2- المتتاليات العددية

1- تعريف متتالية

2- التعرف على متتالية بالتراجع

3- إتجاه تغير متتالية "رتابة متتالية"

4 - المتتاليات الحسابية والهندسية

5- إتجاه تغير متتالية حسابية ومتتالية هندسية

6- إستعمال المتتاليات الحسابية و الهندسية لحل مشكلات من الحياة اليومية

7- المتتاليات من الشكل : $U_{n+1} = aU_n + b$ مع a≠0 و b≠0

- تمارين ومشكلات حول المتتاليات العددية

- حـلول التمارين

1- تعريف متتالية :

المتتالية العددية هي دالة مجموعة تعريفها N أو جزء من N

مثل: * N أو{1} – N^*

***ملاحظة1 :** يجب أن نفرق بين العبارتين (U_n) و U_n

حيث (U_n) يرمز به إلى المتتالية و U_n لعبارة الحد العام للمتتالية (U_n).

***ملاحظة 2 :** من التعريف أعلاه المتتالية المعرفة ابتداءا من المرتبة n_0 فمثلا

$U_n = \frac{1}{n}$ هو الحد العام للمتتالية (U_n) المعرفة على *N.

وأما $V_n = \sqrt{n-2}$ فيمثل الحد العام للمتتالية(V_n) المعرفة من أجل $n \geq 2$.

ومنه مجموعة تعريف متتالية هي من الشكل : $[n_0 , \infty[$ حيث $n_0 \in N$.

2- التعرف على متتالية بالتراجع :

نسمي متتالية تراجعية كل متتالية معرفة على N بعلامة تسمح بتعيين كل حدّ منها انطلاقا من حـدود سبق معرفتها.

كذلك يمكننا أن نعرف متتالية تراجعية كل متتالية U المعرفة بحدها الأول U_{n_0} وبالعلاقـة $U_{n+1}= f(U_n)$ حيث f دالة معرفة على N.

الدالة f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية U.

مثال1: (U_n) متتالية معرفة على N بالعلاقة التراجعية

$$\begin{cases} U_0=3 \\ U_{n+1}= 4U_n-6 \end{cases}$$ من أجل كل طبيعي n من N

1)- أحسب: U_3،U_2،U_1

2)-نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل من أجل كل n من N

بعبارة حدها العام: $V_n = U_n -2$

* احسب V_3،V_2،V_1،V_0

* بتخمين احسب V_8 ثم أعط عبارة V_n بدلالة n

الأجوبة :

$$U_0 = 3$$
$$U_{n+1} = 4U_n-6$$

1- حساب: U_3،U_2،U_1

$$\begin{cases} U_1 = 4U_0-6 = 4(3)-6 = 6 \\ U_2 = 4U_1-6 = 4(6)-6 = 24-6=18 \\ U_3 = 4U_2-6 = 4(18)-6 = 66 \end{cases}$$

2- حساب V_3،V_2،V_1

لدينا $V_n = U_n-2$

$$V_0 = U_0-2 = 3-2 = 1$$
$$V_1 = U_1-2 = 6-2 = 4$$
$$V_2 = U_2-2 = 18-2=16$$
$$V_3 = U_3-2 = 66-2 = 64$$

*حساب V_8 بتخمين:

لدينا $V_0 = 1= 4^0$، $V_1 = 4^1$ ، $V_2 = 42$ ، $V_3 = 4^3$

إذن $V_8 = 4^8$ أي $V_8 = 65536$

ومنه $Vn = 4^n$

مثال2: لتكن (U_n) المتتالية المعرفة على N كما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{3}{2} + U_n \end{cases}$$

* احسب U_3،U_2،U_1

المتتالية (U_n) معرفة من الشكل: $U_{n+1}=f(U_n)$

حيث f هي الدالة المرفقة بها والمعرفة من أجل كل n موجبا ب

$$f(x) = \frac{3}{2} + x$$

ومنه لحساب U_3،U_2،U_1

$$U_{n+1} = f(U_n) = \frac{3}{2} + U_n$$

$$U_1 = f(U_0) = \frac{3}{2} + U_0 = \frac{3}{2} +2 = \frac{7}{2}$$

$$U_2 = f(U_1) = \frac{3}{2} + U_1 = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$$

$$U_3 = f(U_2) = \frac{3}{2} + U_2 = \frac{3}{2} + 5 = \frac{13}{2}$$

3- إتجاه تغير متتالية "رتابة متتالية" :

لتكن (U_n) متتالية عددية

نقول أن:

- المتتالية (U_n) متزايدة(ابتداءا من مرتبة معينة n_0)

إذا كان $U_n \geq U_{n+1}$ من أجل كل $n \geq n_0$

- المتتالية (U_n) متزايدة تماما (ابتداءا من مرتبة معينة n_0)

إذا كان $U_n > U_{n+1}$ من أجل كل $n \geq n_0$

- المتتالية (U_n) متناقصة (ابتداءا من مرتبة معينة n_0)

إذا كان $U_n \leq U_{n+1}$ من أجل كل $n \geq n_0$

- المتتالية (U_n) متناقصة تماما(ابتداءا من مرتبة معينة n_0)

إذا كان $U_n < U_{n+1}$ من أجل كل $n \geq n_0$

- المتتالية (U_n) رتيبة (ابتداءا من مرتبة معينة n_0)

إذا كانت متناقصة أو متزايدة من أجل $n \geq n_0$

- المتتالية (U_n) ثابتة من أجل n من D مجال تعريف(U_n) بحيث $U_n = U_{n+1}$ من أجل كل $n \geq n_0$

***ملاحظات :**

1- هناك متتاليات ليست رتيبة مثل $U_n = (-1)^n$

حيث $U_n = -1$ إذا كان n فرديا

$U_n = 1$ إذا كان n زوجيا

2- بإمكاننا القول أن المتتالية رتيبة على المجال $[n_0, +\infty[$ بدلا من قولنا أنها رتيبة ابتداءا من مرتبة معينة n_0.

أمثلة:

المثال الأول: أدرس اتجاه تغير المتتالية (Un) المعرفة بحدها العام:

حيث $U_n = E\left(\frac{1}{n}\right)$

$E\left(\frac{1}{n}\right)$ يمثل الجزء الصحيح ل $\frac{1}{n}$ من أجل n من N^*

الجواب: من أجل كل $n \geq 1$ لدينا:

$$U_1 = E(\frac{1}{1}) = 1$$

$$U_2 = E(\frac{1}{2}) = E(0.5) = 0$$

$$U_3 = E(\frac{1}{3}) = E(0.33) = 0$$

اذن كن أجل كل $n \geq 2$ فإن :

$$Un = E(\frac{1}{n}) = 0$$

ومنه المتتالية متوقفة على N^*

المثال2: (U_n) متتالية معرفة على:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 4U_n - 6 \end{cases}$$

1- احسب U_1،U_2،U_3 ماذا تلاحظ؟

2- هل يمكن أن نعمم الملاحظة (من السؤال1) على U_n؟

الأجوبة :

حساب U_1،U_2،U_3

$U_1 = 4U_0 - 6 = 2$
$U_2 = 4U_1 - 6 = 2$
$U_3 = 4U_2 - 6 = 2$

نلاحظ أن $U_1 = U_2 = U_3 = 2$

2- هل يمكن أن نعمم ونقول أن من أجل كل n منN ، Un =2 أي هل (Un) ثابتة؟

يمكن أن نبرهن على ذلك بالتراجع من أجل كل n من N

نسمي p(n) الخاصية المتعلقة بالعدد الطبيعي n

P(n) تكافئ : Un = 2

1- نتحقق من صحة $p(n_0)$ حيث $n_0 = 0$

لدينا $U_0 = 2$ محققة

2- نفرض أن p(n) من أجل المرتبة m حيث $m \geq n_0$ ونبرهن صحة p(m+1)

P(m) صحيحة أي $U_m = 2$

لدينا: $U_{m+1} = 4U_m-6$

إذن $U_{m+1}= 4(2)-6$ حسب فرضية التراجع

ومنه $U_{m+1} = 8-6 = 2$

إذن p(m+1) صحيحة ومنه من أجل كل n فإن p(n) صحيحة

إذن (U_n) متتالية ثابتة

وتحقق $U_0 = U_1 = U_2 =...= U_n = 2$

مثال3 : لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على *N بعبارة حدها الهام :

$$U_n = \frac{n}{n+1}$$

الأجوبة : بما أن (Un) موجبة من اجل كل n من*N يمكننا مقارنة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ بالعدد 1.

لدينا $U_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ ومنه $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n2+2n+1}{n(n+2)}$$

نقارن $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ بالعدد1. أي ندرس إشارة الفرق $\frac{U_{n+1}}{U_n}-1$ ولدينا :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 = \frac{n2+2n+1}{n(n+2)} - 1 = \frac{1}{n(n+2)}$$

بما أن $\frac{1}{n(n+2)} > 0$ إذن $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$

ومنه (U_n) متتالية متزايدة تماما من أجل n من *N

طريقة العمل:

إذا كانت (U_n) متتالية موجبة من أجل كل $n \geq n_0$ (كل حدودها موجبة) لدراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) يكفي مقارنة العدد $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ بالعدد1

إذا كان $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 \geq 0$ نقول أن (U_n) متزايدة

إذا كان $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 \leq 0$ نقول أن (U_n) متناقصة

4 - المتتاليات الحسابية والهندسية :

الجدول التالي يلخص القوانين الخاصة بالمتتاليات الحسابية والهندسية التي درست فس السنة الثانية ثانوي.

المتتالية الحسابية

(U_n) متتالية حسابية حـدها الأول U_α وأساسـها r حيث α عنصر من N.

