 ..... A_n غير متلائمة مثنى مثنى.
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots A_n = \Omega$.

***ملاحظة :** في هذا الدرس ،جميع المجموعات الشاملة المعتبرة هي مجموعات منتهية غير خالية.

2) الاحتمالات و خواصها :

أ- تعريف قانون احتمال على مجموعة شاملة :

تعريف ترميز :

لتكن Ω مجموعة شاملة بحيث : $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \ldots\ldots ; \omega_n\}$

تعريف قانون احتمال p على Ω يعني إرفاق بكل مخرج ω_i عدد حقيقي موجب p_i (و هذا من $i=1$ إلى غاية $i=n$). بحيث يكون $p_1+p_2+\ldots\ldots\ldots p_n=1$. و عندئذ من أجل كل عدد طبيعي i بحيث $n \geq i \geq 1$ ، العدد الحقيقي الموجب p_i يسمى احتمال المخرج ω_i و يرمز إليه بالرمز $p(\omega_i)$.

ب- احتمال حادثة :

تعريف الترميز :

لتكن Ω مجموعة شاملة و ليكن p قانون احتمال على Ω و لتكن A حادثة.

« احتمال الحادثة A » هو العدد الحقيقي الموجب المرمز إليه بالرمز $p(A)$ و المعرّف كما يلي:

- إذا كان $A=\{a_1 ; a_2 ; \ldots . a_k\}$ حيث $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k$ مخارج مختلفة مثنى مثنى.

$$P(A)=p(a_1)+p(a_2)+\ldots\ldots+p(a_k)$$

- مهما يكون المخرج a : $p(\{a\})=p(a)$

- $p(\varnothing)=0$.

جـ- خواص (مبرهنات):

لتكن Ω مجموعة شاملة و ليكن p قانون احتمال على Ω:

- مهما تكون الحادثة A: $0 \leq p(A) \leq 1$.
- مهما تكون الحادثة A: $p(\overline{A}) = 1-p(A)$.
- $p(\Omega)=1$.
- مهما تكون الحادثتان A وB : $p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B)$.

- إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.
- إذا كانت A_1، A_2، ..... A_m حوادث غير متلائمة مثنى مثنى :

$$p(A_1\cup A_2\cup \ldots\ldots\cup A_m)=p(A_1)+p(A_2)+\ldots\ldots+p(A_m)$$

د-حالات خاصة :

لتكن Ω مجموعة شاملة بحيث $\Omega=\{\omega_1 ; \omega_2 ,\ldots\ldots ;\omega_n\}$.

- قانون الاحتمال p على Ω المعرّف بـ : مهما يكون العدد الطبيعي i بحيث $n\geq i\geq 1$.

فإنّ $p(\omega_i)=\frac{1}{n}$ (n هو عدد جميع المخارج) يسمى قانون الاحتمال متساوي التوزيع على Ω (قانون الاحتمال المنتظم على Ω).

- عند التعامل مع قانون الاحتمال p متساوي التوزيع على Ω .

- نقول أنّ جميع المخارج متساوية الاحتمال .

- مهما تكون الحادثة A :

$$p(A)=\frac{\text{عدد المخارج التي تحقق الحادثة A}}{\text{عدد جميع المخارج}}$$

يقال كذلك : عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادثة A

$$p(A)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحادثة A}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

II الاحتمالات الشرطية ، شجرة الاحتمالات:

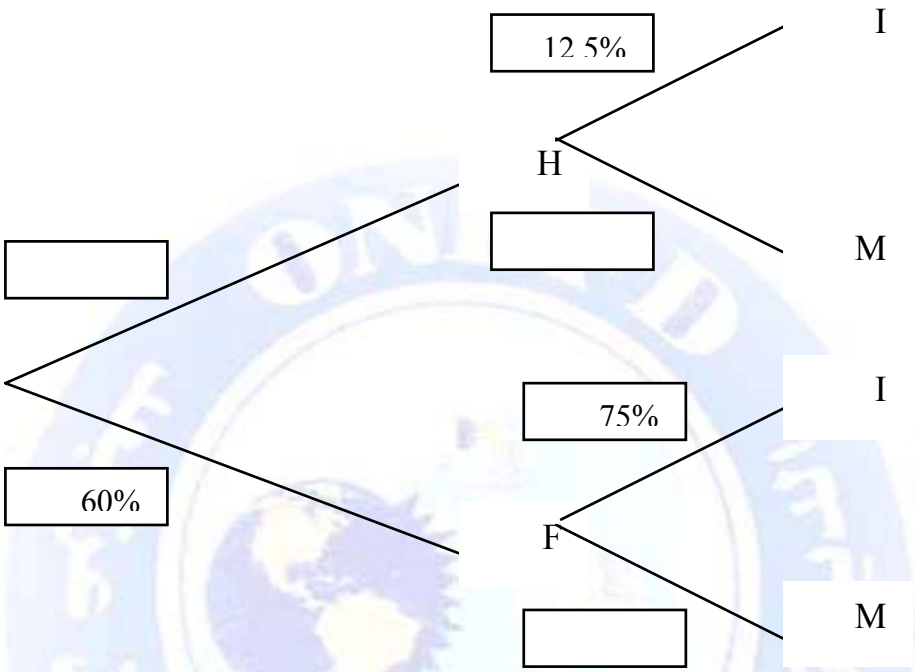
1) تمرين تمهيدي:

***المعطيات و الأسئلة :**

يتكون فريق طبي من 240 شخصا ينقسمون إلى فئتين : أطباء و ممرضون ، و في ما يلي نهتم بعناصر هذا الفريق.

60% من الأشخاص نساء ممرضات و 12,5% من الرجال ممرضون.

1- أكمل " المخطط" التالي- حيث F يمثل امرأة ، H يمثل رجل ، I يمثل ممرض(ة) ، M يمثل طبيب(ة) بكتابة النسب المئوية المناسبة داخل الإطارات الفارغة.



2- ما هو عدد النساء ؟ ما هو عدد النساء الممرضات؟

3-يراد الاختيار ، بالاعتماد على الصدفة الكاملة ، لشخص كي يقوم بمهمة.

- ما هو الاحتمال $p(F)$ أن يكون الشخص المختارامرأة ؟
- ما هو الاحتمال $p(F \cap I)$ أن يكون الشخص المختار امرأة ممرضة ؟

4-يراد الاختيار ، بالاعتماد على الصدفة الكاملة ، لامرأة كي تقوم بمهمة.

