المجال المفاهيمي الرابع: العمليات المالية طويلة الأجل

الوحدة (16): الدفعات الثابتة

ANNUITES CONSTANTES

الكفاءات المستهدفة:

ـ يقيم متتالية دفعات في تاريخ ما.

المدة اللازمة : 10 ساعات

المراجع: الكتب المدرسية المقررة .

مؤشرات التقويم الذاتي:

- يحدد القيمة المكتسبة لمتتالية دفعات ثابتة.
- يحدد القيمة الحالية لمتتالية دفعات ثابتة.
- يقيم متتالية دفعات ثابتة في تاريخ ما.

تصميم الدرس

1. تعريف الدفعة الثابتة
2. القيمة المكتسبة لمتتالية دفعات ثابتة
3. القيمة الحالية لمتتالية دفعات ثابتة
4. تقييم متتالية دفعات
5. أنشطة الإعلام الآلي و حلولها
6. أسئلة التقويم الذاتي
7. أجوبة التقويم الذاتي

1. تعريف الدفعة الثابتة:

الدفعات هي مبالغ تدفع على فترات زمنية ثابتة (متساوية) والفارق الزمني الذي يفصل بين تسديد دفعتين يسمى بالمدة، فقد تكون المدة سنوية، سداسية ثلاثية أو شهرية.

و الدفعات على عدة أنواع و هذا حسب الهدف الذي تدفع من أجله :

أ ـ فإذا كان الهدف منها هو تكوين رأس مال في نهاية مدة محددة فهي إذاً:

- دفعات عادية للاستثمار أو الرسملة (**Annuités de Capitalisation**) عندما تدفع الدفعات في نهاية كل مدة أي الدفعة الأولى تدفع في نهاية المدة الأولى و هكذا... . و من أمثلة هذه الدفعات أقساط التأمين على الحياة.
- دفعات التوظيف (**Annuités de placement**) عندما تدفع الدفعات في بداية كل مدة أي الدفعة الأولى تدفع عند توقيع العقد.

ب ـ أما إذا كان الهدف منها تسديد دين (قرض مثلاً)، فهي تدعى بدفعات السداد (**Annuités de Remboursement**) أو بدفعات الاستهلاك (**Annuités d'amortissement**)، وعادة ما تدفع في نهاية كل مدة.

2. القيمة المكتسبة لمتتالية دفعات ثابتة

1.2. الصيغة العامة للقيمة المكتسبة (الجملة)

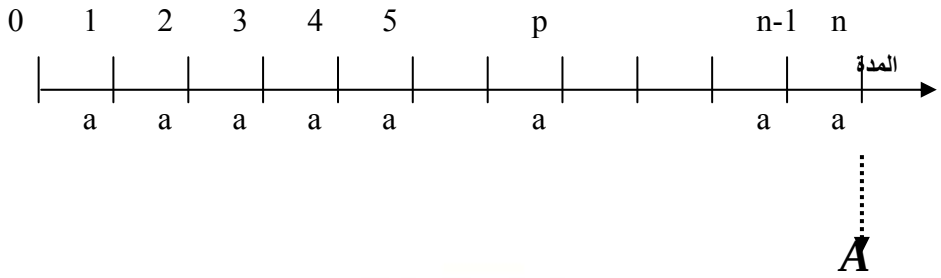
نعتبر أن الدفعة الأخيرة تدفع في نهاية الوحدة الزمنية الأخيرة أي دفعات نهاية المدة.

نرمز لـ:

a : قيمة الدفعة الثابتة n : عدد الدفعات

i : معدل فائدة 1^{DA} (معدل الفائدة المركبة)

A : القيمة المكتسبة لمتتالية الدفعات في الزمن (n)، عند تسديد آخر دفعة.



الجملة A تساوي مجموع الجمل لكل دفعة من الدفعات أي :

الدفعات	مدة التوظيف	القيمة المكتسبة
1	$(n-1)$	$a(1+i)^{n-1}$
2	$(n-2)$	$a(1+i)^{n-2}$
3	$(n-3)$	$a(1+i)^{n-3}$
4	$(n-4)$	$a(1+i)^{n-4}$
5	$(n-5)$	$a(1+i)^{n-5}$
.....		
p	$(n-p)$	$a(1+i)^{n-p}$
.....		
$n-1$	1	$a(1+i)$
n	0	a

يمكن أن نكتب مجموع الجمل على النحو التالي :

$$A = a + a(1+i) + ... + a(1+i)^{n-3} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

نلاحظ أن مجموع الجمل تشكل متتالية هندسية حدها الأول (a) و أساسها $(1+i)$ و حدها الأخير $a(1+i)^{n-1}$.

و حيث أن مجموع حدود متتالية هندسية هو حسب القانون التالي:

$$S = a \times \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{أو} \quad S = \frac{d.q - a}{q - 1},$$

حيث **(q)** هو الأساس و **(d)** هو الحد الأخير و **(a)** الحد الأول و **(n)** عدد الحدود.

و منه:

$$A = \frac{a(1+i)^{n-1}(1+i)-a}{(1+i)-1}$$

$$\boxed{A = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

المقدار $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ يعبر عن جملة n دفعة لمتتالية دفعات ذات 1 DA لكل دفعة مسددة في نهاية المدة. و نستخرج قيمته إما بالحساب العـادي و الاستعانة بالآلة الحاسبية العلمية أو باستخدام الجداول المالية.

2.2. استعمال الصيغة العامة للقيمة المكتسبة

أ ـ حساب القيمة المكتسبة (الجملة)

أ.1 ـ جملة دفعات نهاية المدة :

تطبيق :

أحسب جملة 10 دفعات عند تسديد آخر دفعة، قيمة كل دفعة 10.000 DA بمعدل 6% سنوياً.

الحل :

$$A = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

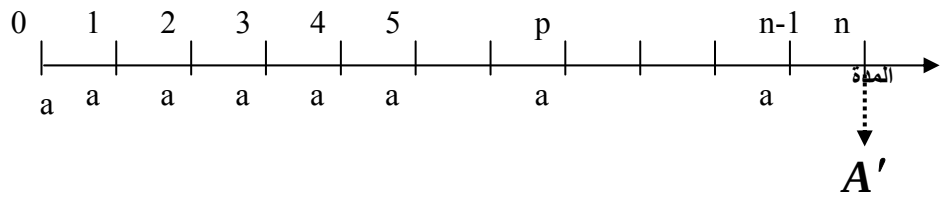
$$A = 10.000 \times \frac{(1,06)^{10} - 1}{0,06}$$

$$A = 10.000 \times 13,180795$$

$$A = 131.807,95^{DA}$$

أ.2 ـ استنتاج الصيغة العامة لجملة دفعات بداية المدة :

في هذه الحالة تدفع الدفعة الأخيرة في بداية الوحدة الزمنية الأخيرة أي أن الدفعات تدفع في بداية كـل مدة أو كل فترة.



