اختبارات نموذجية في الرياضيات

السنة الثانية ثانوي

علوم تجريبية – رياضيات

تقني رياضي

ستة وثلاثون اختبارا نموذجيا

مع حلولها المفصلة

ملخصات هامة لجميع الدروس

عبد الكريم واضحي

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ فَلَمَّا رَءَاهُ مُسۡتَقِرًّا عِندَهُۥ قَالَ هَٰذَا مِن فَضۡلِ رَبِّي لِيَبۡلُوَنِيٓ ءَأَشۡكُرُ أَمۡ أَكۡفُرُۖ
وَمَن شَكَرَ فَإِنَّمَا يَشۡكُرُ لِنَفۡسِهِۦۖ وَمَن كَفَرَ فَإِنَّ رَبِّي غَنِيّٞ كَرِيمٞ ٤٠ ﴾

﴿ رَبِّ أَوۡزِعۡنِيٓ أَنۡ أَشۡكُرَ نِعۡمَتَكَ ٱلَّتِيٓ أَنۡعَمۡتَ عَلَيَّ وَعَلَىٰ وَٰلِدَيَّ وَأَنۡ أَعۡمَلَ صَٰلِحٗا
تَرۡضَىٰهُ وَأَصۡلِحۡ لِي فِي ذُرِّيَّتِيٓۖ إِنِّي تُبۡتُ إِلَيۡكَ وَإِنِّي مِنَ ٱلۡمُسۡلِمِينَ ١٥ ﴾

الإهداء

إلى جميع تلاميذ السنة الثانية ثانوي
أهدي هذا الكتاب
آملا أن يكون خير جليس لهم
وأنفع وسيلة لبناء قاعدة جيدة في الرياضيات
تمهد لهم الطريق نحو البكالوريا

عبد الكريم واضحي

مُقَدِّمَة

لمّا صدر الكتاب الأول من سلسلة الاختبارات النموذجية والخاص بالمستوى النهائي قبل ست سنوات، وعدت إخواني الأساتذة وأبنائي الطلبة بإصدار الأجزاء الثلاثة الأخرى الخاصة بالسنوات الرابعة متوسط، الأولى والثانية ثانوي، فصدر الكتاب الثاني الخاص بالسنة الرابعة متوسط، ثمّ الكتاب الثالث الخاص بالسنة الأولى ثانوي، وها هو آخر العنقود يرى النور أخيرا بفضل الله ومنّه وكرمه لتكتمل سلسلة الاختبارات النموذجية التي أرجو من الله عزّ وجلّ أن تكون منارة تهدي أبناءنا الطلبة في رحلتهم في عالم الرياضيات وتأخذ بأيديهم منذ السنة الرابعة متوسط برفق وحنان وتصعد بهم الدرجة تلو الأخرى حتى تصل بهم إلى قمة الهرم ويحققوا أسمى أمنياتهم بافتكاك أعلى العلامات في امتحان الرياضيات الخاص بشهادة البكالوريا.

ولا شك أنّ السنة الثانية ثانوي هي القاعدة الرئيسية للسنة النهائية، إذ أنّ أربعة محاور من المحاور الخمسة (للشعب العلمية) والستة (للشعب التقنية والرياضية) تدرس خلال هذه السنة ألا وهي: الدوال العددية، المتتاليات العددية، الاحتمالات والهندسة في الفضاء، فمن درس هذه المحاور خلال هذه السنة دراسة جيدة، سيجد سهولة كبيرة في دراستها خلال السنة النهائية والعكس صحيح، وكثيرا ما نواجه طلبة في المرحلة النهائية لهم نقائص شديدة في مادة الرياضيات بسبب ضعف التحصيل العلمي خلال السنتين السابقتين.

والله أرجو أن يكتب لهذه الطبعة القبول بين إخواني الأساتذة وأبنائي الطلبة، مرحبا بجميع ملاحظاتهم وتصويباتهم سواءً باتصالهم المباشر على الرقم 0668 177 233 أو على البريد الإلكتروني *ouailmaths@gmail.com*، ولهم مني جزيل الشكر، فجلّ من لا يخطئ ورحم الله امرئ أهدى إليّ عيوبي.

عبد الكريم واضحي

ملاحظات هامة
وقواعد أساسية
في الرياضيات

بقدر الكدّ تكتسب المعالي

ومن طلب العلا سهر الليالي

ومن طلب العلا من غير كدّ

أضاع العمر في طلب المحال

قواعد أساسية في الرياضيات

الدوال العددية

أ. **تذكير حول الدوال:**

تعيين مجموعة تعريف دالة:

مجموعة تعريف دالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي يكون من أجلها حساب $f(x)$ ممكنا.

أمثلة:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} \; ; g(x) = \sqrt{x+1} \; ; h(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x} \; ;$$

$$p(x) = \frac{3x-5}{x^2+1} \; ; q(x) = \sqrt{|-4x-2|}$$

$D_f = \{x \; ; x(x+1) \neq 0\} \; ; x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0$ أو $x = -1$

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-1; 0\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[}$$

$D_g = \{x \; ; x+1 \geq 0\} \; ; x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \; ; \boxed{D_g = [-1; +\infty[}$

$D_h = \{x \; ; x+2 \geq 0$ و $x \neq 0\}$

$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \; ; \boxed{D_h = [-2; 0[\cup]0; +\infty[}$

$D_p = \{x \; ; x^2+1 \neq 0\} \; ; x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ مستحيل ; $\boxed{D_p = \mathbb{R}}$

$D_q = \{x \; ; |-4x-2| \geq 0\}$

$|-4x-2| \geq 0$ (محقّقة من أجل كل عدد حقيقي x) ; $\boxed{D_q = \mathbb{R}}$

دراسة اتجاه تغيّر دالة

لتكن f دالة معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

f متزايدة تماما على I يعني أنّه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ: $f(x_1) < f(x_2)$.

f متناقصة تماما على I يعني أنّه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1 < x_2$ فإنّ: $f(x_1) > f(x_2)$.

f ثابتة تماما على I يعني أنّه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، $f(x_1) = f(x_2)$.

مثال: ندرس اتجاه تغيّر الدالة $f(x) = (x+1)^2 - 3$ على المجال $]-\infty; -1]$ ، ثمّ على المجال $[-1; +\infty[$.

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين من $]-\infty; -1]$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$\boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} \le -1 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \le 0 \xRightarrow[\text{تربيع عددين سالبين}]{} (x_1+1)^2 > (x_2+1)^2$$

$$\Rightarrow (x_1+1)^2 - 3 > (x_2+1)^2 - 3 \Rightarrow \boldsymbol{f(x_1)} > \boldsymbol{f(x_2)}$$

$\Rightarrow$ الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-1]$

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين من $[-1;+\infty[$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$-1 \le \boldsymbol{x_1} < \boldsymbol{x_2} \Rightarrow 0 \le x_1 + 1 < x_2 + 1 \xRightarrow[\text{تربيع عددين موجبين}]{} (x_1+1)^2 < (x_2+1)^2$$

$$\Rightarrow (x_1+1)^2 - 3 < (x_2+1)^2 - 3 \Rightarrow \boldsymbol{f(x_1)} < \boldsymbol{f(x_2)}$$

$\Rightarrow$ الدالة f متزايدة على المجال $[-1;+\infty[$

دراسة شفعية دالة

لتكن f دالة معرّفة على D_f.

تكون الدالة f زوجية إذا كان D_f متناظرا بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in D_f$:

$$f(-x) = f(x)$$

تكون الدالة f فردية إذا كان D_f متناظرا بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in D_f$:

$$f(-x) = -f(x)$$

يقبل المنحنى البياني للدالة الزوجية محور تناظر (محور التراتيب) ويقبل المنحنى البياني للدالة الفردية مركز تناظر (المبدأ).