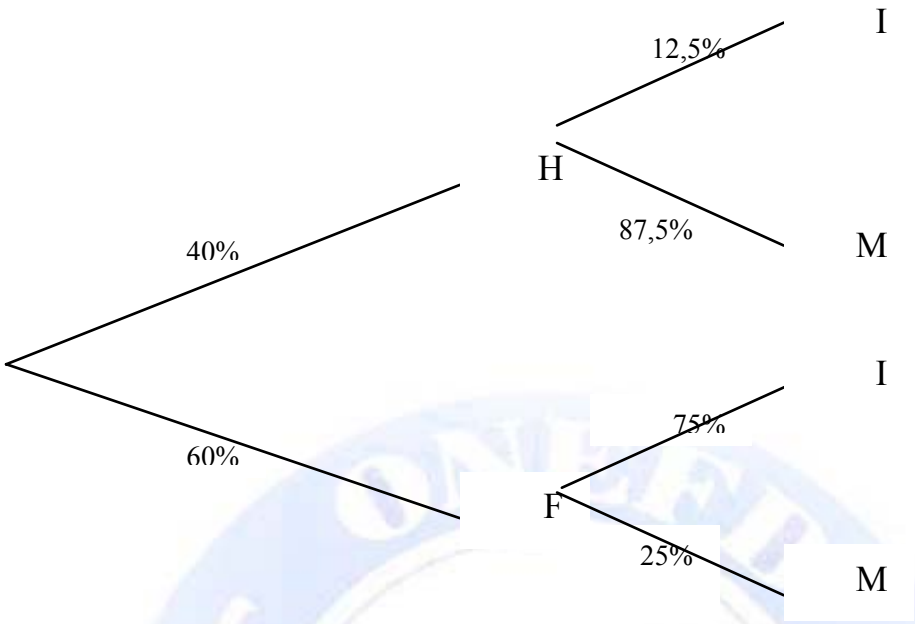
- ما هو الاحتمال $P_F(I)$ أن تكون الإمرأة المختارة ممرضة ؟

*** الأجوبة :**

-1- 60% من الأشخاص نساء و منه 40% من الأشخاص رجال (لأن 100%-60%=40%).

75% من النساء ممرضات منه 25% من النساء طبيبات (لأن 100%-75%=25%).

12,5% من الرجال ممرضون منه 87,5% من الرجال أطباء (لأن 100%-12,5%=87,5%)و يكمل " المخطط" كما يلي



-2- عدد النساء هو 60% من عدد جميع الأشخاص.

منه عدد النساء هو $240\times\frac{60}{100}$ أي عدد النساء هو 144.

عد النساء الممرضات هو 75% من عدد جميع النساء.

منه عدد النساء الممرضات هو $144\times\frac{75}{100}$ أي عدد النساء الممرضات هو 108.

-3- " الاختيار بالاعتماد على الصدفة الكاملة" عبارة تنص على جميع الإمكانيات متساوية الاحتمال.

- عدد جميع المخارج هو 240.

عدد المخارج التي تحقق الحادثة F " الشخص المختار امرأة" هو144.

منه $p(F)=\frac{144}{240}$ أي $p(F)=0,6$.

- عدد المخارج التي تحقق الحادثة $(F\cap I)$ " الشخص المختار امرأة ممرضة" هو 108.

منه $p(F\cap I)=\frac{108}{240}$ أي $p(F\cap I)=0,45$.

-4- عدد جميع المخارج هو 144 و عدد المخارج التي تحقق" الامرأة المختارة ممرضة" هو 108.

منه $p_F(I)=\frac{108}{240}$ أي $\boxed{p_F(I)=0,45}$.

***ملاحظات:**

-1- " المخطط" المقترح يسمى في الواقع" شجرة متوازنة" أو" شجرة احتمالات" أو " شجرة مرجحة" و استعمال هذا النوع من المخططات

(التي تظهر فيها حوادث و احتمالات) يخضع إلى قواعد دقيقة ستشرح في بقية الدرس.

-2- لدينا : $p(F)=0,6$ و $p(F\cap I)=0,45$ و $p_F(I)=0,75$.

و نلاحظ أن $p_F(I)=\frac{p(F\cap I)}{p(F)}$

$p_F(I)$ هو الاحتمال كي يكون الشخص المختار ممرضا علما أن الشخص المختار امرأة .

2)تعريف ترميز :

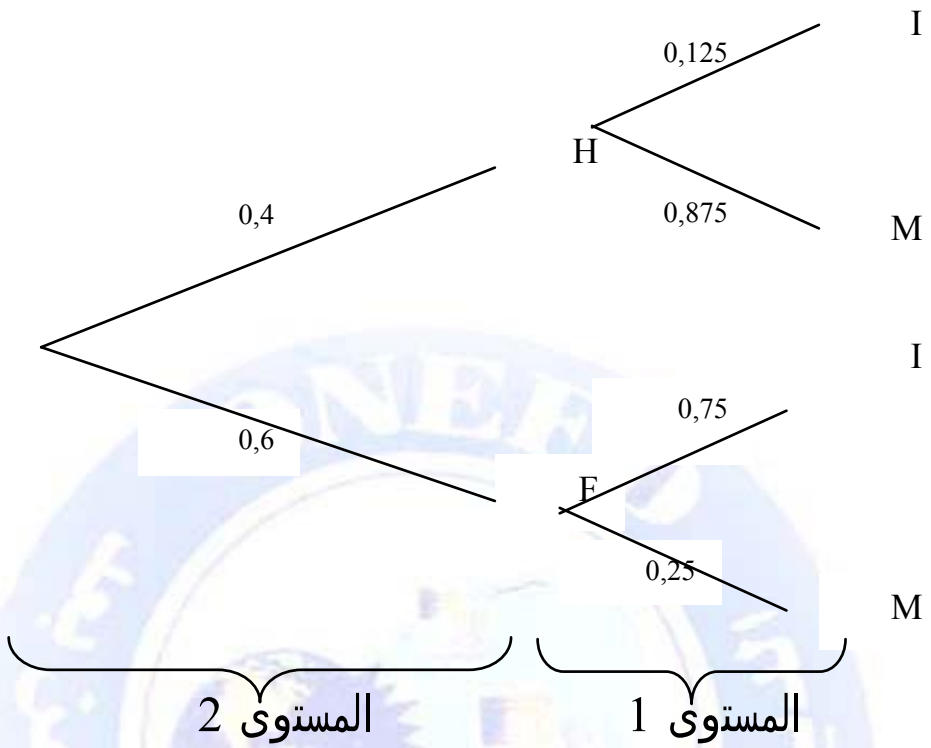
لتكن Ω مجموعة شاملة مزودة بقانون احتمال p و لتكن A حادثة بحيث $p(A)\neq 0$.من أجل كل حادثة B " احتمال B علما أن A محققة" هو العدد الحقيقي الموجب المرمز إليه بالرمز $p_A(B)$

(أو بالرمز $p(B/A)$)و المعرف بالمساواة $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$

ملاحظة :في التعريف السابق $p_A(B)$ يسمى احتمالا شرطيا و هو الاحتمال كي تتحقق B عندما نكون متأكدين أن A محققة.

3) شجرة الاحتمالات (أو الشجرة المتوازنة أو الشجرة المرجحة).

أ- دراسة مثال :المعطيات هي نفس المعطيات الواردة في نص التمرين التمهيدي السابق إذا اعتبرنا التجربة العشوائية " الاختيار – بالاعتماد على الصفة الكاملة لشخص" يمكن تلخيص الوضعية بالمخطط التالي :



هذا المخطط يسمى شجرة احتمالات (أو شجرة متوازنة أو شجرة مرجحة) و هو يقرأ من اليسار إلى اليمين.