الجمل المتحصل عليها في نهاية كل فترة أي عند المدة n هي كما يلي :

الدفعات	مدة التوظيف	القيمة المكتسبة
1	(n)	$a(1+i)^n$
2	$(n-1)$	$a(1+i)^{n-1}$
3	$(n-2)$	$a(1+i)^{n-2}$
4	$(n-3)$	$a(1+i)^{n-3}$
.....		
$n-1$	2	$a(1+i)^2$
n	1	$a(1+i)$

لتكن A' الجملة المحصل عليها بعد جمع جمل الدفعات بعد المدة n فنحصل على :

$$A' = a(1+i) + a(1+i)^2 + ... + a(1+i)^{n-3} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

نلاحظ أن مجموع الجمل تشكل متتالية هندسية حدها الأول $a(1+i)$ وأساسها $(1+i)$ و حدها الأخير $a(1+i)^{n-1}$، و حسب قانون مجموع المتتالية الهندسية فإن:

$$A' = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

أو نستخدم الصيغة التالية بعد نشر المقدار $(1+i)$:

$$A' = a\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1\right]$$

نلاحظ من العلاقة السابقة أن جملة متتالية دفعات بداية المدة ما هي إلا جملة متتالية دفعات نهاية المدة مضروبة في المقدار $(1+i)$

أي : $A' = A(1+i)$

تطبيق :

وظف شخص في بداية كل سنة مبلغ 10.000 DA لمدة 10 سنوات، حيث الفوائد تحسب في نهاية السنة. ما هو مقدار المبلغ الذي تحصل عليه إذا كان المعدل 7% سنوياً.

الحل:

الجملة التي حصل عليها الشخص في نهاية الـ 10 سنوات هي:

$$A' = a(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$A' = 10.000(1,07)\frac{(1,07)^{10} - 1}{0,07}$$

$$A' = 10.000 \times 1,07 \times 13,816447$$

$$A' = 147.835,98^{DA}$$

ب ـ حساب قيمة الدفعة (a)

لدينا:

$$A = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$a = A \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

تطبيق :

جملة 14 دفعة ثابتة دفعت في نهاية المدة هي 2.421.492 DA و المعدل السنوي هو 8%. ما هي قيمة الدفعة ؟.

الحل :

$$2.421.492 = a \times \frac{(1,08)^{14} - 1}{0,08}$$

$$a = 2.421.492 \times \frac{0,08}{(1,08)^{14} - 1}$$

$$a = 2.421.492 \times 0,041297$$

$$a = 100.000^{DA}$$

جـ ـ حساب عدد الدفعات (n)

من أجل حساب عدد الدفعات نستخدم خواص المعادلات اللوغاريتمية كما يلي:

$$A = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A}{a}$$

$$(1+i)^n - 1 = \frac{i.A}{a}$$

$$(1+i)^n = \frac{i.A}{a} + 1$$

و بما أن المقدار $\frac{i.A}{a} + 1$ يكون معلوماً و ليكن (b) فإن :

$$(1+i)^n = b$$

$$\log(1+i)^n = \log(b)$$

$$n.\log(1+i) = \log(b)$$

$$n = \frac{\log(b)}{\log(1+i)}$$

تطبيق :

كم دفعة ذات ^{DA} 20.000 للدفعة يجب أن تدفع في نهاية كل سنة للحصول علـى جملـة قـدرها ^{DA} 300.516,10 إذا كان المعدل السنوي المطبق 4%.

الحل:

$$300.516,10 = 20.000 \times \frac{(1,04)^n - 1}{0,04}$$

$$\frac{(1,04)^n - 1}{0,04} = \frac{300.516,10}{20.000}$$

$$(1,04)^n - 1 = \frac{0,04 \times 300.516,10}{20.000}$$

$$(1+i)^n = \frac{0,04 \times 300.516,10}{20.000} + 1$$

$$(1,04)^n = 0,6010322$$

$$\log(1,04)^n = \log(0,6010322)$$

$$n.\log(1,04) = \log(0,6010322)$$

$$n = \frac{\log(0,6010322)}{\log(1,04)}$$

$n = 12$ أي 12 دفعة

د ـ حساب المعدل (i)

لدينا:

$$A = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A}{a}$$

بما أن العناصر n, a, A معلومة فإن العنصر الذي سنبحث عنه هو المعدل (i) و من حل هذه المعادلة يعتمد على طريقتين:

الطريقة (1) : طريقة التجربة أو التكرار(Itération) :

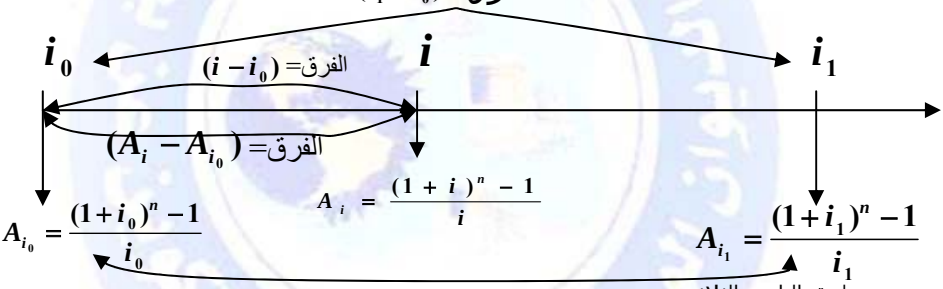
أي حساب المقدار $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ بإعطاء قيم لـ (i) حتى نحصل على قيمة مساوية لقيمة المقدار $(\frac{A}{a})$ و تكون بذلك القيمة المعطاة لـ (i) هي المعدل. هذه الطريقة مستخدمة كثيرا في برامج الحاسوب مثل المجدول Excel الذي يقوم بحساب المعدل بتكرار التجربة.

الطريقة الثانية : طريقة الاستكمال الخطي(Interpolation linière)

بمعرفة معدلين يكون المعدل (i) محصوراً بينهما، يمكن حساب المعدل باستخدام باستكمال للأجزاء المتناسبة كما يوضحها الشكل التالي :

$$i_0 < i < i_1$$

$(i_1 - i_0)$=الفرق



$(A_{i_1} - A_{i_0})$=الفرق

بتطبيق القاعدة الثلاثية :

$$(A_{i_1} - A_{i_0}) \rightarrow (i_1 - i_0)$$
$$(A_i - A_{i_0}) \rightarrow (i - i_0)$$
$$(i - i_0) = \frac{(A_i - A_{i_0}) \times (i_1 - i_0)}{(A_{i_1} - A_{i_0})}$$

$$\boxed{i = i_0 + \frac{(A_i - A_{i_0}) \times (i_1 - i_0)}{(A_{i_1} - A_{i_0})}}$$

تطبيق:

جملة 8 دفعات ثابتة نهاية المدة تقدر بـ 16.740^{DA} و قيمة الدفعة 1.200^{DA} . ما هو المعدل المطبق مع العلم أنه محصور بين معدل 15% و 16%.

