1 - الاستدلال بالتراجع

الكفاءات المستهدفة :

- استعمال مبدأ الاستـدلال بالتراجـع لإثبات صحة خاصية من أجل كل عدد طبيعي n.
- التمييز بين متتالية و حدها العام
- التعرف على متتالية بالتراجع
- حساب الحدود الأولى لمتتالية معرفة بالتراجع
- تحديد اتجاه تغير متتالية حسابية أو هندسية
- استعمال المتتاليات الحسابية و الهندسية لحل مشكلات من الحياة اليومية.
- المتتاليات من الشكل :
- $U_{n+1} = a\,Un + b$ مع $a \neq 0$ وَ $b \neq 0$
- حساب الحد العام U_n
- حساب S_n مجموع n حداً متتابعة لهذه المتتالية
- تعيين اتجاه التغير.
- حل مشكلات تستعمل فيها متتاليات من الشكل: $U_{n+1} = a\,U_n + b$

تصميم الدرس

- **تعريف**
- **مبدأ الاستدلال بالتراجع**
- **تمارين حول الإستدلال بالتراجع**
- **حلول التمارين**

- تعريف :

الاستدلال بالتراجع هو نمط من أنماط البرهان يسمح بالبرهنة على صحة خاصية تتعلق بعدد طبيعي ويعتمد هذا الاستدلال على المبدأ التالي :

- مبدأ الاستدلال بالتراجع :

$P(n)$ خاصية تتعلق بالعدد الطبيعي n و n_0 عنصرا من N.

يمكننا التأكد من صحة $P(n)$ من أجل كل $n \geq n_0$ إذا تحققت الشرطان التاليان:

1- $P(n_0)$ صحيحة (الخاصية محققة من أجل الرتبة n_0)

2- من أجل كل $m \geq n_0$ نفرض أن $P(m)$ صحيحة (فرضية التراجع)

إذن $P(m+1)$ صحيحة.

و تكون عندئذ $P(n)$ صحيحة من أجل كل مرتبة n حيث $m \geq n_0$

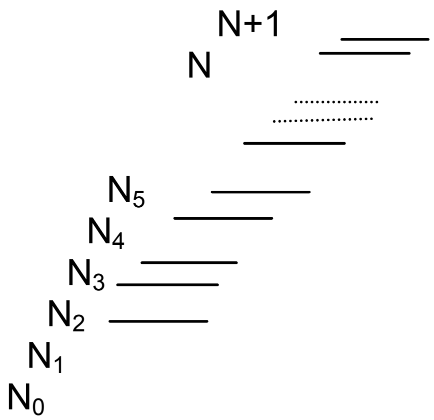
***ملاحظة$_1$:**

للتعبير على كون صواب $P(m)$ يؤدي إلى صـواب $P(m+1)$ نقـول أن الخاصـية P **وراثيـة)** héréditaire) من أجل مرتبة n_0 .

***ملاحظة$_2$:**

الشكل المقابل يمثل سلماً نريد الصعود فيه ابتداء من الدّرجة n_0 إلى الدرجة $n+1$.

يمكننا استعمال مبدأ الاستدلال بالتراجع و ذلك بالصعود أولا إلى الدرجة n_0 ثم إلى الدرجة n_1 التي تليها مباشرة و هكذا إلى أن نصل إلى الدرجة ذات المرتبة $(n+1)$ و منه صعودنا السلم كان بطريقة سليمة.



مثال1: برهن بالتراجع على صحة المساواة التالية و ذلك من

$+ 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

الجواب :

نعتبر الخاصية $P(n)$ التي تعبر عن المساواة

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$$

بما أن $n \in N^*$ إذن نختار $n_0 = 1$

نتحقق من صحة $P(n_0)$

نضع $E_1 = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$

وَ $E_2 = n(n+1)$

من أجل $n_0 = 1$ لدينا $E_1 = 2(1) = 2$

$E_2 = 1(1+1) = 2$ إذن $P(n_0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل المرتبة m حيث $m \geq n_0$ و نبرهن صحة $P(m+1)$

فرضية التراجع: $P(m)$ صحيحة أي

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2m = m(m+1)$$

نبرهن صحة $P(m+1)$ أي:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2m + 2(m+1) = (m+1)(m+2)$$

و منه $E_1 = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2m + 2(m+1)$

من صواب $P(m)$

$$E_1 = m(m+1) + 2(m+1)$$
$$= (m+1)(m+2)$$

إذن $E_1 = E_2$

و منه $P(m+1)$ صحيحة

و عليه من أجل كل n من N^* , $P(n)$ صحيحة.

مثال2 : برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n صحة الخاصية $P(n)$ المعرفة بالمساواة:

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)$$

الأجوبة :

بما أن $n \in N$ نأخذ $n_0 = 0$.

- نتحقق من صحة $P(n_0)$.