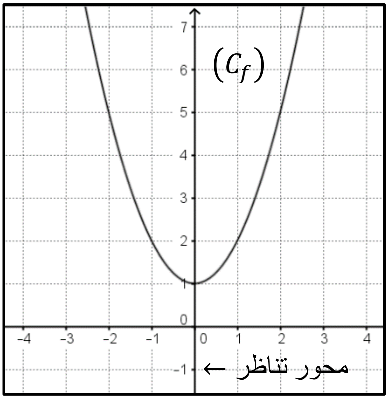
ملاحظة : يكون D_f متناظرا بالنسبة إلى 0 إذا كان على أحد هذه الأشكال :

$\mathbb{R}\,;\mathbb{R}-\{-a;a\}\,;\ ]-\infty;-a]\cup[a;+\infty[\,;]-\infty;-a[\cup\,]a;+\infty[\,;$
$[-a;a]\,;\ ]-a;a[.$

مثال 1 :

$f(x) = x^2 + 1\,; D_f = \mathbb{R}\,; f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$

لدينا D_f متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in D_f$: $f(-x) = f(x)$ ، منه نستنتج أنّ الدالة f زوجية.

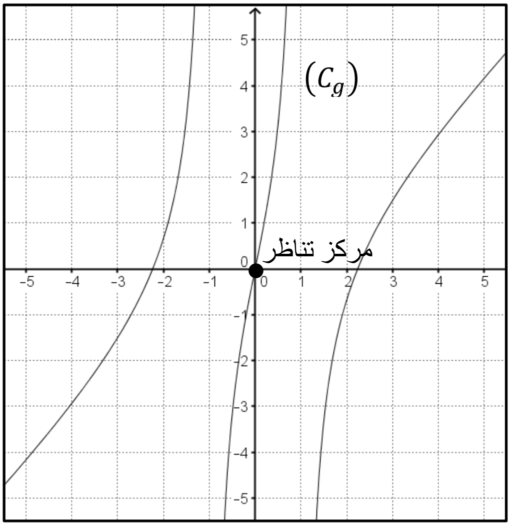


مثال 2 :

$$g(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2 - 1} \; ; D_g = \mathbb{R} - \{-1;1\} \; ;$$

$$g(-x) = \frac{(-x)^3 - 5(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3 + 5x}{x^2 - 1} = -\frac{x^3 - 5x}{x^2 - 1} = -g(x)$$

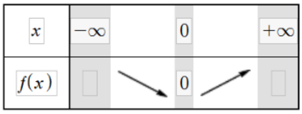
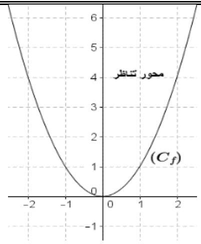
لدينا D_g متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in D_g$: $g(-x) = -g(x)$ ، منه نستنتج أنّ الدالة g فردية.



الدوال المرجعية :

أ. الدالة مربّع:

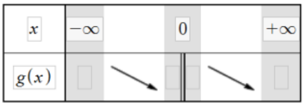
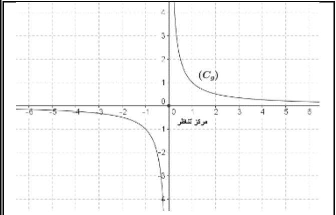
الدالة مربّع (x^2) معرّفة على $\mathbb{R}$ ، متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة على المجال $[0;+\infty[$ ، هي دالة زوجية ومنحناها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

جدول تغيّراتها	منحناها البياني
	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

ب. **الدالة مقلوب:**

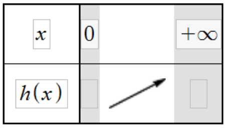
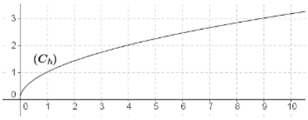
الدالة مقلوب $\left(\frac{1}{x}\right)$ معرّفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ ، متناقصة على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ، هي دالة فردية ومنحناها البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

جدول تغيّراتها	منحناها البياني
	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		↘	‖	↘	

ج. **الدالة الجذر التربيعي:**

الدالة الجذر التربيعي $\left(\sqrt{x}\right)$ معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ ، ومتزايدة على هذا المجال.

جدول تغيّراتها	منحناها البياني
	

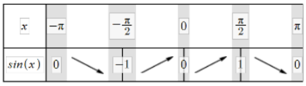
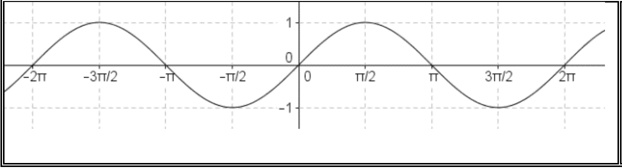
x	0		$+\infty$
$h(x)$		↗	

د. **الدالة جيب (sin) والدالة جيب تمام (cos):**

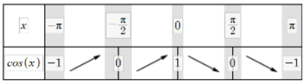
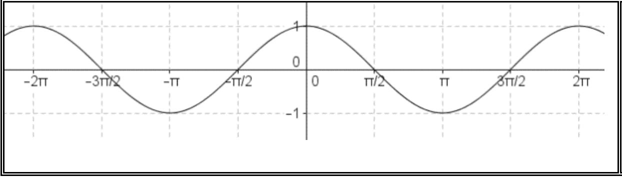
الدالة جيب (sin) معرّفة على $\mathbb{R}$ ، وهي دالة فردية ودورية دورها 2π ، متناقصة على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right] \cup \left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ ومتزايدة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

الدالة جيب تمام (cos) معرّفة على $\mathbb{R}$ ، وهي دالة زوجية ودورية دورها 2π ، متناقصة على المجال $[0;\pi]$ ومتزايدة على المجال $[-\pi;0]$.

ملاحظة: معنى أنّ الدالتين $\sin$ و $\cos$ دوريتان دورهما 2π ، أنّه يمكن اقتصار دراستهما على المجال $[0;2\pi]$ أو $[-\pi;\pi]$.

جدول تغيّرات الدالة sin	منحناها البياني
	

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$sin(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

جدول تغيّرات الدالة cos	منحناها البياني
	

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$cos(x)$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

ه. تركيب الدوال:

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب.

مركب الدالة f متبوعة بالدالة g هي الدالة التي نرمز إليها بالرمز gof والمعرّفة على D_{gof} بـ: $gof(x)=g[f(x)]$، حيث:

$$D_{gof}=\left\{x;\underbrace{x\in D_f}_{\text{الشرط الأول}}\ \text{و}\ \underbrace{f(x)\in D_g}_{\text{الشرط الثاني}}\right\}$$

أمثلة:

المثال 1: تعيين الدالة gof

$f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}$ ، $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

$$D_{gof}=\left\{x;\underbrace{x\in D_f}_{\text{الشرط الأول}}\ \text{و}\ \underbrace{f(x)\in D_g}_{\text{الشرط الثاني}}\right\}$$

$x\in D_f\Rightarrow x\in\mathbb{R}\ldots$ ①

$f(x)\in D_g\Rightarrow f(x)\neq 1\Rightarrow x^2+1\neq 1\Rightarrow x\neq 0\Rightarrow x\in\mathbb{R}^*\ldots$ ②

② و ① $\Rightarrow D_{gof}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}^*=\boxed{\mathbb{R}^*}$

$$gof(x)=g[f(x)]=\frac{2f(x)+1}{f(x)-1}=\frac{2(x^2+1)+1}{x^2+1-1}=\boxed{\frac{2x^2+3}{x^2}}$$