الحل

من المعطيات : $15\% < i < 16\%$

$$16.740 = 1.200 \times \frac{(1+i)^8 - 1}{i}$$

$$\frac{(1+i)^8 - 1}{i} = \frac{16.740}{1.200}$$

$$\frac{(1+i)^8 - 1}{i} = 13,95$$

إذن لدينا : $A_i = \frac{(1+i)^8 - 1}{i} = 13,95$

نحسب الجملة لمتتالية دفعات قيمة كل دفعة 1 DA بالمعدلين 15% و16%.

$$A_{i_{15}} = \frac{(1,15)^8 - 1}{0,15} = 13,726819$$

$$A_{i_{16}} = \frac{(1,16)^8 - 1}{0,16} = 14,240093$$

نطبق علاقة الاستكمال الخطي لحساب المعدل:

$$i = i_0 + \frac{(A_i - A_{i_0}) \times (i_1 - i_0)}{(A_{i_1} - A_{i_0})}$$

$$i = 0,15 + \frac{(13,95 - 13,726819)(0,16 - 0,15)}{(14,240093 - 13,726819)}$$

$$i = 0,15 + 0,00438$$

$$i = 0,15438$$

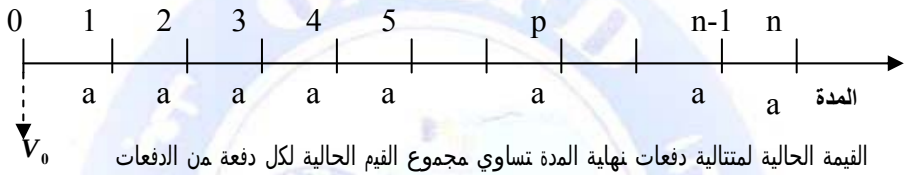
$$i = 15,438\%$$

3. القيمة الحالية لمتتالية دفعات ثابتة

1.3. الصيغة العامة للقيمة الحالية

القيمة الحالية لمتتالية دفعات نهاية المدة تعني العودة بالدفعات إلى تاريخ توقيع العقد (التاريخ صفر) أي فترة قبل دفع الدفعة الأولى.

و نرمز إلى القيمة الحالية في التاريخ صفر بالرمز (V_0)



القيمة الحالية لمتتالية دفعات نهاية المدة تساوي مجموع القيم الحالية لكل دفعة من الدفعات

الدفعة	القيمة الحالية
1	$a(1+i)^{-1}$
2	$a(1+i)^{-2}$
3	$a(1+i)^{-3}$
.....	.....
$n-1$	$a(1+i)^{-(n-1)}$
n	$a(1+i)^{-n}$

و منه نكتب :

$$V_0 = a(1+i)^{-n} + a(1+i)^{-(n-1)} + ... + a(1+i)^{-3} + ... + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-1}$$

نلاحظ أن القيم الحالية للدفعات تشكل متتالية هندسية حدها الأول $a(1+i)^{-n}$ و حدها الأخير $a(1+i)^{-1}$ و أساسها $(1+i)$ و حسب قانون مجموع متتالية هندسية فإن :

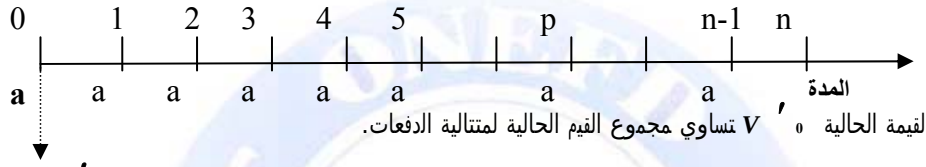
$$V_0 = \frac{a(1+i)^{-1}(1+i) - a(1+i)^{-n}}{(1+i)-1}$$

و بما أن : $(1+i)^{-1}(1+i) = 1$

فإن :

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

■ **استنتاج صيغة القيمة الحالية في حالة دفعات بداية المدة**



القيمة الحالية V'_0 تساوي مجموع القيم الحالية لمتتالية الدفعات.

$$V'_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + \ldots + a(1+i)^{-(n-1)}$$

نلاحظ أن V'_0 تشكل متتالية هندسية حدها الأول a و أساسها $(1+i)^{-1}$ و حسب قانون مجموع المتتالية الهندسية التالي :

$$S = a \times \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

حيث (a) هو الحد الأول (q) هو الأساس و (n) عدد الحدود فإن:

$$V'_0 = a \times \frac{((1+i)^{-1})^n - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$$

بعد تبسيط العلاقة نحصل على:

$$V'_0 = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

أي أن القيمة الحالية لدفعات بداية المدة تساوي :

$$V'_0 = V_0(1+i)$$

2.3. استعمال الصيغة العامة للقيمة الحالية

أ ـ حساب القيمة الحالية

تطبيق(1):

ما هي القيمة الحالية لمجموع 8 دفعات ثابتة في نهاية المدة حيث كـل دفعـة تسـاوي 120.000^{DA} بمعدل 7% سنوياً.

الحل :

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 120.000 \times \frac{1-(1,07)^{-8}}{0,08}$$

$$V_0 = 120.000 \times 5,971298$$

$$V_0 = 716.555,8^{DA}$$

تطبيق (2) :

ما هي القيمة الحالية لـ 6 دفعات ثابتة في بداية المدة قيمة كل دفعة 50.000^{DA} بمعدل 4% سنوياً.