<u>عبارة الحد العام لما $r \neq 0$</u>

$U_n = U_\alpha + (n-\alpha) r$

<u>مجموع حدود المتتالية الحسابية</u>

$Sn = U_\alpha + U_{\alpha+1} + \ldots + U_n$

بما أن عدد الحدود هو$(n-\alpha+1)$

فإن: $S_n = \frac{(n-\alpha+1)}{2}\left[U_\alpha + U_n\right]$

<u>حالة خاصة $r = 1$</u>

(U_n) ثابتة $U_n = U_\alpha$

$Sn = (n-\alpha+1)U_\alpha$

الوسط الحسابي

c،b،a حدود متتابعة من المتتالية الحـسابية(U_n)،b هو الوسط الحسابي وتحقق :

$2b = a+c$

حدود المتتالية الحسابية تحقق

$U_1-U_0 = U_2-U_1 = .\ . = U_{n+1}-U_n$

♦ **مثال:** المتتالية الحسابية (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r

1- عين أساس المتتالية (U_n)

2- أحسب U_0 ثم أعط عبارة U_n بدلالة n علمـا أن

$U_7 = 10$

$U_{13} = 22$

المتتالية الهندسية

(V_n) متتالية هندسية حـدها الأول V_β وأساسـها q حيث β عنصر من N.

<u>عبارة الحد العام $q \neq 0$ و $q \neq 1$</u>

$V_n = V_\beta . q^{n-\beta}$

<u>مجموع حدود المتتالية الهندسية</u>

$Sn = V_\beta + V_{\beta+1} + \ldots + V_n$

عدد الحدود $n-\beta+1$

$$S_n = V_\beta\left[\frac{1-q^{(n-\beta+1)}}{1-q}\right]$$

<u>حالة خاصة q=1</u>

$V_\beta = V_n$ فإن (V_n) ثابتة

$S_n = (n-\beta+1)V_\beta$

الوسط الهندسي

c،b،a حدود متتابعة من المتتالية الهندسـية(V_n)،b هو الوسط الهندسي وتحقق

$b^2 = a.c$

حدود المتتالية الهندسية تحقق

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = \ldots = \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

إذاكان q=0 فإن (V_n) متتالية متوقفة

3-احسب المجموع S حيث
$S=U_0+U_1+\dots+U_{99}$

•الأجوبة

$U_{13} = 22$ ، $U_7=10$

لدينا

$U_{13} = U_7+(13-7)r$

$22=10+6r$

ومنه $22-10=6r$

اذن : $r=\frac{12}{6}=2$

إذن الأساس $r=2$

•<u>حساب U_0</u>

لدينا :

$U_7= U_0+7r$

ومنه $10 = U_0+7(2)$

$U_0 = 10-14 = -4$

•<u>عبارة U_n بدلالة n</u>

لدينا $Un = U_0+nr$

ومنه : $U_n = -4+2n$

•حساب المجموع:

$S = U_0+U_1+\dots+U_{99}$

عدد الحدود $99-0+1 = 100$

$S = \frac{100}{2}[U_0+U_{99}]$

$Sn = 50[-4+(-4)+2(99)]$

ومنه $S = 9500$

♦**مثال:** المتتاليات الهندسية (V_n) متتاليـة هندسـية جميع حدودها موجبة حيث $n \in N^*$
بحيث $V_4 \times V_6=16$

1- أحسب الأساس q علما أن $V_1=\frac{1}{4}$

2-احسب عبارة V_n بدلالة n

3-أحسب S_n حيث
$S_n=V_1+V_2+\dots+V_n$

• **الأجوبة :**

لدينا $V_4 \times V_6 = 16$

•V_5 هو الوسط الهندسي للحدين V_6 وV_5 ومنه V_5^2
$= V_4 \times V_6$ أي $V_5^2 = 16$

ومنه $V_5 = 4$ لأن الحدود موجبة

• حساب q علما أن $U_1=\frac{1}{4}$

لدينا $U_5 = U_1.q^4$

ومنه $4 = \frac{1}{4}.q^4$

أي $q^4 = 4 \times 4= 16$

$q^4 = 2^4$

ومنه $q = 2$

• <u>عبارة V_n بدلالة n</u>

لدينا $V_n = V_1.q^{n-1}$

ومنه $V_n = \frac{1}{4}(2)^{n-1}$

• حساب $S_n= v_1+v_2+..+v_n$

• $S_n=V_1\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]$

• $S_n = \frac{1}{4}[\frac{1-2^n}{1-2}]$

$S_n = -\frac{1}{4}[1-2^n]$

5- إتجاه تغير متتالية حسابية ومتتالية هندسية

أ) إتجاه تغير متتالية حسابية :

(U_n) متتالية حسابية معرفة مع N حدها الأول U_0 وأساسها r.

لدينا $U_n = U_0 + nr$ ومنه $U_{n+1} = U_0 +(n+1)r$

ندرس إشارة : $(U_{n+1} – U_n)$

لدينا: $U_{n+1} – U_n = [U_0 +(n+1)r] - [U_0 + nr]$

$= U_0 + nr + r-U_0 - nr$

إذن $U_{n+1} – U_n = r$

إذن إتجاه المتتالية الحسابية يعتمد على إشارة أساسها r

- $r > 0$ يكافئ (U_n) متزايدة تماما من أجل كل $n \in N$
- $r < 0$ يكافئ (U_n) متناقصة تماما من أجل كل $n \in N$
- $r = 0$ يكافئ (U_n) ثابتة من أجل كل n من N

مثال : لتكن (U_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $U_0 = -4$

وبالعلاقة $U_{n+1} = U_n-2n + 3$ من أجل كل عدد طبيعي n

ولتكن (r_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة

$r_n = U_{n+1} – U_n$

1- أثبت أن (r_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2- استنتج اتجاه تغير (r_n)

الأجوبة

(r_n) متتالية حسابية أساسها r يكافئ من أجل كل عدد n من N

$r_{n+1} - r_n = r$

نحسب : $U_{n+1} - U_n$

لدينا:

$U_{n+1} - U_n = U_n - 2n + 3 - U_n$

$= -2n + 3$

ومنه نحسب $r_{n+1} - r_n$

$r_{n+1} - r_n = -2(n+1) + 3 - (-2n + 3)$

$= -2n - 2 + 3 + 2n - 3$

$r_{n+1} - r_n = -2 = r$

إذن (r_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$

حساب r_0 :

$r_0 = U_1 - U_0$ ومنه $r_0 = -1 + 4$

إذن : $r_0 = 3$

وبما أن $r = -2 < 0$ إذن (r_n) متتالية حسابية متناقصة تماما.

ب) إتجاه تغير متتالية هندسية :

(U_n) متتالية هندسية أساسها q حيث $q \neq 1$ وحدها الأول U_0.

لدينا $U_n = U_0 \cdot q^n$ و $U_{n+1} = U_0 \, q^{n+1}$

ومنه نحسب $U_{n+1} - U_n$

$U_{n+1} - U_n = U_0 \; q^n \; [q - 1]$

نميز الحالات حسب الإشارة $(q-1)$

q	$-\infty$	0		1	$+\infty$
q - 1	-		-		+

1) $q - 1 > 0$ أي $q > 1$

إذن q^n موجبا ومنه اتجاه تغير المتتالية الهندسية يعتمد إلى إشارة U_0

أ) $q > 1$ و $U_0 > 0$ يكافئ (U_n) تزايدة تماما من أجل كل $n \in N$

ب) $q > 1$ و $U_0 < 0$ يكافئ (U_n) ناقصة تماما من أجل كل $n \in N$

2) $0 < q < 1$ إن $q - 1 < 0$ و q^n موجبا

ومنه :

أ) $0<q<1$ و$U_0 > 0$ يكافئ (U_n) متناقصة تماما من أجل كل$n \in N$

ب)$0<q<1$ و $U_0 < 0$ يكافئ (U_n) متزايدة تماما من أجل كل$n \in N$

3) $q \le 0$ إذن $q - 1 < 0$ و q^n ليست له إشارة ثابتة وذلك حسب كون n زوجيا أو فرديا.

ومنه (U_n) ليست رتيبة.

مثال : (U_n) متتالية عددية معرفة بحدها العام

$U_n = \frac{4^{n+1}}{7^n}$ من أجل كل n من N

1. برهن أن (U_n) متتالية هندسية عين أساسها وحدها الأول U_0.
2. ما هو اتجاه تغير المتتالية (U_n) ؟

الأجوبة :

1. لدينا :

$$U_n = \frac{4^{n+1}}{7^n} = 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$$

(U_n) لها الشكل $a.b^n$ وهو عبارة عن الحد العام لمتتالية هندسية حدها الأول a وأساسها b

ومنه وبالموافقة مع عبارة U_n نحو $U_0 = 4$ و $q = \frac{4}{7}$

2. اتجاه تغير (U_n)

لدينا $q = \frac{4}{7}$ إذن $0<q<1$

كذلك $U_0 > 4$ ومنه (U_n) متتالية هندسية متناقصة تماما من أجل كل n من N

***ملاحظة :** يمكن أن ندرس إتجاه تغير المتتالية (U_n) بدراسة إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$

لدينا :
$$U_{n+1} - U_n = 4\left(\frac{4}{7}\right)^{n+1} - 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$$
$$= 4\left(\frac{4}{7}\right)^n\left[\frac{4}{7}-1\right]$$
$$= 4\left(\frac{4}{7}\right)^n\left[\frac{-3}{7}\right]$$

إذن $U_{n+1} - U_n < 0$ ومنه (U_n) متناقصة تماما من أجل كل n من N

6- إستعمال المتتاليات الحسابية والهندسية لحل مشكلات من الحياة اليومية

♦ المشكلة رقم 1 :

المعطيات والأسئلة :

وضع تلميذ مبلغا مقداره 6000 د.ج في البنك بفوائد بسيطة لعدة سنوات، أي أنه عند نهاية كل سنة يمنح البنك فائدة قدرها 8% ليزيد إدخاره كل سنة بمبلغ ثابت يساوي 8% من المبلغ الابتدائي.