كل قطعة مستقيمة ممثلة هذا المخطط تسمى **غصنا.**

*** رسم الأغصان :**

المستوى 1: الشخص المختار إما رجلا (H) و إما امرأة (F) .

و تمثل الحادثة " الشخص المختار رجل" بالحرف H في نهاية غصن .

و الحادثة " الشخص المختار امرأة" بالحرف F في نهاية غصن .

و يكون لهذين الغصنين نفس المبدأ • (تسمى هذه النقطة• جذر الشجرة) .

المستوى 2:

-إذا كان الشخص المختار رجلا فإن هذا الرجل هو إما ممرض (I)

و إما طبيب (M) و تمثل الحادثة " الرجل المختار هو ممرض" بالحرف I في نهاية غصن مبدأه العقدة F.

و الحادثة " الرجل المختار هو طبيب " بالحرف M في نهاية غصن مبدأه العقدة F.

- إذا كان الشخص المختار امرأة فإن هذه الامرأة هي ممرضة (I) و إما طبيبة (M) .

و تمثل الحادثة " الامرأة المختارة هي ممرضة" بالحرف I في نهاية غصن مبدأه العقدة F .

و الحادثة " الامرأة المختارة هي طبيبة" بالحرف M في نهاية غصن مبدأه العقدة F .

***الأعداد المرفقة بالأغصان :**

-في المستوى الأول :

لقد أرفقنا بالغصن F العدد 0,6 و p(F) = 0,6.

حيث p(F) احتمال الحادثة " الشخص المختار امرأة" .

و أرفقنا بالغصن H العدد 0,4 و يمكننا التأكد أن 0.4 هو p(H)

حيث p(H) احتمال الحادثة " الشخص المختار رجل".

-في المستوى الثاني:

لقد أرفقنا بالغصن I F العدد 0,75 و $P_F(I)$ =0,75

حيث $p_F(I)$ هو احتمال الحادثة " الشخص المختار ممرض علما أن الشخص المختار امرأة".

وأرفقنا بالغصن M F العدد 0,25و يمكن التأكد من

$p_F(M)=0,25$.

وأرفقنا بالغصن I H العدد0,125مكن التأكد من $p_H(I)=0,125$.وأرفقنا بالغصن M H العدد 0,875و يمكن التأكد من

$p_H(M) =0,875$.

حيث$p_F(M)$ الاحتمال أن يكون الشخص المختار طبيبا علما أن الشخص المختار امرأة .

$p_H(I)$ الاحتمال أن يكون الشخص المختار ممرضا علما أن الشخص المختار رجل .

$p_H(M)$ الاحتمال أن يكون الشخص المختار طبيبا علما أن الشخص المختار رجل .

- إذا اعتبرنا الجزء: I H من المخطط السابق (على سبيل المثال)

لدينا p(H)=0,4 و $p_H(I)=0,125$ منه $\frac{p(H \cap I)}{p(H)}=0,125$

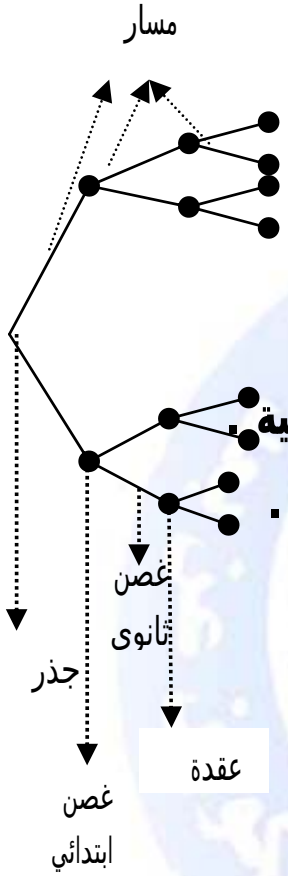
إذن $\frac{p(H \cap I)}{0,4)}$ إذن $p(H\cap I)=0,125$

إذن $p(H\cap I)$ " الاحتمال كي يكون الشخص المختار رجلا و ممرضا" هو 0,05.

في شجرة احتمالات العدد المرفق بغصن يسمى **وزن** هذا الغصن و من هنا تأتي العبارة " شجرة متوازنة" أو " شجرة مرجحة" .

ب- وصف لشجرة الاحتمالات و قواعد إنشائها:

شجرة الاحتمالات هي مخطط موجه و متوازن يمكن من تلخيص وضعية في ميدان الاحتمالات البسيطة .



وصف و مفردات :

- نشأ شجرة الاحتمالات و تقرأ من اليسار إلى اليمين.
- يسمى مبدأ الشجرة **جذر** الشجرة .
- تسمى نقطة الوصل بين غصنين **عقدة.**
- الأغصان التي تنطلق من الجذر تسمى **أغصان ابتدائية.**
- الأغصان الواصلة بين عقدتين تسمى **أغصان ثانوية .**
- كل طريق واصل بين الجذر و عقدة يسمى **مسارا.**

* المصادر A_n_.....A_2_A_1_

يمثل الحادثة.$A_n \cap$ ..... $A_2 \cap$ $A_1 \cap$.

▪ **قواعد إنشاء شجرة الاحتمالات :**

-1- الحوادث الموجودة في نهايات الأغصان الابتدائية تشكل تجزئة للمجموعة الشاملةΩ.

-2- وزن غصن ابتدائي هو احتمال الحادثة الموجودة في نهايته .

-3- وزن غصن ثانوي هو **الاحتمال الشرطي** للحادثة الموجودة في نهايته علما أن المسار الذي يتصل إلى مبدأه محقق.

-4- وزن (أو احتمال) مسار يساوي جداء أوزان الأغصان التي تشكل هذا المسار.

-5- احتمال حادثة مرفقة بعدة مسارات **كاملة يساوي** مجموع احتمالات هذه المسارات .