الحل :

$$V'_0 = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V'_0 = 50.000(1,04)\frac{1-(1,04)^{-6}}{0,04}$$

$$V'_0 = 50.000 \times 1,04 \times 5,242136$$

$$V'_0 = 272.591,10^{DA}$$

ب ـ حساب الدفعة (a)

لدينا:

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boxed{a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}$$

تطبيق:

متتالية 8 دفعات مقيمة سنة قبل الدفعة الأولى بمعدل 3,5% هي $1.374.791^{DA}$. ما هي قيمة الدفعة الثابتة ؟

الحل:

$$a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = 1.374.791 \times \frac{0;035}{1-(1,035)^{-8}}$$

$$a = 1.374.791 \times 0,1454766 \simeq 200.000^{DA}$$

جـ ـ حساب عدد الدفعات (n)

من أجل حساب عدد الدفعات نستخدم خواص المعادلات اللوغاريتمية كما يلي:

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{V_0}{a}$$

$$1-(1+i)^{-n} = \frac{i \times V_0}{a}$$

$$-(1+i)^{-n} = \frac{i \times V_0}{a} - 1$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{i \times V_0}{a}$$

المقدار $1 - \frac{i \times V_0}{a}$ يمكن حسابه و ليكن (b)

$$(1+i)^{-n} = b$$

$$\log(1+i)^{-n} = \log(b)$$

$$-n\log(1+i) = \log(b)$$

$$-n = \frac{\log(b)}{\log(1+i)}$$

$$n = -\frac{\log(b)}{\log(1+i)}$$

تطبيق:

القيمة الحالية لمتتالية دفعات نهاية المدة هي 200.000 DA و قيمة كل دفعة 20.028,80 DA .

أحسب عدد الدفعات علماً أن المعدل السنوي المطبق هو 4%.

الحل:

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$200.000 = 20.028,8 \times \frac{1-(1,04)^{-n}}{0,04}$$

$$1-(1,04)^{-n} = \frac{0,04 \times 200.000}{20.028,8}$$

$$-(1,04)^{-n} = \frac{0,04 \times 200.000}{20.028,8} - 1$$

$$(1,04)^{-n} = 1 - \frac{0,04 \times 200.000}{20.028,8}$$

$$(1,04)^{-n} = 0,600575$$

$$\log(1,04)^{-n} = \log(0,600575)$$

$$-n \log(1,04) = \log(0,600575)$$

$$-n = \frac{\log(0,600575)}{\log(1,04)}$$

$$n = -\frac{\log(0,600575)}{\log(1,04)}$$

$$n = 13$$

د ـ حساب المعدل (i):

يتم اللجوء إلى طريقة التجريب من أجل حصر المعدل بين معدلين متقاربين أولاً ثـم تحديـده ثانيـاً باستخدام طريقة الاستكمال الخطي للأجزاء المتناسبة.

تطبيق :

قيمة محل تجاري نقداً ^{DA} 1.880.000 و هي تمثل القيمة الحالية لمتتالية 10 دفعات نهاية المدة قيمـة كل دفعة ^{DA} 240.000 .

ما هو المعدل المطبق ؟.

الحل :

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$1.880.000 = 240.000 \times \frac{1-(1+i)^{-10}}{i}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-10}}{i} = \frac{1.880.000}{240.000}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-10}}{i} = 7,833333$$

بعد تجربة عدة معدلات نجد أن المعدل (i) محصوراً بين المعدلين 4,5% و 4,75%.

	الفوارق		
من اجل معدل 4,75%	7,816347	0,079385	0,096371
من أجل معدل (i)	7,833333		
من أجل معدل4,5%	7,912718		

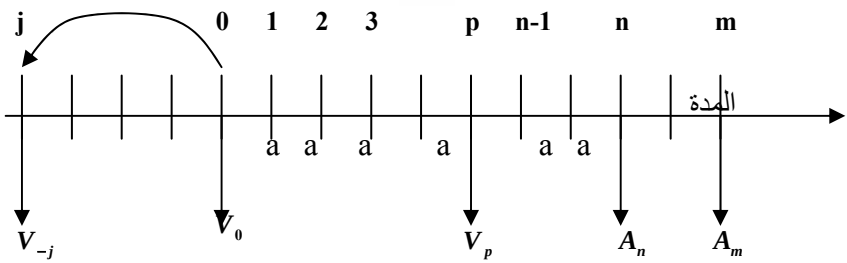
بتطبيق القاعدة الثلاثية نجد:

$$(0,0475 - 0,045) \rightarrow 0,096371$$
$$(i - 0,045) \rightarrow 0,079385$$
$$i - 0,045 = \frac{0,079385 \times (0,0475 - 0,045)}{0,096371}$$
$$i = 0,045 + \frac{0,079385 \times 0,0025}{0,096371}$$
$$i = 0,045 + 0,00205$$
$$i = 0,04705$$
$$i = 4,705\%$$

ملاحظة:

بالنسبة لدفعات بداية المدة فإن حساب مختلف العناصر (i, n, a, V_0') يتم باستخدام صيغة القيمة الحالية لمتتالية دفعات بداية المدة (V_0') بنفس الكيفية السابقة.

4. تقييم متتالية دفعات



عند دراستنا لدفعات نهاية المدة قيمنا هذه الأخيرة في الزمن (0) و الزمن (n) بحيث حصلنا على القيمة الحالية V_0 و القيمة المكتسبة A_n كما يلي:

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \text{و} \quad A_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

و نفس الشيء فيما يتعلق بدفعات بداية المدة.

و بتطبيق مبدأ التكافؤ يمكن أن نقيم متتالية دفعات في أي تاريخ كان. وسنقتصر في التقييم على دفعات نهاية المدة مع الإشارة إلى أن دفعات بداية المدة تعالج بنفس الكيفية.

1.4. التقييم في الزمن (j) حيث $(j<0)$

نضع V_{-j} قيمة متتالية الدفعات في الزمن $\mathbf{j}$.

يمكن تحديد قيمة V_{-j} كما يلي:

أ ـ انطلاقاً من صيغة القيمة الحالية:

$$V_{-j} = V_0(1+i)^{-j}$$

$$V_{-j} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-j}$$

ب ـ انطلاقاً من صيغة القيمة المكتسبة:

$$V_{-j} = A_n(1+i)^{-(n+j)}$$

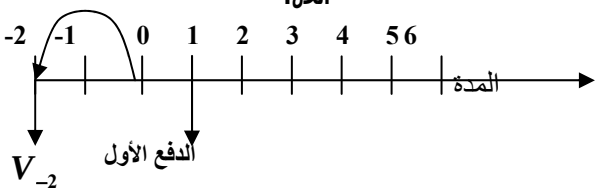
$$V_{-j} = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-(n+j)}$$

تطبيق :

قامت المؤسسة (س) بشراء مخزن تسدد ثمنه بواسطة 6 دفعات ثابتة قيمة الدفعة 15.000 DA و الدفعة الأول تستحق سنة بعد استلام المخزن.