- يريد التلميذ معرفة المبلغ له كل سنة

1. أحسب U_1 . U_2 . U_3
2. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $U_{n+1} = U_n + 480$
3. عبّر عن U_n بدلالة n
4. ما هو عدد السنوات التي يجب انتظارها ليضعّف التلميذ المبلغ الابتدائي إلى 3 مرات ؟

• الأجوبة :

نضع $U_0 = 6000$ المبلغ الابتدائي

إذن : $U_1 = 6000 + 8 \times \frac{6000}{100}$

$U_1 = 6000 + 480$

$\boxed{U_1 = 6480}$

$U_2 = 6480 + 6000 \times \frac{8}{100}$

$= 6480 + 480$

$$\boxed{U_2 = 6960}$$

$$U_3 = 6960 + 6000 \times \frac{8}{100}$$

$$= 6960 + 480$$

$$\boxed{U_3 = 7440}$$

2- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$U_{n+1} = U_n + 480$$

لدينا

$$U_1 = U_0 + 480$$
$$U_2 = U_1 + 480$$
$$U_3 = U_2 + 480$$

وبتخمين نجد $U_{n+1} = U_n + 480$

ومنه (U_n) متتالية حسابية حدها الأول $U_0 = 6000$ و أساسها $r = 480$

إذن $U_n = U_0 + nr$ أي $U_n = 6000 + 480n$

عدد السنوات لكي يتضاعف المبلغ الابتدائي 3 مرات

نضع $U_n = 3 \times 6000$

$$6000 + 480n = 18000$$
$$480n = 18000 - 6000$$
$$480n = 1200$$

ومنه $n = 25$

إذن عدد السنوات هو 25 سنة

♦المشكلة الثانية :

المعطيات والأسئلة :

في سنة 2000 كان سعر الغرام الواحد من الذهب الخالص يقدّر بقيمة 1000 د.ج، علما أن سعر هذا الأخير يزداد كل سنة بمقدار 20% من المبلغ الذي كان عليه في السنة الفارطة.

1- اشترت تلميذة خاتما وزنه 4غرامات في يوم 2000/01/01 كم سيبلغ ثمن هـذا الخـاتم يـوم 2007/01/01 ؟

2- أرادت هذه التلميذة أن تبيع خاتمها في عام 2007 لصائغ ما هو ثمن بين هـذا الخـاتم علمـا أن الصائغ يأخذ نسبة في الربح مقدرة بـ20% من المبلغ الإجمالي للخاتم ؟

•الأجوبة :

ثمن الخاتم يوم 2000/01/01 هو 4000 د.ج

نضع $U_0 = 4000$

الزيادة كل عام مقدرة بـ 20% من المبلغ الإجمالي

إذن يوم 2001/01/01 يصبح ثمن الخاتم :

$$U_1 = U_0 + 4000 \times \frac{20}{100}$$

$$U_1 = U_0 + U_0 \times 0.2$$

$$U_1 = U_0\,(1+0.2)$$

$$U_1 = 1.02 \times U_0$$

$$U_1 = 1.02 \times 4000$$

$$\boxed{U_1 = 4800}$$

في سنة 2000 يصبح ثمن الخاتم :

$$U_2 = U_1 + U_1 \times 0.2$$

$$U_2 = U_1\,(1+0.2)$$

$$U_2 = U_1\,(1.2)$$

$$U_2 = (U0 \times 1.2)(1.2)$$

$$U_2 = U_0\,(1.2)2$$

$$U_2 = 4000 \times (1.44)$$

$$\boxed{U_2 = 5760}$$

وهكذا فإن ثمن الخاتم يزداد بأساس متتالية هندسية $q=1.2$ ومنه $U_7 = U_0 \times (1.2)7$

$$U_7 = 4000 \times (1.2)7$$

$$U_7 = 14332.7$$

ومنه ثمن بيع الخاتم عام 2007 هو 14332.7 د.ج.

* نسبة ربح الصائغ من الربح الإجمالي هي 20% إذن هذه النسبة تقدر بـ :

$$14332.7 \times \frac{20}{100} = 2866.54$$

ومنه ثمن بيع الخاتم هو :

$$14332.7 - 2866.54 = 11466.16$$

ثمن بيع الخاتم عام 2007 هو 11466.16 د.ج

7- المتتاليات من الشكل : $U_{n+1} = aU_n + b$ مع a≠0 و b≠0

أ- حساب الحد العام U_n بدلالة n حيث n عددا طبيعيا

- **تمييز الحالة الخاصة a=1**

إذن $U_{n+1} = U_n + b$ و منه $U_{n+1} - U_n = b$ و منه (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 و أساسها b و منه $U_n = U_0 + bn$

- نفرض a≠1
- إذا كانت (U_n) و (V_1) متتاليتان تحققان العلاقة التراجعية $U_{n+1} - aU_n = b$ و $V_{n+1} - aV_n = b$

إذن فرقها W_n هو حد عام لمتتالية هندسية أساسها a و بالفعل من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$W_{n+1} = U_{n+1} - V_{n+1} = (aU_n + b) - (aV_n + b)$$
$$= aU_n - aV_n$$

إذن $W_{n+1} = a \cdot W_n$

نريد معرفة المتتالية (V_n) التي تحقق العلاقة التراجعية $V_{n+1} = aV_n + b$ لذلك نفرض أن (V_n) ثابتة

أي $V_n = \alpha$ و منه $V_{n+1} = \alpha$ و منه

$V_{n+1} = aV_n + b$ تصبح $\alpha = a\alpha + b$

و منه $\alpha - a\alpha = b$ ومنه $\alpha(1-a) = b$

و نجد $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$ علما أن a≠1

و من العلاقة : $W_n = U_n - V_n$

نجد $W_n = U_n - \alpha$

أي $W_n = U_n - \dfrac{b}{1-a}$

(W_n) هي متتالية هندسية أساسها a وحدها الأول $W_0 = U_0 - \dfrac{b}{1-a}$ إذن

$$W_n = (U_0 - \frac{b}{1-a}) \cdot a^n$$

و لدينا $W_n = U_n - \alpha$ و منه $U_n = W_n + \alpha$

و نجد العلاقة الأساسية :

$$U_n = \left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \alpha$$

و هي عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية $U_{n+1} = aU_n + b$

مثال :

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على N حيث :

$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = -2U_n + 3 \end{cases}$ أعط عبارة U_n بدلالة n من أجل كل عدد طبيعي n

الأجوبة :

لدينا $a = -2$ ، $b = 3$ و منه :

$\alpha = \frac{b}{1-a}$ أي $\alpha = \frac{3}{1-(-2)} = 1$

إذن المتتالية (W_n) المعرفة بحدها العام $W_n = U_n - \alpha$

أي $W_n = U_n - 1$ هي متتالية هندسية أساسها $a = -2$ و حدها الأول $W_0 = U_0 - 1$ إذن $W_0 = 3$

و منه $W_n = W_0 \cdot q^n$ أي $W_n = 3(-2)^n$

و بما أن $U_n = W_n + \alpha$ إذن $U_n = 3(-2)^n + 1$

ب- **إتجاه تغير المتتالية التراجعية المعرفة بـ** $U_{n+1} = aU_n + b$

بما أن $W_n = U_n - \alpha$ حسب الفرع (أ)

إذن $W_{n+1} = U_{n+1} + \alpha$ و منه إشارة الفرق

$W_{n+1} - W_n$ من إشارة $U_{n+1} - U_n$

لأن $W_{n+1} - W_n = (U_{n+1} - \alpha) - (U_n - \alpha)$

$= U_{n+1} - \alpha - U_n + \alpha$

$= U_{n+1} - U_n$

و بما أن (W_n) متتالية هندسية أساسها a و حدها الأول $W_0 = U_0 - \alpha$ إذن اتجاه تغير المتتالية (U_n) من نفس اتجاه تغير المتتالية (W_n)

***ملاحظة : (**درس اتجاهات تغير المتتالية الهندسية في درس المتتاليات الهندسية**)**

ج- حساب المجموع S_n

$S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$

لدينا $W_n = U_n - \alpha$ و منه $U_n = W_n + \alpha$

$$U_1 = W_1 + \alpha$$
$$U_2 = W_2 + \alpha$$
$$U_3 = W_3 + \alpha$$
$$\vdots$$
$$U_n = W_n + \alpha$$

و بالجمع طرف إلى طرف نجد

$$\underbrace{(U_1 + U_2 + \ldots + U_n)}_{S_n} = \underbrace{(W_1 + W_2 + \ldots + W_n)} + \underbrace{(\alpha + \alpha + \ldots + \alpha)}$$

n مرة   مجموع n حدا من متتالية هندسية أساسها a

و حدها الأول $W_1 = U_1 - \alpha$ و $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$

و منه $S_n = W_1 \cdot \left(\dfrac{1-a^n}{1-a}\right) + n\alpha$ إذن :

$$\boxed{S_n = \left(U_1 - \frac{b}{1-a}\right)\left[\frac{1-a^n}{1-a}\right] + n\alpha}$$

و تمثل هذه المساواة عبارة المجموع S_n للمتتالية (U_n) المعرفة بالعلاقة التراجعية
$U_{n+1} = aU_n + b$

مثال : نعرف المتتالية (U_n) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوما بالشكل :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 5U_n + 2 \end{cases}$$

1) أحسب U_n بدلالة n

2) ما هو اتجاه تغير المتتالية (U_n) ؟

3) أحسب المجموع S_n المعرف كما يلي :

4) $S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$

الأجوبة :

1) حساب عبارة U_n بدلالة n:

لدينا $a = 5$ ، $b = 2$ ومنه : $\alpha = \frac{b}{1-a} = \frac{2}{1-5}$

إذن $\alpha = -\frac{1}{2}$

نعرف المتتالية (v_n) بعبارة حده العام : $V_n = U_n - \alpha$

أي $V_n = U_n + \frac{1}{2}$

نعلم أن (V_n) متتالية هندسية أساسها a=5 و حدها الأول

أي $V_n = U_n - \alpha$ $\quad V_1 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

و منه $V_n = V_1 \cdot q^{n-1}$ أي $\boxed{V_n = \frac{7}{2}(5)^{n-1}}$

لدينا $U_n = V_n - \frac{1}{2}$ إذن عبارة U_n تعطى بالشكل

$$\boxed{U_n = \frac{7}{2}(5)^{n-1} - \frac{1}{2}}$$

2) اتجاه تغير (U_n) من اتجاه تغير (V_n)

و بما أن $V_1>0$ و $q>1$ إذن (V_n) متتالية متزايدة تماما على N و منه (U_n) كذلك متزايدة تماما على N

3) حساب المجموع S_n :

لدينا $$S_n = (U_1 - \alpha)(\frac{1-a^n}{1-a}) + n\alpha$$

و منه $$S_n = (3 + \frac{1}{2})(\frac{1-5^n}{1-5}) - \frac{1}{2}n$$

$$S_n = \frac{7}{2}\left(\frac{5^n - 1}{4}\right) - \frac{1}{2}n$$

إذن $$\boxed{S_n = \frac{7}{8}(5^n - 1) - \frac{1}{2}n}$$

ج- حل مشكلات تستعمل فيها متتاليات من الشكل $U_{n+1} = aU_n + b$

♦ **طرح المشكلة الرياضية :**

قدّر ثمن سيارة جديدة من طراز معين بمبلغ مليون و خمسة مائة ألف دينارا جزائريا (1500000 DA) بتاريخ 07/01/01

و اتفق على بيع هذا النوع من السيارات ابتداء من كل سنة بالطريقة التالية :

كل عام ابتداء من 01 جانفي ثمن البيع الجديد ينقص بمقدار 25% من ثمن البيع للسنة الفارطة وبزيادة قدرها (50000 DA) للمبلغ الإجمالي الجديد.

نسمي P_n مبلغ السيارة يوم 01 جانفي من سنة 2007+n

الأسئلة :

1) أحسب P_0 ، P_1 ، P_2 ثم رتب هذه الحدود.
2) أكتب من أجل كل عدد طبيعي n عبارة P_{n+1} بدلالة P_n
3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = P_n - 200000$ برهن أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول U_0.
4) إعط عبارة U_n بدلالة n ثم عبارة P_n بدلالة n
5) أحسب المجموع S_n المعرف بـ :

$$S_n = P_0 + P_1 + \ldots + P_{n-1}$$

• **حل المشكلة :**

1) نفرض P_0 هو ثمن بيع السيارة يوم 07/01/01

إذن $P_0 = 1500000$ DA

$$P_1 = P_0 - 25 \times \frac{P_0}{100} + 50000$$

$$P_1 = P_0[1 - \frac{1}{4}] + 50000$$

$$P_1 = \frac{3}{4}P_0 + 50000$$

$$P_1 = \frac{3}{4}(1500000 \quad) + 50000$$

$$\boxed{P_1 = 1175000 \text{ DA}}$$

$$P_2 = P_1 - \frac{25}{100}P_1 + 50000$$

$$P_2 = P_1(1 - \frac{1}{4}) + 50000$$

$$P_2 = \frac{3}{4}P_1 + 50000$$

$$P_2 = \frac{3}{4}(1175000) + 50000$$

$P_2 = 931250$ DA

P_0 يمثل ثمن البيع يوم 07/01/01

P_1 يمثل ثمن البيع يوم 08/01/01

P_2 يمثل ثمن البيع يوم 09/01/01

لاحظ أن $P_2 < P_1 < P_0$

(2 عبارة P_n بدلالة n

لدينا : $P_1 = \frac{3}{4}P_0 + 50000$

$$P_2 = \frac{3}{4}P_1 + 50000$$

إذن

$$\boxed{P_{n+1} = \frac{3}{4}P_n + 50000}$$

***ملاحظة :** (P_n) متتالية تراجعية من الشكل $P_{n+1} = aP_n + b$

حيث $a = \frac{3}{4}$ و $b = 50000$

(3 $U_n = P_n - 200000$

لدينا : $\alpha = \frac{b}{1-a} = \frac{50000}{1-\frac{3}{4}}$

$\alpha = 50000 \times 4$ ومنه $\boxed{\alpha = 200000}$

إذن $U_n = P_n - \alpha$

إذن (U_n) متتالية هندسية أساسها a حيث $a = \frac{3}{4}$ و حدها الأول $U_0 = P_0 - \alpha$

$U_0 = 1500000 - 200000$

$U_0 = 1300000$

و منه : $U_n = U_0 . q^n$

$$U_n = (1300000)\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

و بما أن $P_n = U_n + \alpha$

$$P_n = (1300000)\left(\frac{3}{4}\right)^n + 200000$$

4) حساب المجموع S_n

$S_n = P_0 + P_1 + \ldots + P_{n-1}$

لدينا n حدا.

$P_n = U_n + 200000$

$P_0 = U_0 + 200000$

$P_1 = U_1 + 200000$

$P_{n-1} = U_{n-1} + 200000$

بالجمع طرف إلى طرف نجد

$$P0 + P1 + \ldots + Pn-1 = \underbrace{(U0 + U1 + \ldots + Un-1)} + 200000 \times n$$

مجموع حدود متتالية هندسية

و منه : $$S_n = U_0\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right] + 200000 \times n$$

$$S_n = (1300000)\left[\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\right] + 200000 \times n$$

$$S_n = (4 \times 1300000)\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) + 200000 \times n$$

$$S_n = (5200000)\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) + 200000 \times n$$

***ملاحظة:**

يمكنك تطبيق قانون المجموع المحصل عليه في الدرس الفقرة (د) علما أن الحد الأول هو U_0

تمارين و مشكلات حول المتتاليات العددية

تمرين 1 :

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على N بحدها العام U_n:

- أحسب الحدود الخمسة الأولى.
- أكتب عبارة الحد U_{n+1} بدلالة n.

$U_n = 3n + 4$, $U_n = -2n + 1$

$U_n = \frac{1}{n+1}$, $U_n = 3^n$

تمرين 2 :

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على N بالعلاقة التراجعية

- أحسب الحدود الخمسة الأولى.

(1) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = U_n - 2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = -2U_n \end{cases}$

تمرين 3 :

نعتبر الدالةالعددية f المعرفة على IR بـ :

$f(x) = 2x^3 - 30x^2 + 162$

وليكن جدول تغيراتها

x	$-\infty$	0	10	$+\infty$
F(x)	↗	162	↘ -838	↗

* نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على N بـ:

$U_n = 2n^3 - 30n^2 + 162$

1) ما هي قيم U_0 ، U_{10} ؟

2) إستنتج من جدول تغيرات الدالة f إتجاه تغير (U_n) لما $n \in \{0.1.2.3.4.5.6.7.8.9.10\}$?

3) إستنتج من جدول تغيرات الدالة f إتجاه تغير (U_n) لما $n \geq 10$ ؟

تمرين 4 :

أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) المعرفة على N بحدها العام

$U_n = -2n + 5$, $U_n = 3n - 1$, $U_n = 2^n$

$U_n = (\frac{1}{3})^n$

تمرين 5 :

حل المتتالية (U_n) المعرفة على N حسابية ؟

(1)$U_n = 3n - 7$ (2)$U_n = -4n + 2$ (3)$U_n = n^2$

(4) $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = U_n + n \end{cases}$ (5) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$

تمرين 6 :

(U_n) متتالية حسابية معرفة على N، حدها الأول هو U_0 وأساسها r

أكتب U_n بدلالة n

(1) $U_0 = -1$, $r = 4$ (2) $U_0 = \frac{3}{2}$, $r = -5$

(3) $U_0 = 2$, $r = 2$ (4) $U_0 = \frac{1}{4}$, $r = 2$

تمرين 7 :

(U_n) متتالية حسابية معرفة على N أساسها r بحيث :

$U_5 = 9$, $U_2 = 3$

1) أحسب الأساس r.

2) أحسب الحد الأول U_0.

3) أكتب U_n بدلالة n

4) أحسب المجموع S_n: $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$

5) استنتج المجموع S_{10} , S_{20}.

- نفس الأسئلة إذا كان: $U_8 = 2$, $U_4 = 10$

تمرين 8 :

(Un) متتالية حسابيةمعرفة على N ، اساسها r ($r\langle 0$) بحيث :

$U_3+U_4+U_5=42$ و $(U_3)^2+(U_4)^2+(U_5)^2=381$

1) أحسب الحدود U_3,U_4,U_5

2) أحسب الأساس ثم الحد الأول

3) أكتب U_n بدلالة n

تمرين9 :

(Un) متتالية حسابيةمعرفة على N ، اساسها r بحيث :

$r = 3$ و $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 34$

1) أحسب U_0

2) أكتب U_n بدلالة n

3) أحسب: $S_n = U_0+\ldots+U_n$

4) أحسب المجموع: $S'_n = U_1+\ldots+U_n$

تمرين 10 :

كان عدد عمال مؤسسة إنتاجية عام 2000 هو 300 عامل

بحيث تنطق المؤسسة كل سنة 40 عاملا جديدا.

نعتبر أنV_0 هو عدد العمال عام 2000

وv_n هو عدد العمال بعد n سنة

1- أحسب عدد العمال عام 2001 ، 2002 ، 2003.