▪ **استنتاج:**

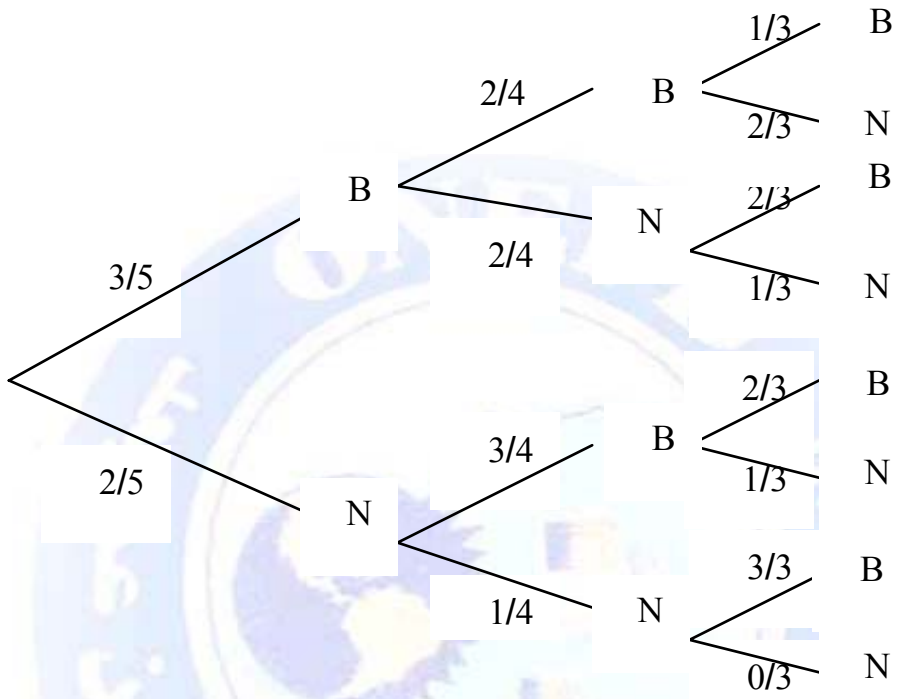
- مجموع أوزان الأغصان الابتدائية يساوي1.
- مجموع أوزان الأغصان الثانوية النابعة من نفس العقدة يساوي 1.

مثال تطبيقي: يحتوي كيس على ثلاثة كرات بيضاء و كرتين سودوتين.

نسحب على التوالي و بدون إرجاع 3كرات من الكيس و هذا بالاعتماد على الصدفة الكاملة .

يمكن تمثيل هذه التجربة العشوائية بالشجرة المتوازنة التالية

(حيث B يعين بيضاء و N يعني سوداء).



- الاحتمال كي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء هو $\frac{3}{5}$ (قاعدة 2).
- الاحتمال كي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء **و**الكرتين الثانية
- **و** الثالثة المسحوبتين سودوتين هو $\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$ أي هو $\frac{1}{10}$

(قاعدة 4 وصف *)

- الاحتمال كي تكون الكرة الثالثة المسحوبة سوداء علما أن الأولى

و الثانية بيضوتان هو $\frac{1}{3}$ (قاعدة 3 وصف *)

- الاحتمال كي تكون الكرة الثالثة المسحوبة بيضاء هو

$\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}\right)$ (قاعدة 5)و هو 3

3)الحادثتان المستقلتان:

تعريف : لتكن Ω مجموعة شاملة مزودة بقانون احتمال p .
نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتين إذاو فقط إذا كان :
$P(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

*** ملاحظة :** يجب التمييز بين " الحادثتين المستقلتين" و " الحادثتين غير المتلائمتين"

***خاصية :**
لتكن Ω مجموعة شاملة مزودة بقانون احتمال p ولتكن A و B حادثتين بحيث :$P(A)\neq0$ و $P(B)\neq0$.
القول " A و Bمستقلتان" يكافئ" $p_A(B)=p(B)$ " و يكافئ " $p_B(A)=p(A)$".

مثال تطبيقي :
تحتوي علبة على 4 بطاقات صفراء و 6 بطاقات بيضاء ، هذه البطاقات مرقمة كما يلي :
البطاقات الصفراء تحمل الأرقام : 1،2،3،3 على الترتيب.
البطاقات البيضاء تحمل الأرقام : 1،2،3،3،3،4 على الترتيب.
بالاعتماد على الصدفة الكاملة ن نسحب بطاقة واحدة من العلبة .
إذا سمينا J الحادثة " البطاقة المسحوبة صفراء" .
B الحادثة " البطاقة المسحوبة بيضاء" .
T الحادثة " البطاقة المسحوبة تحمل الرقم 3".
D الحادثة " البطاقة المسحوبة تحمل الرقم 2".

P(J) الاحتمال كي تكون البطاقة المسحوبة صفراء هو $p(J)=\frac{4}{10}$

أي $p(J)=\frac{2}{5}$ (*)

P(B) الاحتمال كي تكون البطاقة المسحوبة بيضاء هو $p(B)=\frac{6}{10}$

أي $p(B)=\frac{3}{5}$ (•)

P(T) الاحتمال كي تكون البطاقة المسحوبة تحمل الرقم 3 هو

$p(T)=\frac{5}{10}$ أي $p(T)=\frac{1}{2}$ (*)

P(D) الاحتمال كي تكون البطاقة المسحوبة تحمل الرقم 2 هو

$p(D)=\frac{2}{10}$ أي $p(D)=\frac{1}{5}$ (•)

$P(J\cap T)$ الاحتمال كي تكون البطاقة المسحوبة صفراء و تحمل الرقم 3 هو $P(J\cap T)=\frac{2}{10}$ أي

$P(J\cap T)=\frac{1}{5}$ (*)

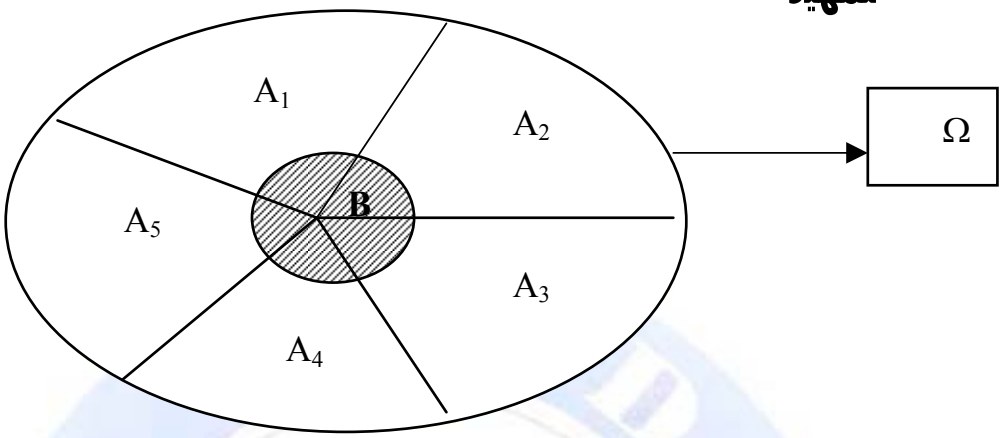
و لنا: $P(J\cap T)=p(J)\times p(T)$ .....(*) و منه الحادثتان J و T مستقلتان .

$P(B\cap D)$ الاحتمال كي تكون البطاقة المسحوبة بيضاء و تحمل الرقم 2هو $P(B\cap D)=\frac{1}{10}$ (•)

و لنا: $P(B\cap D)=p(B)\times p(D)$ .....(*) و منه الحادثتان B و D ليستا مستقلتين .

5)دستور الاحتمالات الكلية :

▪تمهيد



Ω مجموعة شاملة : A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4، A_5 حوادث تشكل تجزئة المجموعة Ω.