ما هي قيمة الدفعات 3 سنوات قبل الدفع الأول علماً أن المعدل هو 7% ؟

الحل:



نلاحظ أن المدة الفاصلة بين تاريخ استلام المخزن (الزمن صفر) و 3 سنوات قبـل الـدفع الأول هي سنتين.

$$V_j = V_0(1+i)^{-j}$$

$$V_{-2} = 15.000\,\frac{1-(1,07)^{-6}}{0,07}(1,07)^{-2}$$

$$V_{-2} = 15.000 \times 4,766539 \times 0,873438$$

$$V_{-2} = 62.449,14^{DA}$$

نفس النتيجة نحصل عليها بتطبيق العلاقة :

$$V_{-j} = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-(n+j)}$$

$$V_{-2} = 15.000\,\frac{(1,07)^6 - 1}{0,07}(1,07)^{-(6+2)}$$

$$V_{-2} = 15.000\,\frac{(1,07)^6 - 1}{0,07}(1,07)^{-8}$$

$$V_{-2} = 15.000 \times 7,15329 \times 0,582009$$

$$V_{-2} = 62.449,14^{DA}$$

2.4. التقييم في الزمن (p) حيث $(0 < p < n)$

نضع V_p قيمة متتالية الدفعات في الزمن p.

يمكن تحديد قيمة V_p كما يلي:

أ ـ انطلاقاً من صيغة القيمة الحالية:

$$V_p = V_0 (1+i)^p$$

$$V_p = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^p$$

ب ـ انطلاقاً من صيغة القيمة المكتسبة:

$$V_p = A_n (1+i)^{-(n-p)}$$

$$V_p = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-(n-p)}$$

جـ ـ يمكن الحصول على قيمة V_p عن طريق جمع القيمة المكتسبة للدفعات المسددة لغاية الـ زمن (p) و القيمة الحالية للدفعات المتبقية بعد الزمن (p) كما يلي :

$$V_p = a \frac{(1+i)^p - 1}{i} + a \frac{1-(1+i)^{-(n-p)}}{i}$$

تطبيق:

ترغب إحدى المؤسسات في شراء تجهيزات وقد اقترح عليها البائع طريقتين للتسديد.

ـ الطريقة (1): تسديد 12 دفعات قيمة الدفعة 300.000 DA الأولى تدفع سنة بعد تاريخ الشراء،

ـ الطريقة (2) : تسديد مبلغاً وحيداً في نهاية السنة 4 من تاريخ الشراء.

إذا أخذنا بعين الاعتبار الفوائد المركبة بمعدل 4% سنوياً ما هي قيمة الدفع الوحيد؟

الحل :

ـ حساب قيمة الدفع الوحيد باستخدام صيغة القيمة الحالية:

$$V_4 = V_0 (1+i)^p$$

$$V_4 = 300.000 \frac{1-(1,04)^{-12}}{0,04}(1,04)^4$$

$$V_4 = 300.000 \times 9,385074 \times 1,169859$$

$$V_4 = 3.293.762,4^{DA}$$

ـ نفس النتيجة باستخدام صيغة الجملة:

$$V_p = A_n (1+i)^{-(n-p)}$$

$$V_4 = 300.000 \frac{(1,04)^{12}-1}{0,04}(1,04)^{-(12-4)}$$

$$V_4 = 300.000 \frac{(1,04)^{12}-1}{0,04}(1,04)^{-8}$$

$$V_4 = 300.000 \times 15,025805 \times 0,7306902$$

$$V_4 = 3.293.762,4$$

ـ يمكن أن نحصل على نفس النتيجة إذا جمعنا القيمة المكتسبة للدفعات المسددة لغاية السنة 4 و القيمة الحالية للدفعات المتبقية بعد السنة4 كما يلي:

$$V_4 = 300.000 \frac{(1,04)^{4}-1}{0,04} + 300.000 \frac{1-(1,04)^{-(12-4)}}{0,04}$$

$$V_4 = 300.000 \frac{(1,04)^{4}-1}{0,04} + 300.000 \frac{1-(1,04)^{-8}}{0,04}$$

$$V_4 = (300.000 \times 4,246464) + (300.000 \times 6,732744)$$

$$V_4 = 3.293.762,4$$

3.4. التقييم في الزمن (m) حيث $(m > n)$

نضع A_m قيمة متتالية الدفعات في الزمن m.

يمكن تحديد قيمة A_m كما يلي :

أ ـ انطلاقاً من صيغة القيمة الحالية :

$$A_m = V_0 (1+i)^m$$

$$A_m = a \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^m$$

ب ـ انطلاقاً من صيغة القيمة المكتسبة :

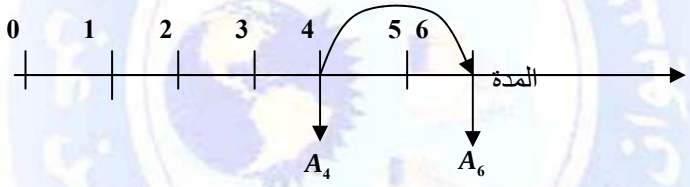
$$A_m = A_n (1+i)^{(m-n)}$$

$$A_m = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)^{(m-n)}$$

تطبيق:

لتسديد ثمن تجهيزات كان على المشتري أن يدفع في نهاية كل سنة دفعة تقدر بـ 300.000 DA لمدة 4 سنوات. غير أنه اقترح على البائع تسديد ثمن التجهيزات بدفع وحيد في نهاية السنة السادسة. بمعدل سنوي 10% ما هو مقدار الدفع الوحيد ؟

الحل:



ـ انطلاقاً من صيغة القيمة الحالية:

$$A_6 = V_0 (1+i)^m$$

$$A_6 = 300.000 \frac{1-(1,1)^{-4}}{0,1} (1,1)^6$$

$$A_6 = 300.000 \times 3,169865 \times 1,771561$$

$$A_6 = 1.684.683^{DA}$$

ـ انطلاقاً من صيغة القيمة المكتسبة:

$$A_m = A_n (1+i)^{(m-n)}$$

$$A_6 = 300.000 \times \frac{(1,1)^4 - 1}{0,1} (1,1)^{(6-2)}$$

$$A_6 = 300.000 \times \frac{(1,1)^4 - 1}{0,1} (1,1)^2$$

$$A_6 = 300.000 \times 4,641 \times 1,21$$

$$A_6 = 1.684.683$$

5. أنشطة الإعلام الآلي

يحتوي المجدول Excel على صيغ لدوال مالية و منها حساب القيمة الحالية **(VA)** و القيمة المكتسبة **(VC)** لمتتالية دفعات السداد.

العمل المطلوب:

أحسب للجدول التالي كل من القيمة الحالية و القيمة المكتسبة باستخدام الصيغ المالية للمجدول Excel.