2- أوجد علاقة بين v_{n+1} و v_n

3- استنتج طبيعة المتتالية (v_n)

4- أكتب v_n بدلالة n.

5 – أحسب المجموع : $S_n=V_0+V_1+\ldots+V_n$

تمرين 11 :

وضع شخص مبلغ 2000 د.ج عام 2007 بأحد البنوك، بحيث له فائدة بسيطة سنوية قدرها 5% .

نفرض أن المبلغ الذي وضعه عام 2007 هو U_0

و U_n : الرصيد المحصل عليه بعد n سنوات

1) أحسب رصيد الشخص عام 2008 ، 2009، 2010.

2) أوجد علاقة بين U_{n+1} و U_n

3) استنتج طبيعة (U_n)

4) أكتب U_n بدلالة n

تمرين 12 :

(U_n) متتالية حسابية معرفة على N

أساسها r وحدها الأول $U_0 = 1$ ، يعتبر المجموع S لعدة حدود :

$S = 1+11+21+\ldots+201$

1) أحسب الأساس r

2) أكتب U_n بدلالة n

3) عين الرتبة n بحيث : $U_1 = 201$

4) نعتبر المجموع S_n : $S_n = U_0+\ldots+U_n$

هل توجد قيمة لـ n بحيث : $S_n = 105$

تمرين 13 :

هل المتتالية (U_n) المعرفة على N هندسية ؟

$U_n = 3.(2)^n$, $U_n = (-4).(3)^n$, $U_n = n^2$

تمرين 14 :

(U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0

1)أكتب U_n بدلالة n

2) ادرس اتجاه تغير (U_n)

$q = 2 , U_0 = 3$

$q = (\frac{1}{3}) , U_0 = 2$

$q = (-2) , U_0 = \frac{1}{2}$

تمرين 15 :

(U_n) متتالية هندسيةمعرفة علىN^* أساسها q وحدها الأولU_1

نفس أسئلة التمرين 14

$q = 2 , U_1 = -3$

$q = (\frac{-1}{2}) , U_1 = 4$

$q = -3 , U_1 = + 2$

تمرين 16 :

(U_n) متتالية هندسية معرفة على N بحيث :

$U_4 = 12 , U_2 = 3$

وأساسها q $(q > 0)$

1) أحسب الأساس q

2) أحسب الحد الأول U_0

3) أكتب U_n بدلالة n

4) أحسب المجموع S_n : $S_n = U_0+\ldots+U_n$

استنتج المجموع S_6

تمرين 17 :

(U_n) متتالية هندسية معرفة على *N ، $U_5 = 54 , U_3 = 6$

وأساسها q $(q > 0)$

1) أحسب الأساس q

2) أحسب الحد الأول U_1

3) أكتب U_n بدلالة n

4) أحسب المجموع S_n : $S_n = U_1+\ldots+U_n$

ثم استنتج S_6

تمرين 18 :

(U_n) متتالية هندسية معرفة على N

أساسها $(q > 0)$ و حدها الأول $U_0 = 1$

بحيث : $U_0 + U_1 + U_2 = 13$

1) أحسب الأساس q

2) أكتب U_n بدلالة n

تمرين 19 :

أودع شخص مبلغا قدره 11000د.ج بإحدى البنوك عام 2000 بحيث حصل له فائدة سنوية مركبة قدرها 6 %.

إذا إعتبرنا أن المبلغ المودع هو v_n

ونعتبر العدد v_n : الرصيد الجديد بعد n سنوات

1) أحسب المبلغ المحصل عليه عام 2001 ، 2002 ، 2003

2) أوجد علاقة بين v_{n+1} و v_n

3) استنتج طبيعة المتتالية(V_n)

4) أكتب V_n لدلالة n

تمرين 20 :

إنتاج مصنع عام2006 هو 3000 طن، و يزيد سنويا بـ 2%

إذا اعتبرنا V_0 هو الإنتاج عام 2006

و V_n: الإنتاج بعد n سنة

1) أحسب الإنتاج عام 2007 ، 2008 .

2) أوجد علاقة بين v_{n+1} و v_n

3) استنتج طبيعة المتتالية (V_n)

4) أكتب V_n لدلالة n

5) أحسب المجموع : $S_n = V_0+\ldots+V_n$

تمرين 21 :

1) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة علىNبالعلاقة التراجعية

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = -3\,U_n + 2 \end{cases}$$

أحسب U_1, U_2, U_3

2) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على N بـ : $V_n = U_n - \frac{1}{2}$

أ/ أحسب : V_2, V_1, V_0

ج/ بين أن(V_n) هي متتالية هندسية أساسها3-

3) أكتب V_n بدلالة n

4) أكتبU_n دلالة n

5) أحسب المجموع $S_n=V_0+..+V_n$

ثم أحسب المجموع : $S'_n = U_0 + \ldots + U_n$

حـلول التمارين :

التمرين 1 :

1) $U_n = 3n + 4$

حساب الحدود الخمسة الأولى:

من أجل $n = 0$ فإن: $U_0 = 3(0)+4 = 4$ إذن $U_0 = 4$

من أجل $n = 1$ فإن: $U_1 = 3(1)+4 = 7$ إذن $U_1 = 7$

من أجل $n = 2$ فإن: $U_2 = 3(2)+4 = 10$ إذن $U_2 = 10$

من أجل $n = 3$ فإن: $U_3 = 3(3)+4 = 13$ إذن $U_3 = 13$

من أجل $n = 4$ فإن: $U_4 = 3(4)+4 = 16$ إذن $U_4 = 16$

2) كتابة U_{n+1} بدلالة n:

في عبارة الحد العام Un للحصول على عبارة U_{n+1} نقوم بتعويض الرّتبة n بالرّتبة (n+1) فنجد:

نقوم بالنشر فنجد: $U_{n+1} = 3(n+1) + 4$

$U_{n+1} = 3n + 3 + 4$

إذن: $\boxed{U_{n+1} = 3n + 7}$

2) $U_n = \frac{1}{n+1}$

من أجل $n = 0$ فإن $U_0 = \frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$ إذن: $U_0 = 1$

من أجل $n = 1$ فإن: $U_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ إذن: $U_1 = \frac{1}{2}$

من أجل $n = 2$ فإن: $U_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ إذن: $U_2 = \frac{1}{3}$

من أجل $n = 3$ فإن: $U_3 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$ إذن: $U_3 = \frac{1}{4}$

من أجل $n = 4$ فإن: $U_4 = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$ إذن: $U_4 = \frac{1}{5}$

2) عبارة الحد U_{n+1} بدلالة n :

لدينا: بتعويض الرتبة n بالرتبة (n+1)

نجد : $U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+1+1} = \frac{1}{n+2}$

إذن: $\boxed{U_{n+1} = \frac{1}{n+2}}$

3) $U_n = 3^n$

- حساب الحدود الخمسة الأولى:

من أجل $n = 0$ فإن: $U_0 = 3^0 = 1$

من أجل $n = 1$ فإن: $U_1 = 3^1 = 3$

من أجل $n = 2$ فإن: $U_2 = 3^2 = 9$

من أجل $n = 3$ فإن: $U_3 = 3^3 = 27$

من أجل $n = 4$ فإن: $U_4 = 3^4 = 81$

- كتابة الحد U_{n+1} بدلالة n:

لدينا: $U_{n+1} = 3^{(n+1)} = 3^n \times 3 = 3 \times 3^n$

إذن: $\boxed{U_{n+1} = 3 \times 3^n}$

التمرين 2 :

$$(1)\ \begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = 2Un + 1 \end{cases}$$

حساب الحدود: $U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5$

في المتتالية المعرفة بالعلاقة التراجعية، حساب كل حد متعلق بالحد السّابق له، أي لحساب U_1، يجب أن نعلم قيمة الحد U_0.

ولحساب الحد U_2، يجب أن نعلم قيمة الحد U_1.

* **حساب U_1 :** لدينا بتعويض قيمة n بـ 0 في العلاقة التراجعية نجد :

$U_{0+1} = 2U_0 + 1$

ومنه: $U_1 = 2U_0 + 1$ إذن: $U_1 = 2(\frac{1}{2}) + 1$

ومنه: $U_1 = 1 + 1$ $\quad U_1 = 2$

*** حساب U_2 :** نعوض قيمة n بالعدد 1 نجد :

$U_{1+1} = 2U_1 + 1$ ومنه: $U_2 = 2U_1 + 1$ ومنه: $U_2 = 2(2) + 1$

إذن: $U_2 = 5$

*** حساب U_3 :** نعوض قيمة n بالعدد 2 نجد :

$U_{2+1} = 2U_2 + 1$ ومنه: $U_3 = 2U_2 + 1$ ومنه : $U_3 = 2(5) + 1$

إذن: $U_3 = 11$

*** حساب U_4 :** نعوض قيمة n بالعدد 3 نجد:

$U_{3+1} = 2U_3 + 1$ ومنه: $U_4 = 2U_3 + 1$ ومنه: $U_4 = 2(11) + 1$

إذن: $U_4 = 23$

*** حساب U_5 :** نعوض قيمة n بالعدد 4 نجد:

$U_{4+1} = 2U_4 + 1$ ومنه: $U_5 = 2U_4 + 1$ ومنه: $U_5 = 2(23) + 1$

إذن: $U_5 = 45$

التمرين 3 :

$f(x) = 2x^3 - 30x^2 + 162$ والتالي جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	10	$+\infty$
F(x)	↗	162	↘	↗
			-838	

ولتكن المتتالية (Un) المعرفة على N:

$Un = 2n^3 - 30n^2 + 162$

إيجاد قيم U_{10} , U_0 ؟

من جدول التغيرات لدينا: $U_0 = 162$

$U_{10} = -838$

2) اتجاه تغير (U_n) لما $n \in \{0.1.2.3.4.5.6.7.8.9.10\}$؟

اتجاه تغير (U_n) على هذه المجموعة، هو نفس اتجاه تغير الدالة f على المجال [0 , 10]

ومن جدول تغيرات الدالة f، واضح أن f متناقصة على المجال

[0 , 10] إذن (U_n) متناقصة على المجموعة {0.1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}

3) اتجاه تغير (Un) لما $n \geq 10$ هو نفس اتجاه تغير الدالة f على

$]10 , +\infty[$ إذن (U_n) متزايدة لما $n \geq 10$

التمرين 4 :

1) $U_n = -2n + 5$

دراسة اتجاه (U_n)

أولا: نكتب الحد U_{n+1} بدلالة n.