المثال 2: تعيين الدالة fog

$f(x)=\sqrt{x^2+2x}$ ، $g(x)=\frac{1}{x}-3$ ، $D_f=]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$ ،

$$D_g=\mathbb{R}^*$$

$$D_{fog}=\left\{x;\underbrace{x\in D_g}_{\text{الشرط الأول}}\ \text{و}\ \underbrace{g(x)\in D_f}_{\text{الشرط الثاني}}\right\}$$

$x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}^* \dots$ ①

$g(x) \in D_f \Rightarrow g(x) \leq -2$ أو $g(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - 3 \leq -2$ أو $\frac{1}{x} - 3 \geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x} \leq 1$ أو $\frac{1}{x} \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$ أو $x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left]-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty[\dots$ ②

② و ① $\Rightarrow D_{fog} = \mathbb{R}^* \cap \left]-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty[= \boxed{]-\infty; 0[\cup \left]0; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty[}$

$$fog(x) = f[g(x)] = \sqrt{[g(x)]^2 + 2g(x)} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 3\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x} - 3\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} + 3} = \boxed{\frac{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}{|x|}}$$

المثال 3: كتابة دالة على شكل مركبة دالتين (تفكيك دالة)

① $f(x) = (x+2)^2 + 1\,; x \xrightarrow{u(x)=x+2} x + 2 \xrightarrow{v(x)=x^2+1} (x+2)^2 + 1 \Rightarrow f(x) = vou(x)$

② $g(x) = \sqrt{3 - x}\,; x \xrightarrow{u(x)=3-x} 3 - x \xrightarrow{v(x)=\sqrt{x}} \sqrt{3 - x} \Rightarrow g(x) = vou(x)$

③ $h(x) = |x^2 - 2| - 3\,; x \xrightarrow{u(x)=x^2-2} x^2 - 2 \xrightarrow{v(x)=|x|-3} |x^2 - 2| - 3 \Rightarrow h(x) = vou(x)$

④ $k(x) = \cos(2x + 3)\,; x \xrightarrow{u(x)=2x+3} 2x + 3 \xrightarrow{v(x)=\cos x} \cos\,(2x + 3) \Rightarrow k(x) = vou(x)$

ملاحظات هامة:

1. لتعيين مجموعة تعريف دالة مركبة نقرأ عبارة التركيب من اليمين إلى اليسار، ثمّ نعيّن المجموعتين المتعلقتين بالشرطين الأول والثاني وأخيرا نحدد تقاطع المجموعتين.

$$\overleftarrow{fo\,\overleftarrow{g(x)}}: D_{fog} = \left\{x; \underbrace{x \in D_g}_{\text{الشرط الأول}} \text{ و } \underbrace{g(x) \in D_f}_{\text{الشرط الثاني}}\right\}$$

$$\overleftarrow{go\,\overleftarrow{f(x)}}: D_{gof} = \left\{x; \underbrace{x \in D_f}_{\text{الشرط الأول}} \text{ و } \underbrace{f(x) \in D_g}_{\text{الشرط الثاني}}\right\}$$

2. تحقق دائما من أنّ $D_{gof} \subseteq D_f$ و $D_{fog} \subseteq D_g$.

3. لتعيين عبارة $gof(x)$ نعوّض x بـ $f(x)$ في عبارة الدالة g ولتعيين عبارة $fog(x)$ نعوّض x بـ $g(x)$ في عبارة الدالة f.

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \\ g(x) = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} gof(x) = g[f(x)] = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 1} \\ fog(x) = f[g(x)] = [g(x)]^2 + 1 = x + 1 \end{cases}$$

4. يمكن تفكيك دالة إلى مركبة دالتين بأكثر من طريقة، ففي المثال السابق يمكن تفكيك الدالة f كالتالي:

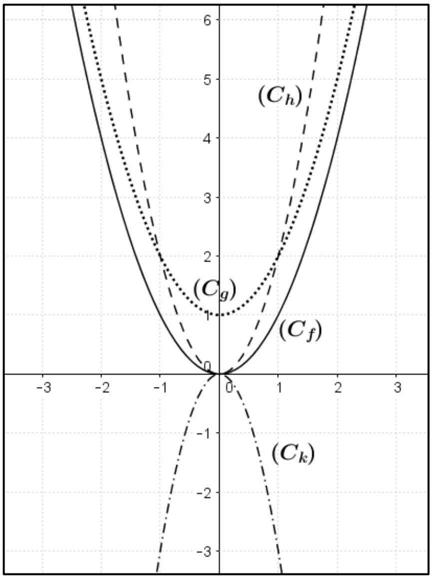
$$① \ f(x) = (x+2)^2 + 1 \ ; x \xrightarrow{u(x)=(x+2)^2} (x+2)^2 \xrightarrow{v(x)=x+1} (x+2)^2 + 1$$
$$\Rightarrow f(x) = vou(x)$$

و. **اتجاه تغيّر دالة:**

الدالة	اتجاه تغيّرها
$f + k \ ; k \in \mathbb{R}$	نفس اتجاه تغيّر الدالة f
$\lambda f \ ; \ \lambda > 0$	نفس اتجاه تغيّر الدالة f
$\lambda f \ ; \ \lambda < 0$	عكس اتجاه تغيّر الدالة f

في الشكل الموالي لدينا المنحنى البياني للدالة مربّع (C_f) بالإضافة إلى الدوال $(C_g)\ x^2 + 1$ ، $(C_h)\ 2x^2$ ، $(C_k) - 3x^2$

نلاحظ أن للدوال f، g و h نفس اتجاه التغيّر، بينما الدالة k معاكسة لهم في الاتجاه.



ز. **اتجاه تغيّر الدالة gof:**

- إذا كان اتجاه تغيّر الدالة f على المجال I **نفس** اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $f(I)$ تكون الدالة gof **متزايدة** على المجال I.
- إذا كان اتجاه تغيّر الدالة f على المجال I **عكس** اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $f(I)$ تكون الدالة gof **متناقصة** على المجال I.

مثال: لتكن f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 \text{ و } f(x) = -5x + 2$$

$$-5x + 2 \geq 0 \Rightarrow 5x \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{2}{5}$$

إذا كان $x \in \underbrace{\left]-\infty;\frac{2}{5}\right]}_{I}$ فإنّ $f(x) \in \underbrace{[0;+\infty[}_{f(I)}$: في هذه الحالة تكون الدالة f **متناقصة** على المجال $\left]-\infty;\frac{2}{5}\right]$ والدالة g **متزايدة** على المجال $[0;+\infty[$ ، ومنه نستنتج أنّ الدالة gof **متناقصة** على المجال $\left]-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

إذا كان $x \in \underbrace{\left[\frac{2}{5};+\infty\right[}_{I}$ فإنّ $f(x) \in \underbrace{]-\infty;0]}_{f(I)}$: في هذه الحالة تكون الدالة f **متناقصة** على المجال $\left[\frac{2}{5};+\infty\right[$ والدالة g **متناقصة** على المجال $]-\infty;0]$ ، ومنه نستنتج أنّ الدالة gof **متزايدة** على المجال $\left[\frac{2}{5};+\infty\right[$.