B حادثة كيفية . لدينا $B\cap A_1$ و $B\cap A_2$ و $B\cap A_3$ و $B\cap A_4$ و $B\cap A_5$ غير متلائمة مثنى مثنى

و $B=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_3)\cup(B\cap A_4)\cup(B\cap A_5)$ منه إذا كان p قانون احتمال على Ω .

$$p(B\cap A_3)+p(B\cap A_4)+(B\cap A_5)+P(B)=p(B\cap A_1)+p(B\cap A_2)$$

و إذا كانت $p(A_1)\neq 0$ (مثلا)

$$p(A_1\cap B)=p_{A1}(B)\times p(A_1) \quad \text{منه} \quad P_{A1}(B)=\frac{p(A_1\cap B)}{p(A_1)}$$

و بصورة عامة :

مبرهنة (مقبولة) : دستور الاحتمالات الكلية

لتكن Ω مجموعة شاملة مزودة بقانون احتمال p و لتكن A_1 ، A_2 ، .....، A_n حوادث بحيث A_1 ، A_2 ، .....، A_n تشكل تجزئة للمجموعة Ω و من أجل كل

عدد طبيعي i

بحيث $1 \geq i \geq n$ ، $p(A_1) \neq 0$.

- مهما تكون الحادثة B لدينا :

$$p(B)= p_{A_1} \times p(A_1) + p_{A_2} \times p(A_2) + ... + p_{A_n} \times p(A_n)$$

مثال تطبيقي:

أجريت فحوصات بيطرية على قطيع من الأغنام 20% منه مستوردة من بلد Aو 70% منه مستوردة من بلد B و 10% مستوردة من بلد C فكانت النتائج كما يلي:

90% من الأغنام المستوردة من البلد A سليمة ، 60% من الأغنام المستوردة من البلد B سليمة و 55% من الأغنام المستوردة من البلد C سليمة.

إذا أخذنا بالاعتماد على الصدفة الكاملة ، حيوانا واحدا من القطيع .

الاحتمال p(A) كي يكون الحيوان مستوردا من البلد A هي $p(A) = \frac{20}{100}$

الاحتمال p(B) كي يكون الحيوان مستوردا من البلد B هي $p(B) = \frac{70}{100}$

الاحتمال p(C) كي يكون الحيوان مستوردا من البلد C هي $p(C) = \frac{10}{100}$

الاحتمال $p_A(S)$ أن يكون الحيوان سليما علما انه مستورد من البلد A هو $p_A(S)=\frac{90}{100}$.

الاحتمال $p_B(S)$ أن يكون الحيوان سليما علما انه مستورد من البلد B هو $p_B(S)=\frac{60}{100}$.

الاحتمال $p_C(S)$ أن يكون الحيوان سليما علما انه مستورد من البلد c هو $p_c(S)=\frac{55}{100}$.

الحوادث A، B ، C تشكل تجزئة للمجموعة الشاكلة (مجموعة الأغنام في القطيع) .

$P(A)\neq 0$ و $p(B)\neq 0$ و $p(C)\neq 0$ منه و حسب دستور الاحتمالات الكلية

P(S) الاحتمال كي يكون الحيوان المأخوذ سليما هي بحيث:

$$P(S)=p_A(S)\times p(A) + p_B(S)\times p(B)+ p_C(S)\times p(C)$$

$$= \frac{90}{100}\times\frac{20}{100}+\frac{60}{100}\times\frac{70}{100}+\frac{55}{100}\times\frac{10}{100}$$

بعد الاختزالات و الحساب p(S)= 0 ,655

III الأمل الرياضي و التباين و الإنحراف المعياري المرفقة بقانون

احتمال عددي:

1)مثال تمهيدي:

لدينا نردان مكعبان متوازنان أحدهما أزرق (B) أوجهه تحمل الأرقام 1،1،2،3،3،3 على الترتيب و الآخر أحمر (R) أوجهه تحمل الأرقام 1،1،1، 2،2،2 على الترتيب .

تجربة عشوائية تكمن في رمي النردين B و R و تسجيل مجموع الرقمين المسجلين على الوجهين العلويين للنردين B و R.

Ω مجموعة جميع النتائج الممكنة(المخارج) لهذه التجربة العشوائية هي: Ω={2,3,4,5}.

- **النموذج التجريبي:**

قمنا بمحاكاة هذه التجربة ، باستعمال مجدول ، 1000 مرة فحصلنا على النتائج التالية :

x_i نتيجة الجموع	2	3	4	5
f_i تواتر x_i	$\frac{158}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{344}{1000}$	$\frac{255}{1000}$

$\bar{x}$ الوسط الحسابي للسلسلة الإحصائية بحيث :

$$\bar{x}=f_1x_1+f_2x_2+ f_3x_3+f_4x_4$$

$$=2\times\frac{158}{1000}+3\times\frac{243}{1000}+4\times\frac{344}{1000}+5\times\frac{255}{1000}$$

$$\boxed{\bar{x}=3,696}$$

V تباين السلسلة الإحصائية بحيث:

$$V=f_1x^2_1+f_2x^2_2+ f_3x^2_3+f_4x^2_4-(\bar{x})^2$$

$$=4\times\frac{158}{1000}+9\times\frac{243}{1000}+16\times\frac{344}{1000}+25\times\frac{255}{1000}-(3,696)^2$$

$$V=14,698-13,660416$$

$$\boxed{V=1,037584}$$

و σ الانحراف المعياري للسلسلة الإحصائية بحيث :

$$\sigma=\sqrt{V}$$

$$\sigma=1,018618673$$

•• النموذج النظري :

يمكن تلخيص النتائج الممكنة لرمي النردين B و R و مجموع الرقمين المسجلين على وجهيهما العلويين في الجدول المجاور:

أوجه النرد R \ أوجه النرد B	1	2	3	4	5	6	المجموع
1	2	3	4	5	6	7	
2	3	4	5	6	7	8	
3	4	5	6	7	8	9	
4	5	6	7	8	9	10	
5	6	7	8	9	10	11	
6	7	8	9	10	11	12	

نظريا : لدينا 6 حظوظ من 36 للحصول على مجموع يساوي 2.

9 حظوظ من 36 للحصول على مجموع يساوي 3.

12 حظوظ من 36 للحصول على مجموع يساوي 4.

96 حظوظ من 36 للحصول على مجموع يساوي 5.

منه قانون الاحتمال p على Ω يكون كما يلي:

الإمكانية x_i	2	3	4	5
$P(x_i)=p_i$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$

و لقد رأينا في السنة الماضية أن الاحتمالات هي " توترت نظرية"

و العدد E حيث $E=x_1p_1+ x_2p_2+ x_3p_3+ x_4p_4$

الذي حسابه "يشبه" حساب الوسط الحسابي سمي الأمل الرياضي لقانون الاحتمال p .

و العدد V بحيث :

الذي حسابه" يشبه" حساب التباين يسمى تباين قانون الاحتمال p .

و العدد σ بحيث $\sigma=\sqrt{V}$ يسمى الانحراف المعياري لقانون الاحتمال p.