لكتابة الحد U_{n+1} بدلالة n، نقوم بتعويض n بالرتبة (n+1) فنجد: $U_{n+1} = -2(n+1) + 5 = (-2n - 2) + 5 = -2n + 5$

إذن: $U_{n+1} = -2n + (5-2)$ ومنه: $U_{n+1} = -2n + 3$

- حساب الفرق $(U_{n+1} - U_n)$

لدينا: $U_{n+1} - U_n = (-2n + 3) - (-2n + 5)$

ومنه: $U_{n+1} - U_n = -2n + 3 - (-2n) - (+5)$

ومنه: $U_{n+1} - U_n = -2n + 3 + 2n - 5$

بعد الاختزال: $U_{n+1} - U_n = 3-5$

إذن: $U_{n+1} - U_n = -2$

وبما أن الفرق $(U_{n+1} - U_n)$ هو عدد سالب تماما إذن :

$U_{n+1} - U_n < 0$ من أجل كل n من N فإن المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

2) $U_n = 2^n$

-كتابة الحد U_{n+1} بدلالة n

لدينا: $U_{n+1} = 2^{(n+1)} = 2^n \times 2$

(خواص القوى الصحيحة) $U_{n+1} = 2 \times 2^n$

- حساب الفرق: $(U_{n+1} - U_n)$

لدينا: $U_{n+1} - U_n = [2 \times 2^n] - [2^n]$

ملاحظة أن 2^n هو عامل مشترك إذن:

$U_{n+1} - U_n = 2^n [2-1] = 2^n [1] = 2^n$

* بما أن العدد 2^n موجب تماما إذن: $U_{n+1} - U_n > 0$

ومنه (U_n) متزايدة تماما.

4) $U_n = (\frac{1}{3})^n$

- كتابة الحد U_{n+1} بدلالة n :

لدينا: $U_{n+1} = (\frac{1}{3})^{n+1} = (\frac{1}{3})^n \times (\frac{1}{3})$

(تطبيق خواص القوى) $U_{n+1} = (\frac{1}{3})(\frac{1}{3})^n$

- حساب الفرق: $(U_{n+1} - U_n)$

$U_{n+1} - U_n = (\frac{1}{3})(\frac{1}{3})^n - (\frac{1}{3})^n$

لاحظ أن $(\frac{1}{3})^n$ هو عامل مشترك إذن:

$U_{n+1} - U_n = (\frac{1}{3})^n [\frac{1}{3} - 1] = (\frac{1}{3}) [\frac{1-3}{3}] = (\frac{1}{3})^n [\frac{-2}{3}]$

إذن : $U_{n+1} - U_n = (\frac{1}{3})^n (\frac{-2}{3})$

أن العدد $(\frac{1}{3})^n$ موجب تماما

أن العدد $(\frac{-2}{3})$ سالب تماما

إن جداؤهما سالب تماما إذن: $(U_{n+1} - U_n) < 0$

ومنه (U_n) متناقصة تماما على N

التمرين 5 :

هل المتتالية (U_n) المعرفة على (U_n) حسابية ؟

$(1)\ldots\ldots\ U_n = 3n - 7$

- كتابة U_{n+1} بدلالة n

لدينا :

$U_{n+1} = 3(n+1) - 7$

و منه : $U_{n+1} = 3n + 3 - 7$

إذن $U_{n+1} = 3n - 4$

- حساب الفرق : $(U_{n+1} - U_n)$

$$U_{n+1} - U_n = 3n - 4 - (3n - 7)$$

$$= 3n - 4 - 3n + 7$$

إذن $U_{n+1} - U_n = 3$

و منه (U_n) هي متتالية حسابية أساسها $r = 3$

(3) $U_n = n^2$

- كتابة U_{n+1} بدلالة n

لدينا : $U_{n+1} = (n+1)^2$

$$= n^2 + 2(n)(1) + 1^2$$

$$U_{n+1} = n^2 + 2(n)(1) + 1^2$$

إذن $U_{n+1} = n^2 + 2n) + 1$

- حساب الفرق $(U_{n+1} - U_n)$

لدينا $U_{n+1} - Un = n^2 + 2n + 1 - (n^2)$

إذن $U_{n+1} - U_n = 2n + 1$

إن الفرق $U_{n+1} - U_n$ ليس عددا ثابتا، إذن (U_n) ليست متتالية حسابية

(4) $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = U_n + n \end{cases}$

لدينا : (U_n) معرفة بعلاقة تراجعية

إذن : $U_{n+1} - U_n = n$

إن الفرق $(U_{n+1} - U_n)$ ليس عددا ثابتا و منه (U_n) ليست متتالية حسابية

(5) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$

(U_n) معرفة بعلاقة تراجعية

إذن : $U_{n+1} - U_n = 2$

و منه الفرق هو عدد ثابت إذن (U_n) هي متتالية حسابية أساسها r=2

التمرين 6 :

1) (U_n) متتالية حسابية معرفة على N

كتابة الحد العام U_n بدلالة n

1) $U_0 = -1$, $r = 4$

$U_n = U_0 + n\,r$

$\boxed{U_n = -1 + 4n}$

2) $U_0 = \frac{3}{2}$, $r = -5$

لدينا : $U_n = U_0 + nr$

$\boxed{U_n = \frac{3}{2} - 5n}$

2) (U_n) معرفة على N^* حدها الأول هو U_1

كتابة U_n بدلالة n

1) $U_1 = 2$, $r = -2$

لدينا : $U_n = U_1 + (n-1)r$

و منه: $U_n = 2 + (n-1)(-2)$

إذن: $U_n = 2 - 2n + 2$

و منه: $U_n = 4 - 2n$

2) $U_1 = 3 , r = 2$

لدينا: $U_n = U_1 + (n-1) r$

و منه: $U_n = 3 + (n-1)+2$

إذن : $U_n = 3 + 2n - 2$ و منه $U_n = (3-2) + 2n$

إذن : $U_n = 1 + 2n$

التمرين 7 :

لنا: $U_5 = 9, U_2 = 3$

حساب الأساس r:

لدينا العلاقة بين كل حدين من حدود متتالية حسابية:

$U_5 = U_2 + (5-2) r$

و منه: $9 = 3 + 3 r$

$9 - 3 = 3 r$

و منه: $6 = 3 r$

إذن : $r = \frac{6}{3} = 2$

ومنه $r = 2$

2- حساب الحد الأول U_0 :

لنا من عبارة الحد العام : $U_n = U_0 + 2 r$

بإعطاء القيمة 2 لـ n نجد :

$U_2 = U_0 + 2 r$

إذن : $3 = U_0 + 2(2)$

و منه: $U_0 = 3 - 4$

إذن: $U_0 = -1$

2- كتابة U_n بدلالة n :

$$U_n = U_0 + n\,r$$

و منه: $\boxed{U_n = -1 + 2n}$

4 – حساب المجموع S_n:

$$S_n = U_0 + \ldots + U_n$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[U_0 + U_n\right]$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[-1 + (-1 + 2n)\right]$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[(-2 + 2n)\right]$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[2(-1 + n)\right]$$

وباختزال العدد 2 نجد :

$$S_n = (n+1)(-1+n) = (n-1)(n+1)$$

$$\boxed{S_n = n^2 - 1}$$

5- استنتاج : S_{20}, S_{10}

$$S_{10} = (10)^2 - 1 = 100 - 1 = 99$$

$$S_{20} = (20)^2 - 1 = 400 - 1 = 399$$

التمرين 8 :

لدينا : $U_3 + U_4 + U_5 = 33$ .....(1)

و $(U_3)^2 + (U_4)^2 + (U_5)^2 = 381$ ...(2)

بما أن U_4 هو الوسط الحسابي

لدينا $U_3+U_5=2U_4$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$33= U_4+2U_4$ ومنه : $3U_4=33$ إذن :

$$\boxed{U_4=\frac{33}{3}=11}$$ نعوض بقيمة U_4 في (1)و(2)نجد :

$U_3+11+U_5=33$ و $(U_3)^2+(11)^2+(U_5)^2=381$

ومنه $U_3+U_5=33-11=22$ ....(1)

$(U_3)^2+(U_5)^2=381-121=260$ ...(2)

ولدينا : $U_5=U_4+r$ و $U_3=U_4-r$ وبالتعويض في(2) نجد :

$(U_4-r)^2+(U_4+r)^2=260$

$(U_4)^2-2rU_4+r^2+(U_4)^2+2r(U_4)+r^2=260$

وبعد الإختزال نجد : $2(U_4)^2+2r^2=260$

إذن $2(121)+2r^2=260$ ومنه $2r^2=260-242$

ومنه $2r^2=18$ إذن : $r^2=\frac{18}{2}=9$

وبما أن $r\langle 0$ فإن : $r=-3$

وعليه فإن : $U_3=11-(-3)=14$ و $U_5=11+(-3)=8$

التمرين 9 :

(U_n) متتالية حسابية معرفة على N ، بحيث $r=3$

و $U_1+U_2+U_3+U_4=34$

1- حساب U_0:

- نكتب كل حد من حدود المجموع بدلالة الأساس r و الحد الأول U_0

لنا : $U_n=U_0+nr$

و منه: لما $n=1$ نجد:

$U_1=U_0+r$

لما $n=2$ نجد:

$U_2=U_0+2r$

لما $n=3$ نجد:

$U_3=U_0+3r$

لما $n=4$ نجد:

$U_4 = U_0 + 4r$

إذن نعوض بقيمة كل حد في المجموع فنجد:

$(U_0 + r) + (U_0 + 2r) + (U_0 + 3r) + (U_0 + 4r) = 34$ بما أن $r=3$

فنجد :

$(U_0 + 3) + (U_0 + 2) + (U_0 + 9) + (U_0 + 12) = 34$

و منه: $4U_0 + 30 = 34$

$4U_0 = 34 - 30$

و منه: $4U_0 = 4$

إذن : $U_0 = \frac{4}{4}$

و منه : $U_0 = 1$

2- كتابة U_n بدلالة n :

و منه:

$$U_n = U_0 + nr$$
$$U_n = 1 + 3n$$

3- حساب المجموع:

$$S_n = U_0 + \ldots\ldots + U_n$$
$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[U_0 + U_n\right]$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[(2+3n)\right]$$

حساب المجموع : S'_n

$$S'_n = U_1 + \ldots\ldots + U_n$$

حساب U_1:

$U_1 = U_0 + r = 1 + 3 = 4$

إذن: $U_1 = 4$

لدينا:

$$S'_n = \frac{n}{2}\left[U_1 + U_n\right] = \frac{n}{2}\left[4+(1+3n)\right]$$

$$\boxed{S'_n = \frac{n}{2}\left[(5+3n)\right]}$$

التمرين 10:

$V_0 = 300$

1)حساب عدد العمال عام 2001 :

أي حساب V_1 و منه:

$V_1 = V_0 + 40$

$V_1 = 300 + 40 = 340$

حساب عدد المال عام 2002 :

أي حساب V_2:

$V_2 = V_1 + 40$

$V_2 = 380 + 40 = 420$

2) إيجاد العلاقة بين V_{n+1} و V_n:

لدينا الاستنتاج:

V_{n+1}: عدد العمال بعد (n+1) سنة

V_n: عدد العمال بعد n سنة

إدن : $V_{n+1}=V_n +40$

3) منه (V_n) هي م.ح أساسها $r = 40$ و حدها الأول هو $V_0 = 300$

$V_{n+1} = V_n + 40$

4)كتابة V_n بدلالة n:

لدينا $V_n = V_0 + nr$

أي: $\boxed{V_n = 300 + 40n}$

5) حساب المجموع S_n

$S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$

$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[V_0 + V_n\right]$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[300 + (300+40n)\right]$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[2(300+40n)\right]$$

بعد إختزال العدد2 بسطا ومقاما نجد

$$\boxed{S_n = (n+1)\left[(300+40n)\right]}$$

التمرين 11 :

لنا $U_0 = 3000$ المبلغ المودع عام 2007

المبلغ المحصل عام 2008:

$$U_1 = U_0 + (0.05)3000$$

$$U_1 = U_0 + 3150$$

المبلغ المحصل عام 2009:

$$U_2 = U_1 + (0.05)3000$$

$$U_2 = 3150 + 150 = 3300 \text{ DA}$$

2- العلاقة بين U_{n+1} و U_n :

U_{n+1}: المبلغ المحصل بعد n+1 سنة

U_n : المبلغ المحصل بعد n سنة

إذن :

$$U_{n+1} = U_n + (0.05)\ 300$$

$$U_{n+1} = U_n + 150$$

و منه (U_n) متتالية حسابية أساسها $r = 150$ و حدها الأول هو $U_0 = 2000$

و منه: $U_n = U_0 + n\,r$

$$\boxed{U_n = 2000 + 150n}$$

التمرين 12:

(U_n) متتالية معرفة على N

$U_0 = 1$، لنا المجموع:

$$S = 1 + 1 + 21 + \ldots + 2001$$

1- حساب الأساس r:

$$r = 11 - 1 = 10$$

2- كتابة U_n بدلالة n :

$$U_n = U_0 + n\,r$$

$$U_n = 1 + n\,10$$

3- عين n بحيث: $U_n = 201$

لنا: $U_n = 201$

و منه: $1 + 10n = 201$

لدينا معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول الطبيعي n و منه:

$$10n = 201 - 1$$

إذن: $10\,n = 200$

أي: $n = \frac{200}{10} = 20$

و منه : $n = 20$

إذن: $U_{20} = 201$

4- حساب S_n:

لدينا $S_n = U_0 + \ldots\ldots + U_n$

ومنه $S_n = \frac{n+1}{2}\left[U_0 + U_n\right]$

$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[1+1+10n\right]$$

$$S_n = \frac{n+1}{2}\left[2+10n\right] = \frac{n+1}{2}\left[2(1+5n)\right]$$

وباختزال العدد 2 بسطا ومقاما نجد :

$$S_n = (n+1)\left[(1+5n)\right]$$

نجد بعد النشر:

$$S_n = n + 5n^2 + 1 + 5n$$
$$S_n = 5n^2 + 6n + 1$$

3- هل يوجد n بحيث : $S_n = 105$

لتكن المعادلة ذات المجهول الطبيعي n :

$$5n^2 + 6n + 1 = 105$$
$$5n^2 + 6n - 104 = 0$$

حساب المميز : $a = 5, b = 6, c = -104$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(5)(-104)$$
$$= 36 + (20)(104)$$
$$\Delta = 36 + 2080 = 216$$

إذن: $\sqrt{\Delta} = 46$

و منه للمعادلة حلين متمايزين :

$$n_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+46}{2\times5} = \frac{40}{10} = 4$$

$n_1 = 4 \ni N$

$$n_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-46}{2\times5} = \frac{-52}{10} \not\ni N$$

إذن العدد المطلوب هو $n = 4$

التمرين 13 :

هل (U_n) متتالية هندسية؟

1) $U_n = 3 \,.\, (2)^n$

- إيجاد الحد U_{n+1} :

لنا : $U_{n+1} = 3 \,.\, (2)^{n+1}$

و حسب خواص القوى:

$$U_{n+1} = 3 \,.\, (2)^n \,.\, (2) = (2)\,(3)\,(2)^n$$

$$U_{n+1} = 6\,(2)^n$$

إذن :

لدينا : $$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{6(2)^n}{3(2)^n} = \frac{6}{3} = 2$$

إذن (U_n) هي متتالية هندسية أساسها $q = 2$

2) $U_n = (-4)\,(3)^n$

إيجاد U_{n+1} : لنا:

$$U_{n+1} = (-4)\,(3)^{n+1}$$

و منه:

$$U_{n+1} = (-4)\,(3)^n(3) = (-4)\,(3)\,(3)^n$$

إذن:

$$U_{n+1} = (-12)\,(3)^n$$

لدينا : $$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(-12)(3)^n}{(-12)(3)^n} = \frac{-12}{-4} = 3$$

إذن (U_n) هي متتالية هندسية أساسها $q = 3$

3) $U_n = n^2$

إيجاد الحد U_{n+1}:

$$U_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

و منه: $$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

إذن (U_n) ليست متتالية هندسية

التمرين 14 :

1) $q = 2,\ U_0 = 3$

1- كتابة U_n بدلالة n :

لنا : $U_n = U_0.q^n$

و منه : $U_n = 3\ .(2)^n$

2- دراسة اتجاه تغير (U_n) :

لنا: $U_{n+1} - U_n = 3\ (2)^{n+1} - (3)\ (2)^n$

$= 3(2)^n\ (2) - (3)\ (2)^n$

$= 3\ .(2)^n\ [\ 2-1\ ] = 3.(2)^n\ (1)$

عامل مشترك

و بما أن : $3.(2)^n(1)$ هو عدد موجب عاما من أجل كل n طبيعي فان:

$U_{n+1} - U_n > 0$

إذن: (U_n) متزايدة تماما على N

$$3)\ q = -2, U_0 = \frac{1}{2}$$

- كتابة U_n بدلالة n :

لدينا :

$U_n = U_0.q^n$

ومنه :

$$\boxed{U_n = \left(\frac{1}{2}\right)(-2)^n}$$

دراسة اتجاه تغير (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{2}\right)(-2)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)(-2)^n$$

ومنه : $$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{2}\right)(-2)^n(-2) - \left(\frac{1}{2}\right)(-2)^n$$

ومنه : $$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{2}\right)(-2)^n(-2-1)$$

إذن : $$\boxed{U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{2}\right)(-2)^n}(-3)$$

نميز حالتين:

* إذا كان n زوجي فان $(-2)^n$ عدد موجب تماما و منه:

$$\left(\frac{1}{2}\right)(-2)^n(-3)\langle 0$$

إذن (U_n) متناقصة تماما

* إذا كان n فردي فان: $(-2)^n$ سالب تماما و منه:

$$\left(\frac{1}{2}\right)(-2)^n(-3)\rangle 0$$

أي أن (U_n) متزايدة تماما.