ح. **التمثيل البياني:**

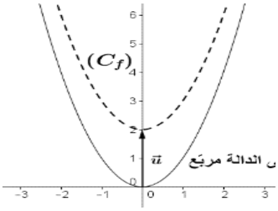
- التمثيل البياني للدالة f في معلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ للمستوي، هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث: $x \in D_f$ و $y = f(x)$.
- لتكن الدالة g المعرّفة بـ: $g(x) = f(x+a)$. المنحنى (C_g) هو صورة للمنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-a\vec{\imath}$.
- لتكن الدالة h المعرّفة بـ: $h(x) = f(x) + b$. المنحنى (C_g) هو صورة للمنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $b\vec{\jmath}$.
- لتكن الدالة k المعرّفة بـ: $g(x) = f(x+a) + b$. المنحنى (C_g) هو صورة للمنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$.
- التمثيل البياني للدالة $|f(x)|$ يتطابق مع (C_f) لمّا $f(x) \geq 0$ ويتناظر معه بالنسبة لمحور الفواصل لمّا $f(x) < 0$.
- التمثيل البياني للدالة $|f(x)|$ **يكون دائما فوق محور الفواصل**.

- الدالة $f(|x|)$ زوجية وتمثيلها البياني **متناظر بالنسبة لمحور التراتيب** ويتطابق مع (C_f) لمّا $x \geq 0$.

أمثلة:

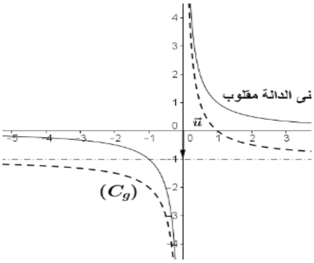
$$f(x) = x^2 + 2$$

$a = 0; b = 2;\ \vec{u}(0;2)$



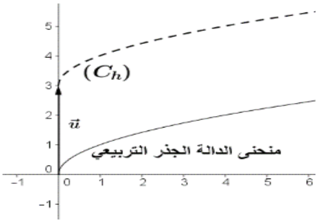
$$g(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$a = 0; b = -1;\ \vec{u}(0;-1)$



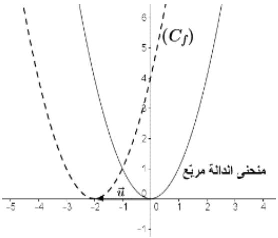
$$h(x) = \sqrt{x} + 3$$

$a = 0; b = 3;\ \vec{u}(0;3)$



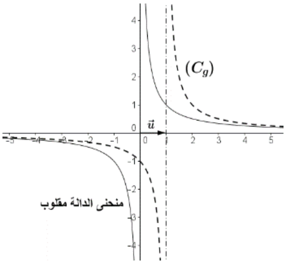
$$f(x) = (x+2)^2$$

$a = 2; b = 0;\ \vec{u}(-2;0)$



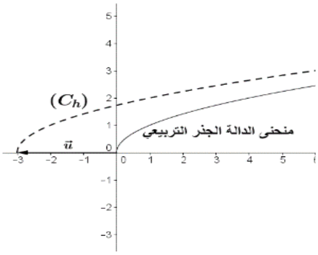
$$g(x) = \frac{1}{x-1}$$

$a = -1; b = 0;\ \vec{u}(1;0)$



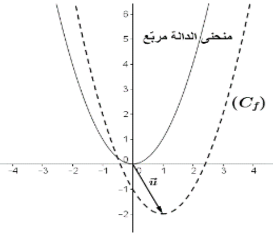
$$h(x) = \sqrt{x+3}$$

$a = 3; b = 0;\ \vec{u}(-3;0)$



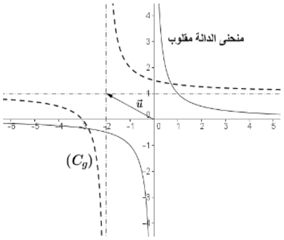
$$f(x) = (x-1)^2 - 2$$

$a = -1; b = -2;\ \vec{u}(1;-2)$



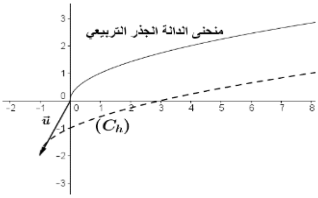
$$g(x) = \frac{1}{x+2} + 1$$

$a = 2; b = 1;\ \vec{u}(-2;1)$

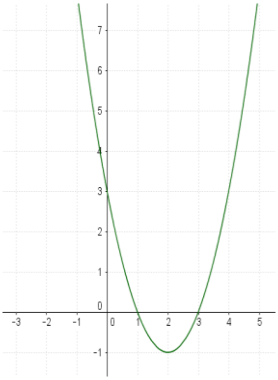


$$h(x) = \sqrt{x+1} - 2$$

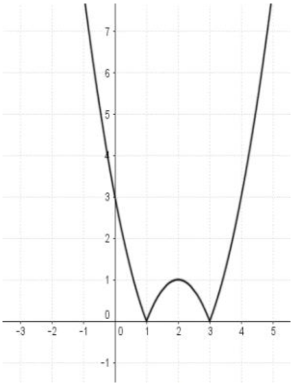
$a = 1; b = -2;\ \vec{u}(-1;-2)$



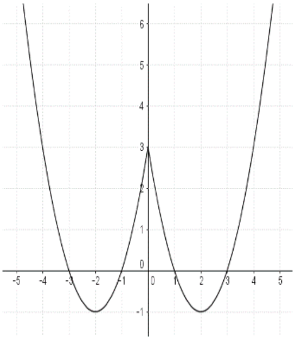
$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 3}$



$\boldsymbol{g(x) = |f(x)|}$



$\boldsymbol{h(x) = f(|x|)}$



ط. <u>دساتير تغيير المعلم:</u>

لكتابة معادلة (C_f) في معلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ للمستوي، حيث $\Omega(x_0; y_0)$ نتبع الخطوات التالية:

1. كتابة دساتير تغيير المعلم.
2. كتابة كلا من x و y بدلالة X و Y.
3. استنتاج أنّ النقطة $\Omega(x_0; y_0)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) إذا تحصلنا على دالة فردية أو أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = x_0$ محور تناظر للمنحنى (C_f) إذا تحصلنا على دالة زوجية.

مثال 1: $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 3}$ و $\boldsymbol{\Omega(2; -1)}$

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1 \end{cases} ; y = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow Y - 1 = (X + 2)^2 - 4(X + 2) + 3$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = X^2} \text{ (دالة زوجية)}$$

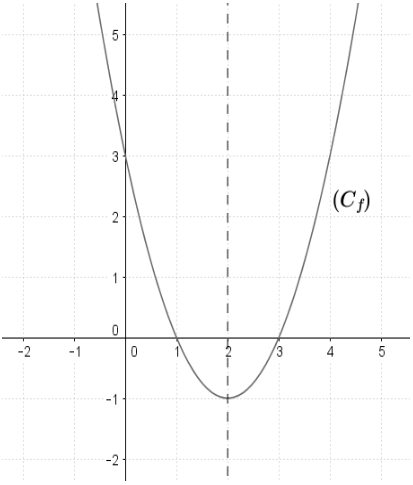
بما أنّ معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ هي $Y = X^2$، نستنتج أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

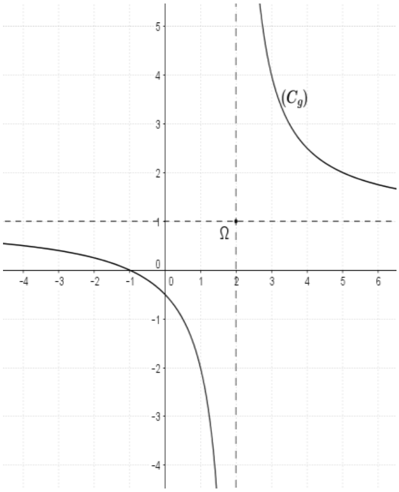
مثال 2: $\boldsymbol{g(x) = \frac{x+1}{x-2}}$ و $\boldsymbol{\Omega(2; 1)}$

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 1 \end{cases} ; y = \frac{x + 1}{x - 2} \Rightarrow Y + 1 = \frac{X + 2 + 1}{X + 2 - 2} = \frac{X + 3}{X}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{X + 3}{X} - 1 \Rightarrow \boxed{Y = \frac{3}{X}} \text{ (دالة فردية)}$$

بما أنّ معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ هي $Y = \frac{3}{X}$، نستنتج أنّ النقطة $\Omega(2; 1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).