أنجزنا الحسابات المتعلقة بهذا الوضع النظري فوجدنا :

$$E=\frac{11}{3} \quad \text{أي} \quad E\simeq 3,6667$$

$$V=\frac{19}{18} \quad \text{أي} \quad V\simeq 1,0556$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{19}{18}} \qquad \sigma\simeq 1,0274$$

••• نلاحظ تقارب نتائج النموذج التجريبي و نتائج النموذج النظري لقانون الاحتمال p الذي عرف اعتمادا على كون جميع أوجهBلها نفس الحظ للظهور ، و كذلك جميع أوجه R و هذا يؤكد (شيئا ما) القول

" النردان B و R متوازنان".

2)تعاريف :

لتكن Ω مجموعة شاملة بحيث $\Omega=\{x_1,x_2,.....,x_n\}$ أين x_1 , x_2 ، ..... x_n أعداد حقيقية (نتائج التجربة العشوائية أعداد حقيقية)

و ليكن p قانون احتمال على Ω بحيث :

$p(x_1)=p_1,p(x_2)=p_2,.....,p(x_n)= p_n$

- الأمل الرياضي لقانون الاحتمال p هو بالتعريف العدد الحقيقي E حيث:

$$E=x_1.p_1+ x_2.p_{2+}.....+ x_n.p_n$$

- تباين قانون الاحتمال p هو بالتعريف ، العدد الحقيقي V حيث :

$$V=(x_1)^2.p_1+(x_2)^2.p_2+.....+(x_n)^2.p_n-E^2$$

(أي E الأمل الرياضي لقانون الاحتمال p)

- الانحراف المعياري لقانون الاحتمال p هو ، بالتعريف، العدد الحقيقي σ

حيث $\sigma=\sqrt{V}$ (أي V تباين قانون الاحتمال p).

تمارين ومشكلات حول الإحتمالات

التمرين 1 :

أعط الحادثة العكسية للحوادث التالية

1)في قسم ما نختارتلميذين بطريقة عشوائية

(A) "التلميذين بنتين"

2) في مطعم أحمد طلب طبق طعام وفاكهة

" أحمد طلب لحماً و تفاحاً (B) "

3) في لعبة يانصيب , إشترى شخصاً ثلاث بطاقات

إحدى البطاقتين على الأقل رابحة (C)

البطاقتين على الأكثر رابحتين (D)

التمرين 2 :

يحتوي صندوق كريات بيضاء وسوداء و حمراء نسحب كرية واحدة من الصندوق ونسمي الحوادث التالي

(A) سحب كرية بيضاء

(B) سحب كرية لا حمراء ولا بيضاء

(C) سحب كرية سوداء أو كرية حمراء

1) هل الحادثتين A و B غير متلائمتين؟

2) هل الحادثتين B و C غير متلائمتين ؟

3) شكل جملة تشكل العبارة$\overline{A}$, ثم العبارة$\overline{B}$

التمرين 3:

نرمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية

1) أعط مجموعة الإمكانيات الممكنةعلماً أن الوجه هو F و الظهر هوP

2) أحسب إحتمالات الحوادث التالية :

A) يظهر في الرميات الثلاثة المتتالية الظهر p

B) يظهر في الرميات الثلاثة المتتالية على الأقل مرة واحدة الوجه F

التمرين 4:

في تجمع ما توجد مجموعة أشخاص تتكون من 250 شخصاً

نلاحظ فقط الرجال الذين يلبسون ربطة عنق أو الرجال ذوي العيون الزرقاء

يوجد 120 رجلاً يلبسون ربطة عنق و 85 رجلاً أعينهم زرقاء منهم 50 رجلاً يلبسون ربطة عنق .

- نتحدث مع شخص بطريقة عشوائية من هذا التجمع

1) ماهو الإحتمال أن يكون هذا الشخص لابساً ربطة عنق؟

2) ماهو الإحتمال أن يكون هذا الشخص لابساً ربطةعنق أو عيناه زرقاوان

3) ماهو الإحتمال أن يكون هذا الشخص لابساً ربطةعنق و عيناه زرقاوان

4) ماهو الإحتمال أن نتحدث مع شخص لاهولابس ربطةعنق ولاعيناه زرقاوان

التمرين 5:

في مسابقة ما طرح سؤالان

65% من الأشخاص أجابوا بنعم على السؤال الأول

51% من الأشخاص أجابوا بنعم على السؤال الثاني

46% من الأشخاص أجابوا بنعم على السؤالين

1) ماهو الإحتمال أن يجيب شخصاً "بنعم "على أحد السؤالين ؟

2) ماهو الإحتمال أن يجيب شخصاً ب" لا " على السؤالين ؟

التمرين 6:

نرمي زهرة نرد مزيفة لها ستة أوجه ،احتمال كل الأوجه الظاهرة هو

$P_1=0.1$, $P_2=0.2$, $P_3=0.3$, $P_4=0.1$, $p_5= 0.15$

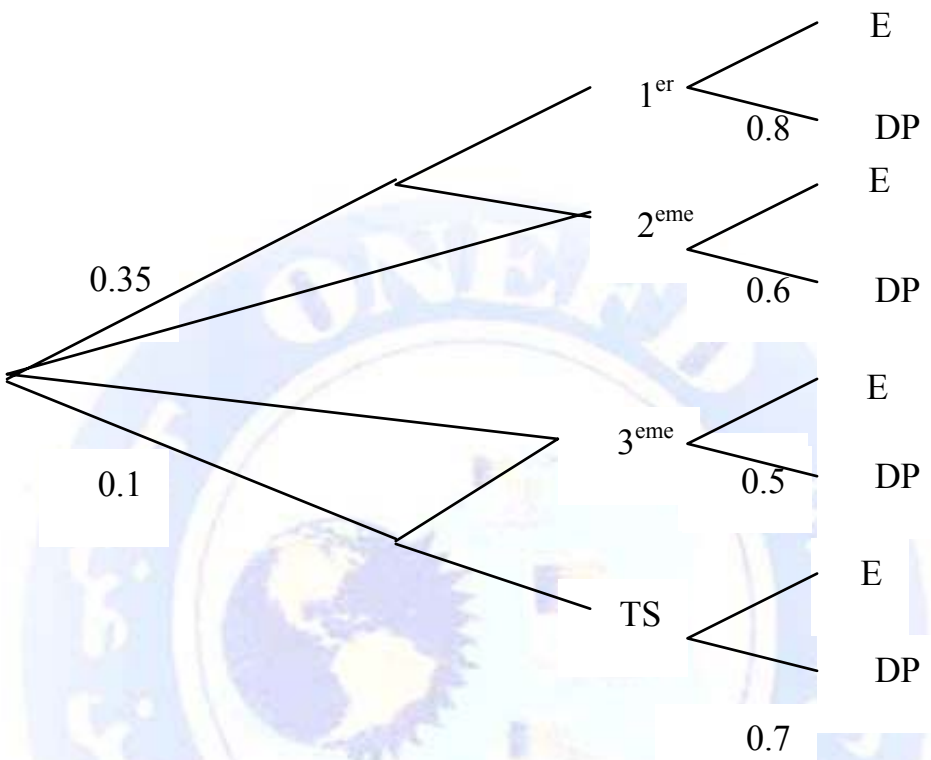
1) أحسب احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم 6 أي p_6