الطرف الأول من المساواة: $E_1 = 0^2 = 0$

الطرف الثاني من المساواة: $E_1 = \frac{2}{3}(0)(0+1)(2*0+1) = 0$

إذن $E_1 = E_2$ و عليه فإن $P(n_0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل المرتبة $m \geq n_0$ أي :

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2m)^2 = \frac{2}{3} m(m+1)(2m+1)$$

و نبرهن صحة $P(m+1)$ أي

$$0^2 + 2^2 + \ldots + (2m)^2 + \mathbf{[2(m+1)]^2} = \frac{2}{3} \mathbf{(m+1)(m+2)(2m+3)}$$

لدينا $E_1 = 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2m)^2 + [2(m+1)]^2$

من صواب $P(m)$

$$E_1 = \frac{2}{3} m(m+1)(2m+1) + 4(m+1)^2$$

$$= \frac{2}{3} (m+1)[m(2m+1)+6(m+1)]$$

و ذلك بتوحيد المقامات و إخراج العامل المشترك

إذن: $E_1 = \frac{2}{3}(m+1)[2m^2+7m+6)$

$$E_1 = \frac{2}{3}(m+1)(m+2)(2m+3)$$

إذن: $E_1 = E_2$

و منه $P(m+1)$ صحيحة ونستخلص أنه من أجل كل n من N فإن $P(n)$ صحيحة.

- تمارين حول الإستدلال بالتراجع :

♦التمرين 1 :

برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوما صحة المساواة :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \left(\frac{1}{6}\right) n(2n^2+3n+1)$$

♦التمرين 2 :

برهن من أجل كل n من N وبالتراجع صحة المساواة :

$$0^3 + 2^3 + 4^3 + \ldots + (2n)^3 = \left(\frac{1}{4}\right) n^2 (n+1)^2$$

♦التمرين 3 :

برهن بالتراجع من أجل كل n من N^* :

$$\frac{1}{(1\times2)}+\frac{1}{(2\times3)}+\frac{1}{(3\times4)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

حلول التمارين

• التمرين الأول :

نسمي p(n) الخاصية المتعلقة بالطبيعي n والمعرفة بالمساواة :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)$$

نسمي : $E_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2$

و

$$E_2 = \frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)$$

1) نتحقق من صحة $p(n_0)$ حيث $n_0 = 1$

$E_1 = 1^2 = 1$

$E_2 = (\frac{1}{6})(1)(2(1)^2 + 3(1) + 1) = (\frac{1}{6})(2 + 3 + 1)$

$E_2 = \frac{6}{6} = 1$ إذن $p(n_0)$ صحيحة.

2) نفرض أن p(n) صحيحة ونبرهن أن $p(n_0)$ صحيحة من أجل كل $n \geq n_0$

أي :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = (\frac{1}{6})n(2n^2 + 3n + 1)$$

ونبرهن أن :

$$1^2+\ldots+(n^2)+(n+1)^2=(\frac{1}{6})(n+1)[2(n+1)^2+3(n+1)+1]$$

$$1^2 + 2^2 + ..+ (n^2)+(n+1)^2 = (\frac{1}{6}) (n+1) [2n^2 + 7n + 6]$$

لدينا:

$$E_1=1^2+2^2+3^2+. . .+n^2 +(n+1)^2$$

ومنه :

$$E_1=(\frac{1}{6}) n(2n^2 + 3n + 1)+(n+1)^2$$

$$E_1 = \frac{1}{6} n(2n+1)(n+1)+(n+1)^2$$

$$E_1 = \frac{1}{6} (n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]$$

$$E_1 = \frac{1}{6} (n+1))[2n^2+7n+6]$$

لاحظ أن $E1= E2$ اذن $p(n+1)$ صحيحة ومنه من أجل كل n من N^* . $p(n)$ صحيحة.

- **التمرين الثاني :** يحل بنفس الطريقة

- **التمرين الثالث :**

$$\frac{1}{(1\times2)}+\frac{1}{(2\times3)}+\frac{1}{(3\times4)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

نضع $p(n)$ الخاصية التي تحقق

$$\frac{1}{(1\times2)}+\frac{1}{(2\times3)}+\frac{1}{(3\times4)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

نتحقق من صحة $p(n_0)$ حيث $n_0=1$

الطرف الأول:

$$E_1= \frac{1}{(1\times2)} = \frac{1}{2}$$

الطرف الثاني:

$$E_2=\frac{1}{(1+1)}=\frac{1}{2}$$

$P(n_0)$ صحيحة

نفرض صحة $p(n)$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ وذلك من اجل $n\geq n_0$

$$\frac{1}{(1\times2)}+\frac{1}{(2\times3)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

نبرهن أن :

$$\frac{1}{(1\times2)}+\frac{1}{(2\times3)}+\ldots.+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)}{(n+2)}$$

$$E_1=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$ وبعد توحيد المقامات

ومنه $$E_1=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$E_1=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1)}$$

بعد الإختزال $(n+1)$ بسطا ومقاما نجد :

$$E_1=\frac{n+1}{n+2}$$

اذن $E1 = E2$ ومنه $p(n+1)$ صحيحة

ومنه من أجل كل n من N^* فإن $p(n)$ محققة