تمارين تطبيقية:

التمرين 01:

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل:

1. الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty;3]$ بـ: $f(x)=\sqrt{3-x}$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty;3]$.
2. إذا كانت f و g دالتين معرفتين على $[0;+\infty[$ حيث $f(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{x}$ فإنّ $gof=fog$.
3. إذا كانت f و g دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ حيث $f(x)=-x+1$ و $g(x)=x^2$ فإنّ gof متناقصة على $]-\infty;0]$.
4. إذا كانت f و g دالتين معرفتين على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^4-1$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ فإنّ $gof(x)=\frac{1}{x^2}$.
5. المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ محور تناظر لمنحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$.
6. منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=(x-1)^2-1$ هو صورة منحنى الدالة مربع بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

* * *

حل التمرين 01:

①	خ	②	ص	③	ص	④	ص	⑤	ص	⑥	خ

1. $f(x) = \sqrt{3-x}$ ، $D_f =]-\infty; 3]$

$f(x) = vou(x)$ ، حيث: $u(x) = 3 - x$ و $v(x) = \sqrt{x}$

$$x \in \underbrace{]-\infty; 3]}_{I} \Rightarrow -x \in [-3; +\infty[\Rightarrow 3 - x \in \underbrace{[0; +\infty[}_{u(I)}$$

بما أنّ الدالة u متناقصة على I والدالة v متزايدة على $u(I)$، فإنّ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 3]$.

2. $f(x) = x^2$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، $D_f = D_g = [0; +\infty[$

$$D_{gof} = \left\{x; x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\right\}$$

$$\begin{cases} x \in D_f \Rightarrow x \in [0; +\infty[\\ f(x) \in D_g \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [0; +\infty[\end{cases} \Rightarrow \boxed{D_{gof} = [0; +\infty[}$$

$$gof(x) = g[f(x)] = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x| = \boxed{x} \left(\text{لأنّ } x \geq 0\right)$$

$$D_{fog} = \left\{x; x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\right\}$$

$$\begin{cases} x \in D_g \Rightarrow x \in [0; +\infty[\\ g(x) \in D_f \Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x \in [0; +\infty[\end{cases} \Rightarrow \boxed{D_{fog} = [0; +\infty[}$$

$$fog(x) = f[g(x)] = [g(x)]^2 = \sqrt{x}^2 = \boxed{x}$$

$$\begin{cases} D_{gof} = D_{fog} \\ gof(x) = fog(x) \end{cases} \Rightarrow \boxed{gof = fog}$$

3. $f(x) = -x + 1$ و $g(x) = x^2$ ، $D_f = \mathbb{R}$.

$$x \in \underbrace{]-\infty; 0]}_{I} \Rightarrow -x \in [0; +\infty[\Rightarrow -x + 1 \in \underbrace{[1; +\infty[}_{f(I)}$$

بما أنّ الدالة f متناقصة على I والدالة g متزايدة على $f(I)$، فإنّ الدالة gof متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$.

4. $f(x) = x^4 - 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ، $D_f = D_g =]0; +\infty[$

$$gof(x) = g[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{f(x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \boxed{\frac{1}{x^2}}$$

5. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ ، $D_f = \mathbb{R}$.

① باستعمال دساتير تغيير المعلم:

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y \end{cases} ; y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} \Rightarrow Y = \sqrt{(X-1)^2 + 2(X-1) + 3}$$

$$= \sqrt{X^2 + 2}$$

بما أنّ الدالة $\sqrt{X^2 + 2}$ زوجية فإنّ منحناها البياني يقبل محور تناظر معادلته $X = 0$ أي $x = -1$. $(x = X - 1)$

② باستعمال القاعدة $f(2a-x)=f(x)$:

يكون المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر لمنحنى الدالة f إذا تحقق الشرطان:

D_f متناظر بالنسبة للصفر، ومن أجل كل $x\in D_f$: $f(2a-x)=f(x)$.

بما أنّ $D_f=\mathbb{R}$ فهو متناظر بالنسبة للصفر، ومن أجل كل $x\in D_f$ لدينا:

$$f(-2-x)=\sqrt{(-2-x)^2+2(-2-x)+3}=\sqrt{x^2+2x+3}=f(x)$$

منه نستنتج أنّ المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ محور تناظر لمنحنى الدالة f.

6. منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=(x-1)^2-1$ هو صورة منحنى الدالة مربع بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$$y=(x-1)^2-1\Rightarrow \underbrace{y+1}_{Y}=\underbrace{(x-1)}_{X}^2\Rightarrow Y=X^2\ ;\ \begin{cases}X=0\\Y=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\\y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}\Rightarrow\boxed{\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}$$

* * *

التمرين 02:

اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1;+\infty[$ و $]0;+\infty[$ على الترتيب كما يلي:

$g(x)=2-\frac{1}{x}$ و $f(x)=x+1$

1. مجموعة تعريف الدالة gof هي:

أ) $]0;+\infty[$ ب) $]-1;+\infty[$ جـ) $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

2. عبارة $gof(x)$ هي:

أ) $2-\frac{1}{x+1}$ ب) $3-\frac{1}{x}$ جـ) $3+\frac{1}{x+1}$

3. اتجاه تغيّر الدالة gof على المجال $]-1;+\infty[$ هو:

أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما جـ) ثابتة

4. اتجاه تغيّر الدالة $g-2f$ على المجال $]0;+\infty[$ هو:

أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما جـ) لا يمكن الاستنتاج

5. معادلة منحنى الدالة gof في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\Omega(-1;2)$ هي:

أ) $Y=\frac{1}{X}$ ب) $Y=-\frac{1}{X}$ جـ) $Y=X^2$

* * *

حل التمرين 02:

①	ب	②	أ	③	أ	④	جـ	⑤	ب

1. $D_{gof} = \{x; x \in D_f$ و $f(x) \in D_g\}$

$$\begin{cases} x \in D_f \Rightarrow x \in]-1;+\infty[\\ f(x) \in D_g \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x \in]-1;+\infty[\end{cases}$$

$$\boxed{D_{gof} =]-1;+\infty[}$$

2. $gof(x) = g[f(x)] = 2 - \frac{1}{f(x)} = \boxed{2 - \frac{1}{x+1}}$

3. $x \in \underbrace{]-1;+\infty[}_{I} \Rightarrow x+1 \in \underbrace{]0;+\infty[}_{f(I)}$

بما أنّ الدالة f متزايدة على I والدالة g متزايدة على $f(I)$، فإنّ الدالة gof متزايدة على المجال $]-1;+\infty[$.

4. بما أنّ الدالة f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$ والدالة $-g$ متناقصة على المجال $]0;+\infty[$ ، فلا يمكننا استنتاج اتجاه تغيّر الدالة $2f-g$ على المجال $]0;+\infty[$.