2) ماهو احتمال ظهور رقماً فردياً

التمرين 7: " شجرة الإحتمالات "

في ثانوية ما تلاميذ ها إما خارجين أو نصف داخلين شجرة الإحتمالات التالية تمثل تجزئة التلاميذ حسب المستوى ة النوعية خارجيا E أو نصف داخلياً DP

1) أنقل و أكمل الشجرة



2) أحسب نسبة التلاميذ الحارجين في هذه الثانوية ؟

3) هاهي نسبة الأقسام النهائية من بين الخارجين ؟

التمرين 8: الحوادث المستقلة

الجدول التالـي يعطي تقييم 150 متربص حسب اللغة المختارة و النشاط الرياضي المختار نختار تلميذ واحد بطريقطة عشوائية

	كرة المضرب	ركوب الخيل	السباحة
الإنجليزية	45	18	27
الألمانية	33	09	18

1) هل الحادثتين التاليتين مستقلتين ؟

(L) التلميذ المختار يدرس اللغة الألمانية

(T) التلميذ المختار يمارس كرة المضرب

2) الحادثتين " التلميذ يدرس الإنجليزية " و " يمارس السباحة "هل هما مستقلتان ؟

حلول تمارين الإحتمالات

التمرين 1:

الحادثة $\overline{A}$ يوجد على الأقل من بين التلميذين المختارين ذكراً

الحادثة $\overline{B}$ أحمد لايطلب لحما أو لا يطلب تفاحاً

الحادثة $\overline{C}$ لاتوجد أية بطاقة رابحة

الحادثة $\overline{D}$ البطاقات الثلاثة رابحة

التمرين 2 :

الحادثتين A و B غير متلائمتين لأن لا يمكن لكرة

1) أن تكون بيضاء وغير بيضاء في آن واحد

2) الحادثتين B و C متلائمتين لأن سحب الكرية السوداء يحققها معا

3) نفي الحادثة A

$\overline{A}$ نسحب كرية حمراء أوكرية سوداء نـفي الحادثة B

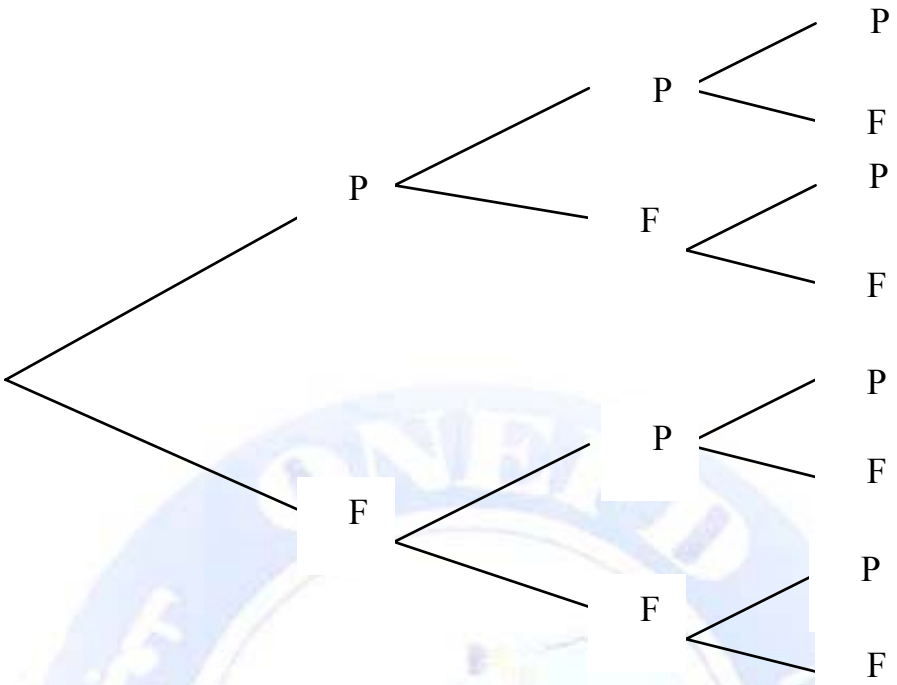
$\overline{B}$ سحب كرية بيضاء أو كرية حمراء

التمرين 3:

بالإستعانة بشجرة الإحتمالات نجد مجموعة الإمكانيات ومنه

$$\Omega=\{(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(P,F,F),(F,P,P),(F,P,F),$$

$$(F,F,F),(F,F,P)\}$$



2) •حساب P(A)

لدينا $P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{1}{8}$

•حساب P(B)

لدينا $P(A)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{7}{8}$

إذن أونطبق قانون الحادثتين المتعاكستين،لأن الحادثة B هي المعاكسة لـ A

$$P(B)=1-P(A)=1-\frac{1}{8}=\frac{8-1}{8}=\frac{7}{8}$$

التمرين 4

الجدول التالي يسمح بتمييز الحالات

	ربطة العنق الحادثةA	دون ربطة عنق الحادثة$\overline{A}$	المجموع
العيون الزرقاء	50	35	85
العيون غيرالزرقاء	70	95	165
المجموع	120	130	250

Ωهي مجموعة الإمكانيات حيث card(Ω)=250

1) إحتمال أن يكون الشخص لابسا ربطة العنق

لدينا $P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{85}{250}=\frac{17}{50}$

2) إحتمال أن يكون الشخص لابسا ربطة العنق وعيناه زرقاوان

$$P(A\cap B)=\frac{card(A\cap B)}{card(\Omega)}=\frac{50}{250}=\frac{1}{5}$$

3) إحتمال أن يكون الشخص لابسا ربطة العنق أوعيناه زرقاوان

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{85}{250}+\frac{120}{250}-\frac{50}{250}=\frac{155}{250}=\frac{31}{50}$$