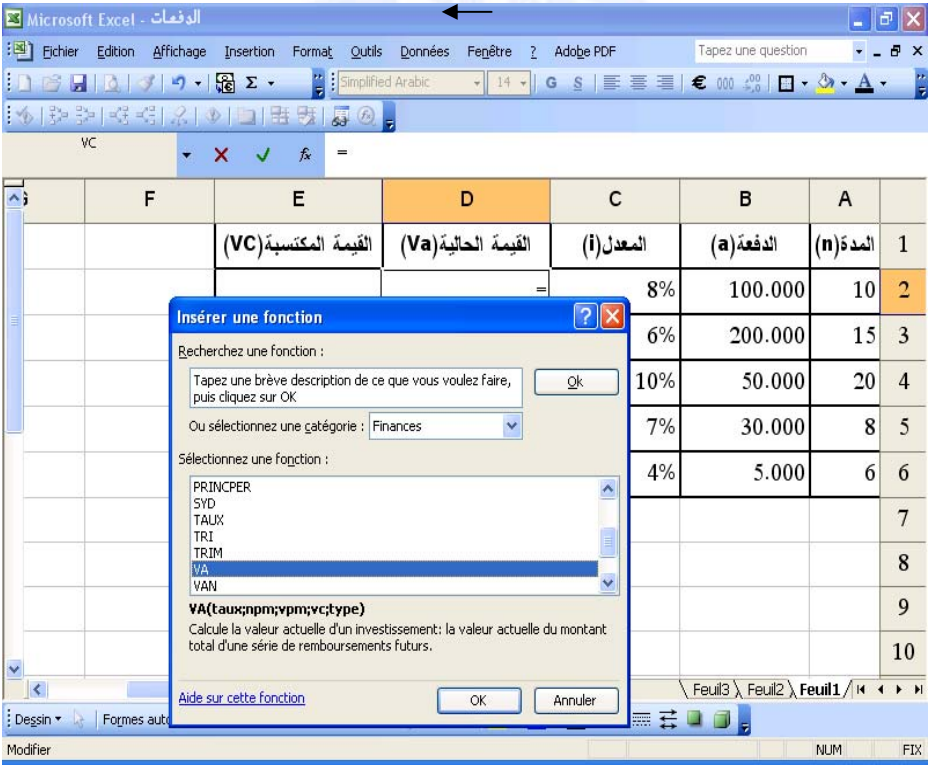
عدد الدفعات (n)	الدفعة (a)	المعدل (i)	القيمة الحالية (VA)	القيمة المكتسبة (VC)
10	100.000	8%		
15	200.000	6%		
20	50.000	10%		
8	30.000	7%		
6	5.000	4%		

الحلول المقترحة لأنشطة الإعلام الآلي

خطوات الحل :

1. إعادة رسم الجدول السابق على ورقة المصنف.
2. كتابة صيغة حساب القيمة الحالية(VA) في الخلية **(D2)** و نسخها على بقية الخلايا كما يلي:

أ ـ من شريط القوائم اختر قائمة إدراج (Insertion) ثم دالة (fonction)، ثم اختر من النافـذة التـي تظهر نوع الدوال مالية، و من الدوال المالية اختر الدالة (VA) كما هو مبين في الصورة التالية:



ب ـ في النافذ التي تظهر يطلب منك إدخال البيانات في المربعات التي تعبر عن مختلـف العناصـر التي يتم بها حساب القيمة الحالية و هي كالتالي:

Taux المعدل

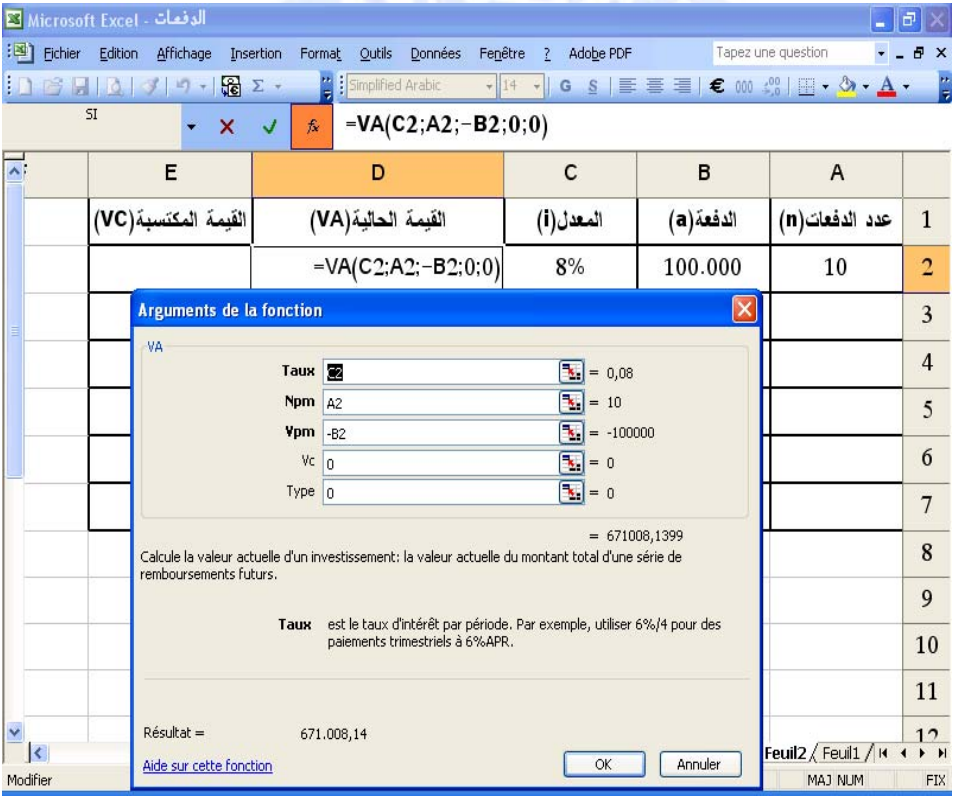
Npm عدد الدفعات (n)

Vpm مبلغ الدفعة (a) و تسبقها دوماً الإشارة السالبة (-)

VC القيمة المكتسبة و نضعها تساوي الصفر

Type نضع القيمة (0) لدفعات نهاية المدة و القيمة (1) لدفعات بداية المدة

إدخال البيانات يكون كما هو مبين في الصورة التالية:



جـ ـ بعد كتابة صيغة (VA) في الخلية (D2) يتم نسخها إلى بقيمة الخلايا (D3 إلى D6).

2. كتابة صيغة حساب القيمة المكتسبة في الخلية **(E2)** و نسخها على بقية الخلايا مع إتباع نفس الخطوات السابقة مع التنبيه إلى اختيار الدالة المالية (VC) و جعل قيمة (Va) معدومة في نافذة إدخال البيانات.

3. الحل النهائي المقترح يظهر كما يلي:

6. أسئلة التقويم الذاتي

التمرين(1):

رأس مال بـ DA 1.000.000 يسدد بـواسطة 10 دفعة ثابتة ،تدفع الأولى سنة بعد تاريخ التعاقد. إذا كان معدل الفائدة المركبة 6% سنوياً.