5. نستعمل دساتير تغيير المعلم:

$$\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+2 \end{cases}; y = 2 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow Y+2 = 2 - \frac{1}{X} \Rightarrow \boxed{Y = -\frac{1}{X}}$$

* * *

التمرين 03:

لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1. بيّن أنّ $f(x) = (x-1)^2 - 4$ واستنتج أنّه يمكن كتابة $f(x)$ على شكل $hog(x)$ حيث g و h دالتان يُطلب تعيينهما.
2. نضع: $I_1 =]-\infty;1]$ و $I_2 = [1;+\infty[$. عيّن $g(I_1)$ و $g(I_2)$ واستنتج اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$.
3. اكتب عبارة $f(x)$ في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\Omega(1;-4)$، ثمّ استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل محور تناظر يُطلب تعيينه.
4. بيّن أنّ (C_f) صورة منحنى الدالة مربّع بانسحاب يُطلب تعيين شعاعه، ثمّ أنشئ (C_f).
5. أنشئ المنحنيين البيانيين للدالتين $f_1(x) = x^2 - 2|x| - 3$ و $f_2(x) = |x^2 - 2x - 3|$ اعتمادا على (C_f).

* * *

حل التمرين 03:

لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1. بيان أنّ $f(x) = (x-1)^2 - 4$ وكتابة $f(x)$ على شكل $hog(x)$

$$f(x) = (x-1)^2 - 4 = \boxed{x^2 - 2x - 3}$$

$$x \xrightarrow{g(x)=x-1} x-1 \xrightarrow{h(x)=x^2-4} (x-1)^2 - 4 \Rightarrow hog(x) = h[g(x)]$$
$$= [g(x)]^2 - 4 = (x-1)^2 - 4 = f(x)$$

2. $I_1 =]-\infty; 1]$ و $I_2 = [1; +\infty[$. تعيين $g(I_1)$ و $g(I_2)$ واستنتاج اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$

$$x \in]-\infty; 1] \Rightarrow x - 1 \in]-\infty; 0] \Rightarrow \boxed{g(I_1) =]-\infty; 0]}$$

$$x \in [1; +\infty[\Rightarrow x - 1 \in [0; +\infty[\Rightarrow \boxed{g(I_2) = [0; +\infty[}$$

$$\begin{cases} \text{الدالة } g \text{ متزايدة على } I_1 \\ \text{الدالة } h \text{ متناقصة على } g(I_1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ متناقصة على } I_1}$$

$$\begin{cases} \text{الدالة } g \text{ متزايدة على } I_2 \\ \text{الدالة } h \text{ متزايدة على } g(I_2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ متزايدة على } I_2}$$

3. كتابة عبارة $f(x)$ في المعلم $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ واستنتاج أنّ المنحنى (C_f) يقبل محور تناظر يُطلب تعيينه

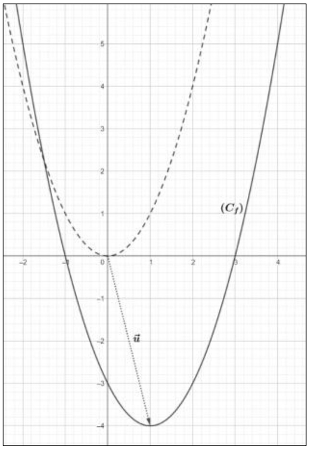
$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 4 \end{cases} ; y = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow Y - 4 = X^2 - 4 \Rightarrow \boxed{Y = X^2}$$

بما أنّ الدالة X^2 زوجية فإنّ منحناها البياني يقبل محور تناظر معادلته $X = 0$ أي $x = 1$. $(x = X + 1)$

4. بيان أنّ (C_f) صورة منحنى الدالة مربّع بانسحاب يُطلب تعيين شعاعه وإنشاء (C_f)

$$y = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow \underbrace{y+4}_{Y} = \underbrace{(x-1)}_{X}^2 \Rightarrow Y = X^2 \; ; \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}}$$



5. إنشاء المنحنيين البيانيين للدالتين $f_1(x) = x^2 - 2|x| - 3$

و $f_2(x) = |x^2 - 2x - 3|$ اعتمادا على (C_f)

① الدالة $f_1(x)$ زوجية لأنّ $D_{f_1} = \mathbb{R}$ متناظر بالنسبة للصفر ومن أجل كل $x \in D_{f_1}$ لدينا:

$$f_1(-x) = (-x)^2 - 2|-x| - 3 = x^2 - 2|x| - 3 = f_1(x)$$

$\Rightarrow$ المنحنى $\left(C_{f_1}\right)$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

ومن أجل $x \geq 0$ لدينا $x = |x|$ أي $f_1(x) = f(x)$ ومنه $\left(C_{f_1}\right)$ يطابق $\left(C_f\right)$.

② لدينا: $f_2(x) = |f(x)|$. ندرس إذن إشارة الدالة $f(x)$

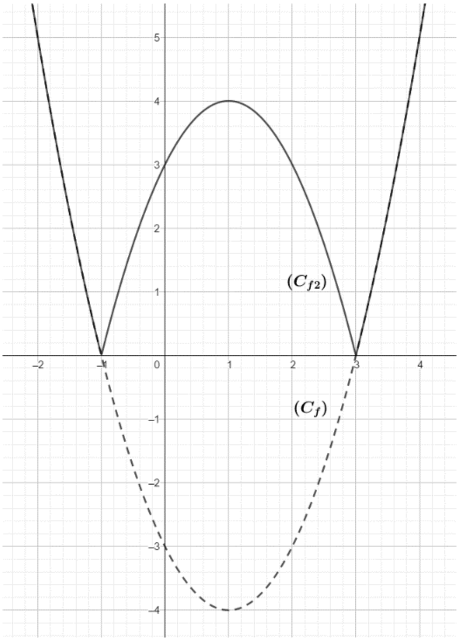
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1\,; x_2 = 3 \left(a + c = b \Rightarrow x_1 = -1\,; x_2 = -\frac{c}{a}\right)$$

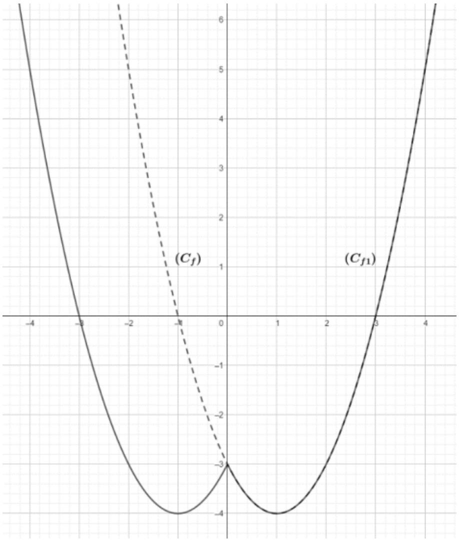
$$x \in \left]-\infty; -1\right] \cup \left[3; +\infty\right[: f(x) \geq 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x) \Rightarrow f_2(x) = f(x)$$

$\Rightarrow$ $\left(C_{f_2}\right)$ يطابق $\left(C_f\right)$

$$x \in \left]-1; 3\right[: f(x) < 0 \Rightarrow |f(x)| = -f(x) \Rightarrow f_2(x) = -f(x)$$

$\Rightarrow$ $\left(C_{f_2}\right)$ يناظر $\left(C_f\right)$ بالنسبة لمحور الفواصل





* * *

الدوال كثيرات الحدود

أ. **تعاريف:**

- نسمي دالة كثير حدود (أو كثير حدود) كل دالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ حيث n عدد طبيعي
و a_0، a_1، ... ، a_n أعداد حقيقية.
- يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير الحدود f.
- يكون كثير حدود معدوما إذا وفقط إذا كانت كل معاملاته معدومة.
- يكون كثيرا حدود (غير معدومين) متساويين إذا وفقط إذا كانا من نفس الدرجة وكانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

ب. **عمليات على كثيرات الحدود:**

- العدد α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha) = 0$
- إذا كان $f(\alpha) = 0$ (α جذر لكثير الحدود f) فإنّه يوجد كثير حدود g بحيث:
$f(x) = (x - \alpha)g(x)$
- لتعيين $g(x)$ نستعمل المطابقة أو القسمة الإقليدية أو خوارزمية هورنر.

