الدالة المشتقة واتجاه التغير

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال I

نقبل المبرهنة التالية دون برهان

مبرهنة

أ• إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x)\rangle 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I

ب• إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x)\langle 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I

ج• إذا كان من أجل كل x من I ، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I

أمثلة

1) لتكن الدالة f المعرفة على IR بالدستور التالي : $f(x)=2x^2+2x-5$

الدالة f' مشتقة الدالة f معرفة بالدستور $f'(x)=4x+2$ وإشارة $f'(x)$ تلخص في الجدول التالي :

x	-∞	$-\frac{1}{2}$	+∞
$f'(x)$	-	0	+

$f'(x)=0$ يكافئ $x=-\frac{1}{2}$

من أجل $x\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ فإن f متناقصة تماما على $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$

من أجل $x\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ فإن f متزايدة تماما على $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

القيمة $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{2}$ هي قيمة حدية عظمى للدالة f

2) f دالة معرفة على IR بالدستور التالي : $f(x)= -x^3 +3x +4$

f قابلة للاشتقاق على IR ومن أجل كل عدد x من IR لدينا :

$f'(x)=-3x^2+3$ ومنه إشارة $f'(x)$ ملخصة بالجدول التالي :

x	+∞	1	-1	-∞
$f'(x)$	-	0	+	0 -

- f متناقصة تماما على المجالين]1-,∞-[و]∞+,1[
- f متزايدة تماما على المجال]1+ , 1-[
- $f'(x)=0$ من أجل x=-1 أو x=1

***ملاحظة :**

الدالة f تقبل قيمتين حديتين عند الفاصلتين 1- و 1 هما f(-1) و f(1) على الترتيب بحيث :

f(1)=6, f(-1)=2

دراسة اتجاه تغير دالة على مجال

طريقة

f دالة معرفة على مجال I من IR

لدراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال I

- ندرس قابلية الاشتقاق للدالة f على المجال I
- إيجاد عبارة $f'(x)$ ومن أجل كل عدد x من المجال I
- ندرس إشارة $f'(x)$
- استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال I

♦ **تمرين 1 :**

f دالة عددية معرفة على IR بالدستور : $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x+1$

أدرس اتجاه تغير الدالة f على IR

•الأجوبة :

لدينا : $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x+1$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR لأنها " دالة كثير حدود "

ومن أجل كل عدد x من IR لدينا : $f'(x)=-x^2+2x-1$

ومنه $f'(x)=-(x^2-2x+1)$

إذن : $f'(x)=-(x-1)^2$

من أجل كل عدد x من IR لدينا: $(x-1)^2 \geq 0$

فإن : $-(x-1)^2 \leq 0$

أي أن : $f'(x)\leq 0$

وبالتالي f متناقصة تماما على IR

♦ **تمرين 2 :**

f دالة عددية معرفة على المجال $[-1,2]$ بالدستور $f(x)=2x^3-3x^2+2$

1 أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-1,2]$

2 عين القيم الحدية للدالة f

3 شكل جدول تغيرات الدالة f

4 عين معادلة للمماس (Δ) لمنحنى الدالة f عند النقطة A ذات الفاصلة $x=\frac{1}{2}$

•الأجوبة

① الدالة f قابلة للاشتقاق على IR لأنها " دالة كثير حدود " ،إذن فهي قابلة للاشتقاق على المجال $[-1,2]$ لأنه جزء من IR

ولدينا من أجل كل عدد x من المجال : $f'(x)=6x^2-6x$

ولدينا :

$6x^2-6x=0$ تكافئ $6x(x-1)=0$ إذن $(x=0)$ أو $(x=1)$

وإشارة $f'(x)$ نلخص في الجدول التالي :

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

② **القيم الحدية للدالة f**

لدينا : $f'(x)=0$ يكافئ $(x=0)$ أو $(x=1)$

ولدينا : $f(0)=2$ ، $f(1)=1$ إذن :

القيمة 2 هي قيمة حدية كبرى من أجل $x=0$

القيمة 1 هي قيمة حدية صغرى من أجل $x=1$

3 **جدول التغيرات :**

لدينا : f(-1)= -3 ، f(2)= 6

x	-1	0	1	2
$f'(x)$	+	0	-	0 +
f(x)	-3 ↗	2 ↘	1 ↗	6

4 **معادلة المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة A ذات الفاصلة** $x=\frac{1}{2}$

طريقة لتعيين معادلة المماس لمنحنى عند نقطة

f دالة معرفة على مجال I من IR ، وقابلة للاشتقاق عليه ،a عنصر من I

لتعيين معادلة المماس عند النقطة A ذات الفاصلة a

نحسب f(a) ، $f'(a)$ ونعوض في المعادلة

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

ومنه نحصل على المعادلة الديكارتية للمماس لمنحنى الدالة f عند النقطة A ذات الفاصلة a

لدينا : $f'(\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}; f(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$

ومنه : $y=-\frac{3}{2}(x-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}$

إذن : $y=-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$