العمل المطلوب :

أ ـ أحسب مبلغ الدفعة الثابتة.

ب ـ بعد تسديد الدفعة 6 وافق المدين على مضاعفة مبلغ الدفعة ما دامت الفوائد قد انخفضت إلـى 4,5 % سنوياً. أحسب المدة اللازمة للتخلص من بقية الدين.(بالتقريب بالزيادة).

التمرين(2):

يرغب شخص في الحصول على تجهيزات بـ (X DA) ، وله أن يختار مـن بـين الحلـول التاليـة المقترحة للتسديد :

1 - تسديد 3 دفعات قيمة كل دفعة DA 3.603 تدفع خلال 1، 2، 3 سنوات.

ـ بفائدة مركبة 4% أحسب قيمة التجهيزات . (تقرب إلى الألف الأقرب).

2 - تسديد عند تاريخ الشراء مبلغ DA 5.800 و هذا المبلغ يمثل 58% من قيمة التجهيزات و البـاقي يسدد بعد 3 سنوات بمبلغ DA 5002,2672.

ـ ما هو معدل الفائدة المركبة المطبق.

3 - التسديد بواسطة 6 سداسيات مبلغ DA 1.815,50 للسداسي، السداسية الأولى تدفع بعد 6 أشهر من تاريخ الشراء.

ـ بمعدل فائدة 8% سنوياً ما هي قيمة السداسيات في نهاية المدة.

التمرين(3):

قام شخص بفتح حساب دفتر توفير لولديه لدى الصندوق الوطني للتوفير و الاحتياط عندما كان عمر الولد الأول 6 سنوات و عمر الولد الثاني 16 سنة، حيث وضع في حساب الأول $\frac{1}{3}$ المبلغ المودع في حساب الثاني وقيمة المبلغين معاً 320.000^{DA} .

استمر هذا الشخص في إيداع نفس المبلغ المودع في حساب كل ولد من ولديه في بداية كل سنة حتى بلغ كل واحد منهما سن 25 سنة.

العمل المطلوب:

إذا كان معدل الفائدة المركبة 7% سنويا فما هو رأس المال الذي تحصل عليه كل ولد عند بلوغه سن 25 سنة.

التمرين(4):

اقترضت مؤسسة $1.000.000^{DA}$ بتاريخ 2000/01/01. و اقترح عليها البنك ثلاثة طرق للتسديد :

ـ الطريقة (1):

تسديد دفعة وحيدةً بعد 10 سنوات.

ـ الطريقة (2):

التسديد بواسطة 5 دفعات ثابتة تستحق الأولى بتاريخ 2001/01/01.

ـ الطريقة (3):

التسديد بواسطة 5 دفعات متساوية تستحق كل دفعة منها بعد سنتين أي: الأولى في 2002/01/01 و الثانية في 2004/01/01 ...الخ.

العمل المطلوب :

معدل فائدة مركبة 7% سنوياً أحسب قيمة كل دفعة وفق الطرق الثلاث.

التمرين(5):

بتاريخ 2006/01/01 اشترت إحدى المؤسسات عقاراً تُسدد ثمنه بواسطة 8 دفعات ثابتة تسدد الأولى بتاريخ 2008/01/01، قيمة الدفعة $341.396,33^{DA}$ بمعدل فائدة مركبة 6% سنوياً.

العمل المطلوب :

1. أحسب قيمة العقار في تاريخ الشراء.
2. إذا أرادت تسديد المبلغ دفعة واحدة في نهاية المدة فما هي قيمة هذه الدفعات في نهاية المدة ؟

3. إذا أرادات أن تسدد المبلغ دفعة واحدة في نهاية السنة 15 فما هي قيمة هذا الدفع الوحيد ؟
4. ما هي قيمة الدفعات 3 سنوات قبل الدفع الأول ؟

7. أجوبة التقويم الذاتي

حل التمرين(1):

أ ـ حساب مبلغ الدفعة الثابتة :

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$a = V_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = 1.000.000 \times \frac{0,06}{1-(1+0,06)^{-10}}$$

$$a = 135.868^{DA}$$

ب ـ حساب المدة اللازمة للتخلص من بقية الدين بعد تسديد الدفعة 6 :

ـ القيمة الحالية للدفعات 4 الباقية :

$$V_4 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_4 = 135.868 \times \frac{1-(1+0,06)^{-4}}{0,06}$$

$$V_4 = 135.868 \times \frac{1-(1,06)^{-4}}{0,06}$$

$$V_4 = 135.868 \times 3,465105$$

$$V_4 = 470.796^{DA}$$

ـ حساب المدة :

$$V_4 = 2a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$470.796 = 2 \times 135.868 \times \frac{1-(1+0,045)^{-n}}{0,045}$$

$$470.796 = 271.736 \times \frac{1-(1,045)^{-n}}{0,045}$$

$$\frac{1-(1,045)^{-n}}{0,045} = \frac{470.796}{271.736}$$

$$(1,045)^{-n} = 1 - \frac{0,045 \times 470.796}{271.736}$$

$$(1,045)^{-n} = 0,922036$$

باستخدام اللوغاريتم العشري نجد:

$$(1,045)^{-n} = 0,922036$$

$$n = -\frac{\log(0,922036)}{\log(1,045)}$$

$$n = 2$$

حل التمرين(2):

1. حساب قيمة التجهيزات (X^{DA}) ما هي إلا القيمة الحالية لمتتالية الدفعات في الزمن (0):

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 3.603 \times \frac{1-(1+0,04)^{-3}}{0,04}$$

$$V_0 = 3.603 \times \frac{1-(1,04)^{-3}}{0,04}$$

$$V_0 = 3.603 \times 2,775091$$

$$V_0 = 10.000^{DA}$$

2 ـ حساب معدل الفائدة المركبة المطبق:

المبلغ الباقي من التجهيزات : $10.000 - 5.800 = 4.200$

$$A = a(1+i)^n$$
$$5.002,2672 = 4.200(1+i)^3$$
$$(1+i)^3 = \frac{5.002,2672}{4.200}$$
$$(1+i)^3 = 1,191016$$
$$1+i=\sqrt[3]{1,191016}$$
$$i = (1,191016)^{\frac{1}{3}} - 1$$
$$i = 0,06$$
$$i = 6\%$$

ـ جملة 6 سداسيات :

▪ المعدل السداسي المكافئ للمعدل السنوي 8%

$$(1+i_a) = (1+i_s)^2$$
$$i_s = \sqrt{(1+i_a)} - 1$$
$$i_s = \sqrt{1,08} - 1 = 0,03923$$
$$i_s = 3,923\%$$

▪ جملة 6 سداسيات :

$$A = a\,\frac{(1+i_s)^n - 1}{i_s}$$
$$A = 1.815,5 \times \frac{(1+0,03923)^6 - 1}{0,03923}$$
$$A = 1.815,5 \times 6,620149$$
$$A = 12.018,88^{DA}$$

حل التمرين(3) :

1. حساب قيمة المبلغ المودع في حساب كل ولد:

ـ المبلغ المودع في حساب الولد الأول (a_1) و الولد الثاني (a_2) :

$$a_1 = \frac{a_2}{3} \Leftrightarrow 3a_1 = a_2$$
$$a_1 + 3a_1 = 320.000$$
$$4a_1 = 320.000$$
$$a_1 = \frac{320.000}{4}$$
$$a_1 = 80.000^{DA}$$
$$a_2 = 240.000^{DA}$$

ـ حساب رأس المال الذي حصل عليه كل ولد:

نلاحظ أن الدفعات تدفع في بداية المدة.