مثال: نعتبر كثير الحدود $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4$.

تحقق أنّ $x_0 = 2$ جذر لكثير الحدود $P(x)$ واستنتج تحليلا لـ $P(x)$.

الحل:

$$P(2) = 3(2)^3 - 11(2)^2 + 8(2) + 4 = 44 - 44 = \boxed{0}$$

$$P(2) = 0 \Rightarrow P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

① باستعمال المطابقة:

$$P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$
$$= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b - 2a = -11 \\ c - 2b = 8 \\ -2c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(x) = (x-2)(3x^2 - 5x - 2)}$$

② باستعمال القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4 & x - 2 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 6x^2 & 3x^2 - 5x - 2 \\ -5x^2 + 8x + 4 & \\ 5x^2 - 10x & \\ -2x + 4 & \\ 2x - 4 & \\ 0 & \end{array}$$

الشرح:

1. نقسم $3x^3$ على x فنحصل على $3x^2$.
2. نضرب $3x^2$ في x فنحصل على $3x^3$ وننقله إلى الطرف الثاني (تحت $P(x)$) مع تغيير إشارته.
3. نضرب $3x^2$ في -2 فنحصل على $-6x^2$ وننقله إلى الطرف الثاني مع تغيير إشارته.
4. نجمع حدود $P(x)$ مع الحدود التي تحصلنا عليها $(-3x^3+6x^2)$ ونكتب المجموع تحتها.
5. نكرر العملية مع $-5x^2$ ونواصل العملية لغاية الحصول على باقٍ معدوم.

$$\boxed{P(x)=(x-2)(3x^2-5x-2)}$$

③ باستعمال خوارزمية هورنر:

	①	②	③	④	⑤
		3	−11	8	4
⑥	2	× +	=		
		3	−5	−2	0
	⑦	⑧	⑨	⑩	⓪

$$\boxed{P(x)=(x-2)(3x^2-5x-2)}$$

الشرح:

1. نرسم جدولا يتكون من 3 أسطر و$(n+2)$ عمود حيث n يمثل درجة كثير الحدود $P(x)$.
2. نترك الخانتين ① و⑦ فارغتين ونضع في الخانة ⑥ الجذر α.
3. في الخانات ② ③ ④ ⑤ نضع معاملات $P(x)$.
4. في الخانة ⑧ نضع المعامل الموجود في الخانة ②.
5. لحساب المعاملات الموجودة في الخانات ⑨ ⑩ ⓪ ننجز العمليات التالية:

$$\begin{cases} \text{⑨} = \text{⑥}\times\text{⑧}+\text{③}\ (2\times 3-11=-5) \\ \text{⑩} = \text{⑥}\times\text{⑨}+\text{④}\ (2\times(-5)+8=-2) \\ \text{⓪} = \text{⑥}\times\text{⑩}+\text{⑤}\ (2\times(-2)+4=0) \end{cases}$$

6. المعاملات الموجودة في الخانات ⑧ ⑨ ⑩ هي معاملات كثير الحدود $Q(x)=ax^2+bx+c$ حاصل قسمة $P(x)$ على $(x-\alpha)$ أما الخانة ⓪ **فينبغي أن تكون معدومة** وإلا فالنتيجة خاطئة.

7. انتبه عند إدخال معاملات $P(x)$ إذا كان بعضها معدوما:

فمن أجل $P(x) = x^3 + x - 2$ يكون السطر العلوي كالتالي:

$$1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad -2$$

ومن أجل $P(x) = x^3 - 2$ يكون السطر العلوي كالتالي:

$$1 \qquad 0 \qquad 0 \qquad -2$$

ج. المعادلات من الدرجة الثانية:

- نسمي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^2 + bx + c = 0$، حيث a، b وc أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.
- يسمى العدد $b^2 - 4ac$ مميز ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ونرمز إليه بالرمز Δ.
- يسمى $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ الشكل النموذجي لثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$.
- لحل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$، نحسب المميّز Δ مع مراعاة الحالات التالية:

إذا كان:	**حلول المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هي:**	**يتم تحليل $ax^2 + bx + c$ على الشكل:**
$\Delta > 0$	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$a(x - x_1)^2$
$\Delta < 0$	**لا توجد حلول**	**لا يمكن تحليل $ax^2 + bx + c$**

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$ ثمّ استنتج تحليلا لـ $P(x)$

① $P(x) = -9x^2 - 3x + 2$; ② $P(x) = 2x^2 - 12x + 18$;

③ $P(x) = 6x^2 + x + 5$

① $P(x) = -9x^2 - 3x + 2$

$$\Delta = 9 + 72 = 81 \,;\, x_1 = \frac{3-9}{-18} = \frac{1}{3} \;;\; x_2 = \frac{3+9}{-18} = -\frac{2}{3}$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\} ; P(x) = -9\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)}$$

② $P(x) = 2x^2 - 12x + 18$; $\Delta = 144 - 144 = 0$; $x_1 = x_2 = \frac{12}{4} = 3$

$$\boxed{S = \{3\} ; P(x) = 2(x-3)^2}$$

③ $P(x) = 6x^2 + x + 5$; $\Delta = 1 - 120 = -119$

$\boxed{S = \emptyset ; P(x)}$ لا يمكن تحليل

ملاحظة:

① إذا كان $\boldsymbol{a+b+c=0}$: تقبل المعادلة حلين هما 1 و $\frac{c}{a}$

② إذا كان $\boldsymbol{a+c=b}$: تقبل المعادلة حلين هما $1-$ و $-\frac{c}{a}$

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين دون حساب المميز

① $x^2-5x+4=0\,;1-5+4=0 \Rightarrow x_1=1\,;x_2=4 \Rightarrow \boxed{S=\{1;4\}}$

② $x^2+3x+2=0\,;1+2=3 \Rightarrow x_1=-1\,;x_2=-2 \Rightarrow \boxed{S=\{-2;-1\}}$

د. <u>المتراجحات من الدرجة الثانية:</u>

- لحل متراجحة من الدرجة الثانية، نحسب المميّز Δ ونعيّن إشارة ثلاثي الحدود حسب الجدول التالي:

<table>
<tr><td colspan="4"><u>$\boldsymbol{\Delta< 0}$</u>
المعادلة $ax^2+bx+c=0$ لا تقبل حلولا
من أجل كل عدد حقيقي x، إشارة المعادلة ax^2+bx+c هي نفس إشارة a</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>$\boldsymbol{\Delta= 0}$</u>
المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلا مضاعفا x_1</td><td colspan="2"><u>$\boldsymbol{\Delta> 0}$</u>
المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2</td></tr>
<tr><td>$-\infty$ x_1 $+\infty$</td><td>x</td><td>$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$</td><td>x</td></tr>
<tr><td>إشارة a 0 إشارة a</td><td>ax^2+bx+c</td><td>إشارة a 0 إشارة $(-a)$ 0 إشارة a</td><td>ax^2+bx+c</td></tr>
</table>

مثال 1: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية

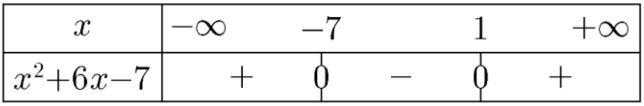
① $x^2+6x-7\geq 0$; ② $-x^2+7x-12>0$

③ $x^2+4x+4\leq 0$; ④ $4x^2+2x+3<0$;