التمرين 15:

(U_n) متتالية هندسية معرفة على N^*

كتابة U_n (الحد العام) بدلالة n :

1) $q = 2$, $U_1 = -3$

لنا : $U_n = U_1 \cdot q^{n-1}$

إذن : $U_n = (-3)(2)^{n-1}$

2) $q = \left(-\frac{1}{2}\right), U_1 = 4$

لنا: $U_n = U_1 \cdot q^{n-1}$

إذن $U_n = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3) $q = -3$, $U_1 = +2$

لنا : $U_n = U_0 . q^{n-1}$

و منه : $U_n = (+2)(-3)^{n-1}$

التمرين16 :

1) حساب الأساس q :

لدينا : $U_4=12$, $U_2=3$ ومنه : $U_4=U_2\, q^{(4-2)}$

إذن : $12=3.q^2$ ومنه $q^2=\frac{12}{3}=4$

وبما أن q موجب تماما فإن : $q=2$

2) حساب الحد الأول U_0 :

لدينا : $U_n=U_0.q^n$ ومنه بتعويض $n=2$ نجد :

$U_2=U_0.q^2$ إذن: $U_0=\frac{U_2}{q^2}=\frac{3}{2^2}=\frac{3}{4}$

3)كتابة U_n بدلالة n :

لدينا : $U_n=U_0.q^n$

ومنه : $U_n=\left(\frac{3}{4}\right)(2)^n$

حساب المجموع S_n:

لدينا : $S_n=U_0+U_1+...+U_n$

ومنه: $S_n=U_0\left[\frac{q^{(n+1)}-1}{q-1}\right]$

$$S_n=\left(\frac{3}{4}\right)\left[\frac{2^{(n+1)}-1}{2-1}\right]$$

إذن: $S_n=\left(\frac{3}{4}\right)\left[2^{n+1}-1\right]$

إستنتاج S_6 :

لدينا : $S_6=\left(\frac{3}{4}\right)\left[2^{6+1}-1\right]$

$$S_6=\left(\frac{3}{4}\right)\left[2^{6+1}-1\right]=\left(\frac{3}{4}\right)\left[128-1\right]$$

إذن

$$S_6 = \left(\frac{381}{4}\right)$$

التمرين 18 :

(U_n) متتالية هندسية معرفة على أساسها q $(q>0)$ بحيث :

$U_0 = 1$

$U_0 + U_1 + U_2 = 13$

1-حساب الأساس q:

نكتب كل حد في المجموع بدلالة الأساس q و الحد الأول U_0 :

لدينا: $U_n = U_0 .q^n$

و منه: لما $n = 0$ فإن $U_0 = U_0 = 1$

لما $n = 1$ فإن $U_1 = U_0 .q = q$

لما $n = 2$ فإن $U_2 = U_0 . q^2 = 1.q^2 = q^2$

بالتعويض في عبارة المجموع نجد :

$1+q+q^2 = 13$

و منه: $q^2 + q +1 - 13 = 0$

إذن: $q^2 + q -12 = 0$

و هي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول q

حساب المميز Δ:

$a = 1, b = 1, c = -12$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-12)$

$\Delta = 1+48 = 49,$

إذن : $\sqrt{\Delta}=7$

ومنه للمعادلة حلين متمايزين :

$$q_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$q_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

بما أن الأساس موجب فإن : q=3

كتابة U_n بدلالة n :

$$U_n = U_0 .q^n$$

إذن : $U_n = 1. (3)^n$

و منه : $\boxed{U_n = 3^n}$

حساب المجموع S_n:

لدينا $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

ومنه : $S_n = U_0 \left[\frac{q^{(n+1)} - 1}{q - 1} \right]$

$$S_n = 1 \left[\frac{3^{(n+1)} - 1}{3 - 1} \right]$$

$$S_n = \left[\frac{3^{n+1} - 1}{2} \right]$$

التمرين 19 :

لدينا مبلغ المودع هو V_0 و منه :

$$V_0 = 11000 \text{ DA}$$

المبلغ المحصل عام 2001 و ليكن V_1 :

$$V_1 = V_0 + (0.06)V_0 = V_0 (1+0.06)$$

$$\boxed{V_1 = (11000)(1.06) = 11660 \text{ DA}}$$

المبلغ المحصل عام 2002 و ليكن V_2 :

$$V_2 = 11660 . (1.06) = V_1(1 + 0.06)$$

$$V_2 = (11660)(1.06) = 12359.6 \text{ DA}$$

المبلغ المحصل عام 2003 و ليكن V_3:

$$V_3 = V_2 + (0.06)V_2 = V_2 (1 + 0.06)$$

و منه: $V_3 = V_2 (1.06) = (12359.6) (1.06)$

إذن : $\boxed{V_3 = 13101.76 \text{ DA}}$

العلاقة بين V_{n+1} و V_n :

لدينا V_{n+1} : المبلغ المحصل بعد $(n+1)$ سنة

V_n : المبلغ المحصل بعد n سنة

و منه: $V_{n+1} = V_n + 0.06\, V_n$

إذن :

$$V_{n+1} = V_n\,(1+0.06)$$

أي : $V_{n+1} = V_n\,(1.06)$

و منه المتتالية (V_n) هي متتالية هندسية أساسها $q = 1.06$ و حدها الأول $V_0 = 11000$

كتابة V_n بدلالة n :

لنا : $V_n = V_0 \cdot q^n$

و منه: $\boxed{V_n = (11000)(1.06)^n}$

التمرين 20:

الإنتاج عام 2006 هو $V_0 = 3000$ فإن :

الإنتاج عام 2007 هو V_1:

لدينا : $V_1 = V_0 + (0.02)V_0$

$$V_1 = V_0\,(1 + 0.02) = V_0\,(1.02)$$

إذن : $\boxed{V_1 = 3000(1.02) = 3060}$

الإنتاج عام 2008 و هو V_2:

لدينا: $V_2 = V_1 + 0.02 \cdot V_1$

و منه: $V_2 = V_1\,(1 + 0.02)$

و منه: $V_2 = 3060 \cdot 1.02$

إذن: $\boxed{V_2 = 3121.2}$ طن

العلاقة بين V_{n+1} و V_n:

لدينا V_{n+1} : الإنتاج بعد $(n+1)$ سنة

V_n : الإنتاج بعد n سنة

و منه : $V_{n+1} = V_n + 0.02V_n$

إذن : $V_{n+1} = V_n(1 + 0.02)$

و منه : $V_{n+1} = V_n (1.02)$

نستنتج ان :

(V_n) هي متتالية هندسية أساسها $q = 1.02$ و حدها الأول هو

$V_0 = 3000$

كتابة V_n بدلالة n :

$V_n = V_0.q^n$

و منه : $V_n = 3000 (1.02)^n$

حساب المجموع S_n :

لدينا :

$$\boxed{S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n}$$

$$S_n = U_0 \left[\frac{q^{(n+1)} - 1}{q - 1} \right]$$

$$S_n = 300 \left[\frac{(1.02)^{(n+1)} - 1}{1.02 - 1} \right]$$

$$S_n = 300 \left[\frac{(1.02)^{(n+1)} - 1}{0.02} \right] = 300 \times \frac{100}{2} \left[(1.02)^{(n+1)} - 1 \right]$$

وبعد الإختزال نجد :

$$S_n = 300 \times 50 \left[(1.02)^{(n+1)} - 1 \right]$$

$$\boxed{S_n = 15000 \left[(1.02)^{(n+1)} - 1 \right]}$$

االتمرين 21 :

-1 حساب U_3،U_2،U_1

لدينا : $U_0 = 1$

$U_{n+1} = -3U_n + 2$

اذا وضعنا : $n = 0$ نحصل على :

$U_{0+1} = -3 + 2$

و منه $U_1 = -3U_0 + 2$

إذن : $U_1 = -3(1) + 2 = -3 + 2$

و منه : $U_1 = -1$

اذا وضعنا $n = 1$ نحصل على :

$U_{n+1} = -3U_n + 2$

و منه : $U_2 = -3U_1 + 2$

اذن : $U_2 = -3(-1) + 2 = 3 + 2$

و منه : $U_2 = 5$

إذا وضعنا $n = 2$ نحصل على :

$U_{2+1} = -3U_2 + 2$

و منه : $U_3 = -3U_2 + 2$

إذن :

$U_3 = -3(5) + 2 = -15 + 2$

و منه: $U_3 = -13$

-2 $V_n = U_n - \left(\frac{1}{2}\right)$

أ- حساب V_0، V_1، V_2

$$V_0 = U_0 - \left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$V_1 = U_1 - \left(\frac{1}{2}\right) = -1 - \frac{1}{2} = \frac{-2-1}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$V_2 = U_2 - \left(\frac{1}{2}\right) = 5 - \frac{1}{2} = \frac{10-1}{2} = \frac{9}{2}$$

ب- بما أن : a=-3 , b=2 فإن : $\alpha=\frac{b}{1-a}=\frac{2}{1+3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

فإن المتتالية (V_n) هي متتالية هندسية أساسها q = -3 و حدها الأول هو $V_0=\frac{1}{2}$

ج- كتابة V_n بدلالة n

لدينا $V_n = V_0 .q^n$

و منه

$$V_n=\frac{1}{2}(-3)^n$$

د- كتابة U_n بدلالة n

لنا : $V_n=U_n-\left(\frac{1}{2}\right)$ ومنه : $U_n=V_n+\left(\frac{1}{2}\right)$

إذن :

$$U_n=\frac{1}{2}(-3)^n+\frac{1}{2}$$

ه- حساب المجموع :

لدينا $S_n = V_0 + \ldots+V_n$

ومنه :

$$S_n=V_0\left[\frac{q^{(n+1)}-1}{q-1}\right]$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{(-3)^{(n+1)}-1}{-3-1}\right]$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{(-3)^{(n+1)}-1}{-4}\right]=\frac{1}{-8}\left[(-3)^{(n+1)}-1\right]$$

إذن : $S_n=\frac{1}{-8}\left[(-3)^{(n+1)}-1\right]$

و – المجموع S_n'

$S_n' = U_0 + \ldots + U_n$

لدينا :

$$S'_n = V_0\left[\frac{q^{(n+1)}-1}{q-1}\right] + \frac{1}{2}(n+1)$$

ومنه :

$$\boxed{S'_n = \frac{1}{-8}\left[(-3)^{(n+1)}-1\right] + \frac{1}{2}(n+1)}$$