مفهـوم النهايـة

تصميم الدرس

- نهاية دوال مألوفـة

1- نهاية الدالة "مـربع"

2- نهاية الدالة "مكعب"

3- نهاية الدالة "مـقلوب"

4- نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$

نهاية دوال مألوفـة : نهاية الدالة "مـربع"

الدالة مربع هي الدالة المعرفة على IR كما يلي : $f(x)= x^2$

عندما يأخذ x قيما كبيرة جدا فإن f(x) تأخذ قيما أكبر فأكبر،نقول عندئذ

نهاية الدالة $x \mapsto x^2$ هي ∞+ عندما يؤول x إلى∞+

ونكتب $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$ أي : $\lim_{x \mapsto +\infty} (x^2) = +\infty$

نهاية الدالة $x \mapsto x^2$ هي ∞+ عندما يؤول x إلى∞ -

ونكتب: $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = +\infty$ أي : $\lim_{x \mapsto -\infty} (x^2) = +\infty$

نهاية الدالة "مكعب"

الدالة مكعب هي الدالة المعرفة على IR كما يلي : $f(x)= x^3$

من أجل قيم x الكبيرة جدا في المجال]0 , ∞+[فإن f(x) تأخذ قيما أكبر

من أجل قيم x الصغيرة جدا في المجال]∞- , 0[فإن f(x) تأخذ قيما أصغر فأصغر نقول عندئذ :

نهاية الدالة $x \mapsto x^3$ هي ∞+ عندما يؤول x إلى∞+

ونكتب $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = +\infty$ أي : $\lim_{x \mapsto +\infty} (x^3) = +\infty$

نهاية الدالة $x \mapsto x^3$ هي ∞ - عندما يؤول x إلى∞ -

ونكتب : $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = -\infty$ أي : $\lim_{x \mapsto -\infty} (x^3) = -\infty$

نهاية الدالة "مـقلوب"

الدالة مكعب هي الدالة المعرفة على IR-{0} بالدستور : $f(x) = \frac{1}{x}$ ،منحناها البياني يسمى قطعا زائدا ،في المعلم المتعامد والمتجانس

$(O, \vec{I}, \vec{J})$

- **النهاية عند +∞ أو -∞**

عندما يأخذ x قيما أكبر فأكبر في المجال]0 , +∞[فالعدد $\frac{1}{x}$ موجبا ويقترب أكثر فأكثر من إلى 0

عندما يأخذ x قيما أصغر فأصغر في المجال ,]-∞ 0[فالعدد $\frac{1}{x}$ سالبا ويقترب أكثر فأكثر من إلى 0

نقول عندئذ :

نهاية الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ هي 0 عندما يؤول x إلى+∞

ونكتب : $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$ أي : $\lim_{x \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

نهاية الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ هي 0 عندما يؤول x إلى- ∞

ونكتب : $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = 0$ أي : $\lim_{x \mapsto -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

- **النهاية عند 0**

إليك جدول القيم التالي :

X	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001
$\frac{1}{x}$	-10	-100	-1000	-10000	-100000
X	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1
$\frac{1}{x}$	100000	10000	1000	100	10

إن الدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ غير معرفة عند العدد 0

عند حساب قيم العدد $\frac{1}{x}$ من أجل قيم x القريبة من العدد 0 في المجال

$]0, +\infty[$ نحصل على قيم $\frac{1}{x}$ كبيرة جدا.

عند حساب قيم العدد $\frac{1}{x}$ من أجل قيم x القريبة من العدد 0 في المجال

$]-\infty, 0[$ نحصل على قيم $\frac{1}{x}$ صغيرة جدا.نقول عندئذ :

نهاية الدالة $\frac{1}{x} \mapsto x$ هي $+\infty$ عندالعدد0 على اليمين

أي : $\frac{1}{x}$ يؤول إلى$+\infty$ عندما يؤول x (الموجب تماما) إلى 0

ونكتب :

$$\lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

نهاية الدالة $\frac{1}{x} \mapsto x$ هي $-\infty$ عندالعدد0 على اليسار

أي : $\frac{1}{x}$ يؤول إلى$-\infty$ عندما يؤول x (السالب تماما) إلى 0

ونكتب :

$$\lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ <}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة مقلوب

من أجل كل x من IR-{0} لدينا : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

إذن : من أجل كل x من IR-{0} لدينا : $-\frac{1}{x^2} < 0$

أي : من أجل كل x من IR-{0} لدينا : $f'(x) < 0$

ومنه : الدالة f متناقصة تماما على المجالين:]-∞ , 0[،]0 , +∞[

نلخص النتائج السابقة في جدول تغيرات الدالة f

x	-∞	0	+∞
$f'(x)$	-	‖	-
f(x)	0 ↘ -∞	‖	+∞ ↘ 0

نهاية دالة كثير حدود عند +∞ أو −∞

♦ **مثال تمهيدي :**

الدالة f المعرفة بالدستور : $f(x)=2x^3-x^2+3x-1$

أحسب نهاية الدالة f عند +∞ ، −∞

الأجوبة : لدينا :

$$\lim_{x \to -\infty} (2x^3 - x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$$

ونعلم أن : $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

و $\lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{x^3}\right) = 0$

إذن : $\lim_{x \to -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = 2$

ومنه : $\lim_{x \to -\infty} x^3 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$

***نتيجة :**

$$\lim_{x \to -\infty} (2x^3 - x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \to -\infty} (2x^3)$$

تخمين :نهاية دالة كثير الحدود المعرفة بالدالة أعلاه هي نهاية الحد ذو الأكبر درجة فيه

وبنفس الطريقة ،في حساب النهاية عند $+\infty$ نجد

$$\lim_{x \to +\infty} (2x^3 - x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \to +\infty} (2x^3)$$

مبرهنـــة

نهاية الدالة كثير الحدود fعند $+\infty$ ، $-\infty$ هي نهاية الحد ذوا لأكبر درجة في تعريف دسـتور الدالة

البرهان :

الدالة f معرفة بالدستور التالي على IR :

$f(x)= a_nx^n +a_{n-1} x^{n-1}+a_{n-2} x^{n-2} +....+a_1x+a_0$ مع $a_n=0$ |

لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + ... + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

و

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_{n-2}}{x^2}\right) = ... = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_0}{x^n}\right) = 0$$

إذن

$$\lim_{x \to +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

هي

$$\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n)$$

التي تتحدد حسب إشارة العدد a_n , ولدينا :

$a_n \rangle 0$ إذن : $\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n) = +\infty$

$a_n \langle 0$ إذن : $\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n) = -\infty$

وبنفس الطريقة نبرهن على النهاية من أجل $x \to -\infty$

أمثلـة

(1 $f(x)= 2x^2-x+1$

لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} (2x^2 - x + 1) = \lim_{x \to +\infty} (2x^2) = +\infty$$

وكذالك :

$$\lim_{x \to -\infty} (2x^2 - x + 1) = \lim_{x \to -\infty} (2x^2) = +\infty$$

2) $f(x)=-x^3+2x-3$

لدينا :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3 + 2x - 3) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 2x - 3) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$$

3) $f(x)= 3x^3+x^2+4$

لدينا:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (3x^3 + x^2 + 4) = \lim_{x \to -\infty} (3x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x^3 + x^2 + 4) = \lim_{x \to +\infty} (3x^3) = +\infty$$