4)إحتمال أن يكون الشخص لاهو لابسا ربطة العنق ولاعيناه زرقاوان

وهي الحادثة المعكسة للحادثة (A∪B) إذن

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{31}{50}=\frac{19}{50}$$

التمرين 5

نسمي الحادثة "A "الشخص أجاب بنعم على السؤال الأول

نسمي الحادثة "B "الشخص أجاب بنعم على السؤال الثاني

نسمي الحادثة "C "الشخص أجاب بنعم على السؤالين

إذن من المعطيات لدينا

$$P(B)=\frac{51}{100}=0.51 \qquad P(A)=\frac{65}{100}=0.65$$

$$P(A\cap B)=\frac{46}{100}=0.46$$

1)إحتمال أن يكون الشخص أجاب بنعم على السؤالين

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.65+0.51-0.46=0.7$$

2) إحتمال أن يجيب شخصا بـ "لا"على السؤالين

وهي الحادثة المعكسة للحادثة $(A\cup B)$ إذن

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$$

التمرين 6

$P_1=0.1$, $P_2=0.2$, $P_3=0.3$, $P_4=0.1$, $p_5=0.15$

وبما أن $P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6=1$

فإن $P_6=1-(P_1+P_2+P_3+P_4+P_5)$

إذن $P_6=1-(0.1+0.2+0.3+0.1+0.15)$

$=1-0.85$

ومنه $\boxed{P_6=0.15}$

2)إحتمال ظهور رقم فردي

مجموعة الأرقام الفردية هي $\{1,3,5\}$

إذن الإحتمال هو $P_1+P_3+P_5=0.1+0.3+0.15=0.55$

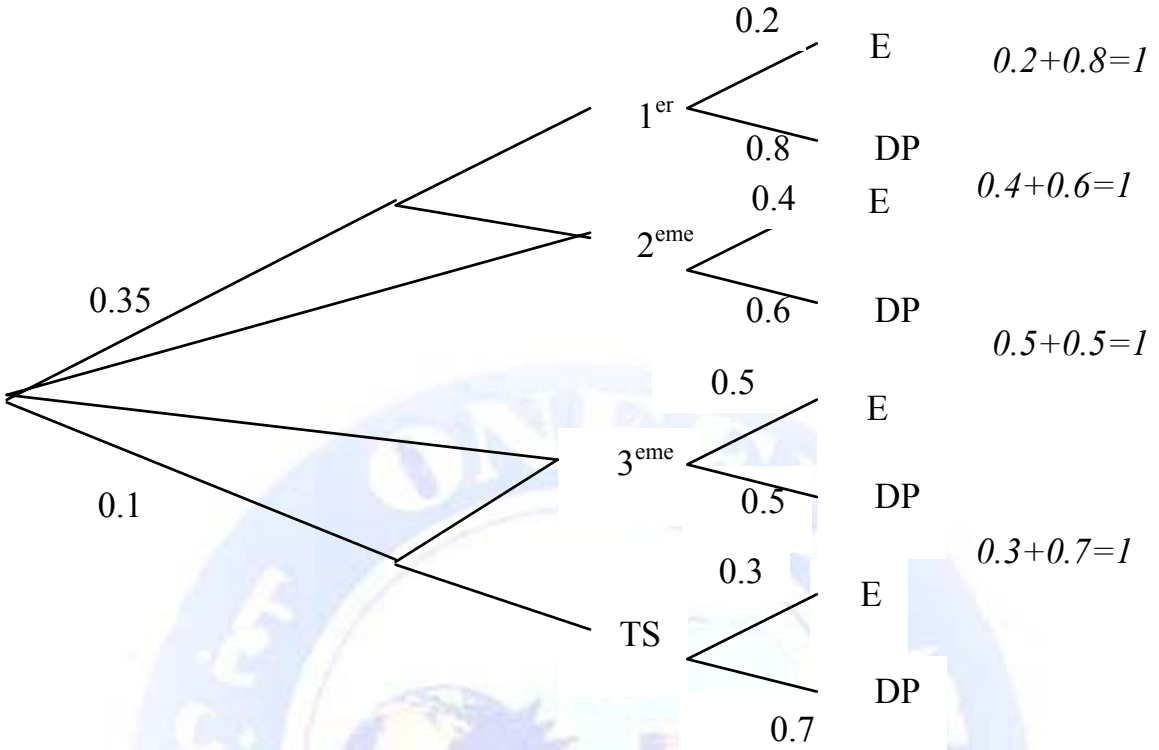
التمرين 7

إكمال شجرة الإحتمالات

مجموع إحتمالات الفروع هو 1 إبتداء من كل عقدة

مجموع إحتمالات الفروع الجزئية هو 1 إبتداء من كل عقدة

ومنه تكون شجرة الإحتمالات كالآتي



الرمز 1^{er} يعني تلاميذ السنة ا ر ى

الرمز 2^{eme} يعني تلاميذ السنة الثانية

الرمز 3^{eme} يعني تلاميذ السنة الثالثة

الرمزTSيعني تلاميذ القسم الخاص(سنة ثالثة)

2)نسبة التلاميذ الخارجيين في هذه الثانوية

لاحظ أن نسبة التلاميذ الخارجيين في السنة الأولى هي $0.35\times0.2=0.07$

أي بنسبة 7%

نسبة التلاميذ الخارجيين في السنة الثانية هي $0.25\times0.4=0.1$

أي بنسبة 10%

نسبة التلاميذ الخارجيين في السنة الثالثة هي

$$0.3\times0.5+0.1\times0.3=0.15+0.03=0.18$$

أي بنسبة 18%

ومنه نسبة التلاميذ الخارجيين في الثانوية هي $0.07+0.1+0.18=0.35$

أي بنسبة 35%

3) نسبة الأقسام النهائية من بين التلاميذ الخارجيين

من بين 100 تلميذ يوجد 35 تلميذ خارجي،علما أن نسبة التلاميذ الخارجيين للأقسام النهائية هي 18% فإن النسبة المطلوبة هي $\frac{18}{35}\times 100=51\%$

التمرين 8 نكمل الجدول التالي بالمعلومات الكافية

	كرة لمضرب	ركوب الخيل	السباحة	المجموع
الإنجليزية	45	18	27	90
الألمانية	33	9	18	60
المجموع	78	27	45	150

1) نعتبر Ω مجموعة الإمكانيات فإن $card(\Omega)=150$

من أجل كل حادثة A لدينا $P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$

نقول عن حادثتين A وB إنهما مستقلتان إذاوفقط إذا تحقق

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

نرمز بـ P(T) إحتمال أن يكون المتربص يمارس كرة المضرب

نرمز بـ P(L) إحتمال أن يكون المتربص يدرس اللغة الألمانية

لدينا $P(T)\times P(L)=\frac{78}{150}\times\frac{60}{150}=\frac{26}{50}\times\frac{20}{50}=\frac{26}{125}$

نحسب $P(T\cap D)$

لدينا $P_T(D)=\frac{P(T\cap D)}{P(T)}$ ومنه $P(T\cap D)=P_T(D)\times P(T)$

إذن $P(T\cap D)=\frac{33}{78}\times\frac{78}{150}=\frac{11}{26}\times\frac{26}{50}=\frac{11}{50}$

ومنه $\boxed{P(T\cap D)\neq P(D)\times P(T)}$

إذن الحادثتين D وT غير مستقلتان

2) نرمز بـ P(N) إحتمال أن يكون المتربص يمارس السباحة

نرمز بـ P(A) إحتمال أن يكون المتربص يدرس اللغة الإنجليزية

لدينا $P(A)=\frac{90}{150}$ و $P(N)=\frac{45}{150}$

ومنه $P(A)\times P(N)=\frac{90}{150}\times\frac{45}{150}=\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{50}$

لدينا $P_N(A)=\frac{P(A\cap N)}{P(T)}$ ومنه $P(A\cap N)=P_N(A)\times P(N)$

إذن $P(A\cap N)=\frac{27}{45}\times\frac{45}{150}=\frac{27}{150}=\frac{9}{50}$

ومنه $\boxed{P(A\cap N)=P(A)\times P(N)}$

إذن A وN حادثتان مستقلتان