لتكن A_1 رأس المال الذي حصل عليه الولد الأول و n_1 عدد الدفعات وهي تساوي (25-6 = 19 دفعة)

$$A_1 = a_1(1+i)\frac{(1+i)^{n_1}-1}{i}$$
$$A_1 = 80.000 \times (1+0,07) \times \frac{(1+0,07)^{19}-1}{0,07}$$
$$A_1 = 80.000 \times 1,07 \times 37,378964$$
$$A_1 = 3.199.639,31^{DA}$$

لتكن A_2 رأس المال الذي حصل عليه الولد الأول و n_2 عدد الدفعات وهي تساوي (25-16 = 9 دفعات).

$$A_2 = a_2(1+i)\frac{(1+i)^{n_2}-1}{i}$$
$$A_1 = 240.000 \times (1+0,07) \times \frac{(1+0,07)^{9}-1}{0,07}$$
$$A_2 = 240.000 \times 1,07 \times 11,977988$$
$$A_2 = 3.075.947,31^{DA}$$

حل التمرين(4):

ـ الطريقة (1): حساب الجملة

$$A = a(1+i)^n$$

$$A = 1.000.000(1+0,07)^{10}$$

$$A = 1.000.000 \times 1,967151$$

$$A = 1.967.151^{DA}$$

ـ الطريقة (2): حساب قيمة الدفعة الثابتة

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

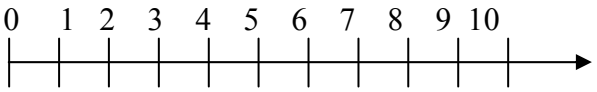
$$a = V_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$a = 1.000.000 \times \frac{0,07}{1-(1,07)^{-5}}$$

$$a = 1.000.000 \times 0,24389$$

$$a = 243.890^{DA}$$

ـ الطريقة (3): حساب قيمة الدفعة الثابتة



$$V_0 = a(1+i)^{-2} + \overset{a}{a}(1+i)^{-4} + \overset{a}{a}(1+i)^{-6} + \overset{a}{a}(1+i)^{-8} + a(1+i)^{-10}$$

$$V_0 = a\left[(1+i)^{-2} + (1+i)^{-4} + (1+i)^{-6} + (1+i)^{-8} + (1+i)^{-10}\right]$$

نلاحظ أن المقدار بين المجالين عبارة عن متتالية هندسية حدها الأول $(1+i)^{-2}$ و أساسها $(1+i)^{-2}$ و عدد حدودها 5 و منه حسب صيغة مجموع المتتالية الهندسية فإن :

$$V_0 = a\left[(1+i)^{-2} \times \frac{((1+i)^{-2})^{-5} - 1}{(1+i)^{-2} - 1}\right]$$

$$V_0 = a\left[(1+i)^{-2} \times \frac{(1+i)^{-10} - 1}{(1+i)^{-2} - 1}\right]$$

و منه بالتعويض نجد:

$$V_0 = a \times \left[(1+i)^{-2} \times \frac{(1+i)^{-10} - 1}{(1+i)^{-2} - 1}\right]$$

$$1.000.000 = a \times \left[(1,07)^{-2} \times \frac{(1,07)^{-10} - 1}{(1,07)^{-2} - 1}\right]$$

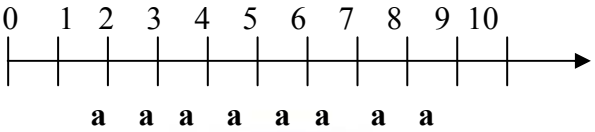
$$1.000.000 = a \times 3,393034$$

$$a = \frac{1.000.000}{3,393034}$$

$$a = 294.721,48^{DA}$$

حل التمرين(5):

1. حساب قيمة العقار في تاريخ الشراء



$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-8}-1}{i}(1+i)^{-1}$$

$$V_0 = 341.396,33 \times \frac{1-(1,06)^{-8}-1}{0,06}(1,06)^{-1}$$

$$V_0 = 341.396,33 \times 6,209793 \times 0,943396$$

$$V_0 = 2.000.000^{DA}$$

2. حساب قيمة الدفعات في نهاية المدة (الجملة)

$$A = a\frac{(1+i)^8-1}{i}$$

$$A = 341.396,33 \times \frac{(1,06)^8-1}{0,06}$$

$$A = 341.396,33 \times 9,897468$$

$$A = 3.378.959,22^{DA}$$

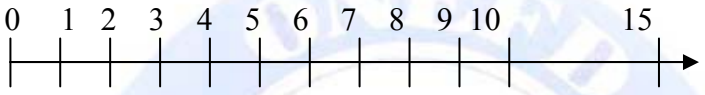
يمكن الحصول على نفس النتيجة تقريباً كما يلي :

$$A = V_0 (1+i)^9$$

$$A = 2.000.000 \times 1,68948$$

$$A = 3.378.960^{DA}$$

3. قيمة الدفعات في نهاية السنة 15.



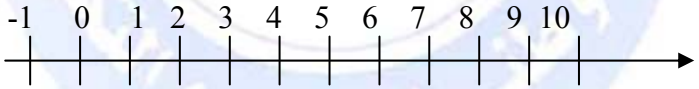
$$A_{15} = A(1+i)^{15-9}$$

$$A_{15} = 3.378.959,22(1,06)^6$$

$$A_{15} = 3.378.959,22 \times 1,418519$$

$$A_{15} = 4.793.117,85^{DA}$$

4. قيمة الدفعات 3 سنوات قبل الدفع الأول :



$$V_{-3} = V_0 (1+i)^{-1}$$

$$V_{-3} = 2.000.000 \times (1,06)^{-1}$$

$$V_{-3} = 2.000.000 \times 0,943396$$

$$V_{-3} = 1.886.792^{DA}$$