⑤ $-x^2+6x-10\leq 0$; ⑥ $3x^2-6x+3>0$

الحل:

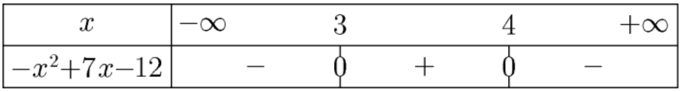
① $\Delta=64\,;x_1=-7\,;x_2=1$



x	$-\infty$		-7		1		$+\infty$
x^2+6x-7		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2+6x-7\geq 0 \Rightarrow \boxed{S=]-\infty;-7]\cup[1;+\infty[}$

② $\Delta=1\,;x_1=3\,;x_2=4$



x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$-x^2+7x-12$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$-x^2+7x-12>0 \Rightarrow \boxed{S=]3;4[}$

③ $\Delta = 0\ ; x_1 = x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
x^2+4x+4		$+$	0	$+$	

$x^2 + 4x + 4 \leq 0 \Rightarrow \boxed{S = \{-2\}}$

④ $\Delta = -44$

x	$-\infty$		$+\infty$
$4x^2+2x+3$		$+$	

$4x^2 + 2x + 3 < 0 \Rightarrow \boxed{S = \emptyset}$

⑤ $\Delta = -4$

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2+6x-10$		$-$	

$-x^2 + 6x - 10 \leq 0 \Rightarrow \boxed{S = \mathbb{R}}$

⑥ $\Delta = 0\ ; x_1 = x_2 = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$3x^2-6x+3$		$+$	0	$+$	

$3x^2 - 6x + 3 > 0 \Rightarrow \boxed{S = \mathbb{R} - \{1\}}$

مثال 2:

نعتبر كثير الحدود $f(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$.

1. أحسب $f(-1)$ و $f(2)$، ثمّ حلل $f(x)$.
2. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $f(x) \geq 0$.

الحل:

1. **حساب $f(-1)$ و $f(2)$، ثمّ تحليل $f(x)$**

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (x+1)(x-2)(ax^2 + bx + c)$$

① باستعمال المطابقة:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-2)(ax^2+bx+c) = (x^2-x-2)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax^3 - bx^2 - cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \\ &= ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b-2a)x^2 + (-2b-c)x - 2c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 \\ c - b - 2a = -11 \\ -2b - c = 9 \\ -2c = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x) = (x+1)(x-2)(x^2-9)}$$

② باستعمال خوارزمية هورنر:

	1	-1	-11	9	18
-1					
	1	-2	-9	18	0
2					
	$\underbrace{1}_{a}$	$\underbrace{0}_{b}$	$\underbrace{-9}_{c}$	0	0

$$\boxed{f(x) = (x+1)(x-2)(x^2-9)}$$

2. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $f(x) \geq 0$

$f(x) \geq 0 \Rightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 - 9) \geq 0$

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1\,; x_2 = 2\,; x_2 - 9 = 0 \Rightarrow x_3 = -3; x_4 = 3$

x	$-\infty$		-3		-1		2		3		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \in \left]-\infty; -3\right] \cup [-1; 2] \cup \left[3; +\infty\right[}$

ه. <u>مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية:</u>

$$ax^2 + bx + c = 0\,;\ \Delta \geq 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\,; P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

x_1 و x_2 هما حلا المعادلة $x^2 - Sx + P = 0$.

و. <u>تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية:</u>

الجدول التالي يوضح إشارة حلي المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$:

$P < 0$	$\Delta > 0\,; P > 0\,; S > 0$	$\Delta > 0\,; P > 0\,; S < 0$
تقبل المعادلة حلين مختلفين في الإشارة	تقبل المعادلة حلين موجبين	تقبل المعادلة حلين سالبين

ملاحظة: إذا كان a وc مختلفين في الإشارة فإنّ المميز Δ يكون موجبا لأنّ:

$$ac < 0 \Rightarrow -4ac > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

مثال: ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$(1-2m)x^2 - 2mx + m - 2 = 0 \ldots (E)$$

$$1)\ 1 - 2m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2} : (E) \Rightarrow -x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{تقبل المعادلة } (E) \text{ حلا وحيدا سالبا}}$$

$$2)\ 1 - 2m \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2} : \Delta = 4m^2 - 4(1-2m)(m-2)$$

$$= 12m^2 - 20m + 8 = 4(3m^2 - 5m + 2)$$

$$\Delta = 4(m-1)\left(m - \frac{2}{3}\right)\ ;\ P = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{1-2m}\ ; S = -\frac{b}{a} = \frac{2m}{1-2m}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m \in \left\{\frac{2}{3}; 1\right\}\ ; P = 0 \Rightarrow m = 2\ ; S = 0 \Rightarrow m = 0$$

m	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2 $+\infty$
Δ	$+$	$+$	$+$ 0	$-$ 0	$+$	$+$
P	$-$	$-$	$+$	▨	$+$ 0	$-$
S	$-$ 0	$+$	$-$	▨	$-$	$-$

$m \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup]2; +\infty[: P < 0 \Rightarrow \boxed{\text{تقبل المعادلة } (E) \text{ حلين مختلفين في الإشارة}}$

$m \in \left]\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right[\cup]1; 2[: \Delta > 0\ ;\ P > 0\ ; S < 0 \Rightarrow \boxed{\text{تقبل المعادلة } (E) \text{ حلين سالبين}}$

$m \in \left]\frac{2}{3}; 1\right[: \Delta < 0 \Rightarrow \boxed{\text{لا تقبل المعادلة } (E) \text{ حلولا}}$

$m = 0 : S = 0 \Rightarrow \boxed{\text{تقبل المعادلة } (E) \text{ حلين متعاكسين}}$

$m = \frac{1}{2} : \boxed{\text{تقبل المعادلة } (E) \text{ حلا وحيدا سالبا}}$

$m \in \left\{\frac{2}{3};1\right\}: \Delta=0\ ;\ P>0\ ;S<0 \Rightarrow$ تقبل المعادلة (E) حلا مضاعفا سالبا

$m=2: \Delta>0\ ;\ P=0\ ;S<0 \Rightarrow$ تقبل المعادلة (E) حلا معدوما وآخر سالبا

ز. المعادلات والمتراجحات مضاعفة التربيع:

لحل معادلة مضاعفة التربيع من الشكل $ax^4+bx^2+c=0$ نضع: $X=x^2$
ونحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ ثمّ نستنتج حلول المعادلة
$ax^4+bx^2+c=0$. يُسمى المجهول X مجهولا مساعدا.

مثال:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

① $x^4-5x^2+4=0$; ② $x^4-x^2-6=0$; ③ $x^4+6x^2+5=0$

① $x^4-5x^2+4=0\ ;X=x^2$; ① $X^2-5X+4=0$; $\Delta=9$;

$X=1$ أو $X=4 \Rightarrow x^2=1$ أو $x^2=4$

$x_1=-1\ ;x_2=1\ ;x_3=-2\ ;x_4=2 \Rightarrow \boxed{S=\{-2;-1;1;2\}}$

② $x^4-x^2-6=0\ ;X=x^2$; ② $X^2-X-6=0$; $\Delta=25$;

$X=-2$ أو $X=3 \Rightarrow x^2=3\ ;\ x_1=-\sqrt{3}\ ;x_2=\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{S=\left\{-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\right\}}$

لاحظ أنّ الحل $X=-2$ مرفوض لأنّ $X \geq 0$

③ $x^4+6x^2+5=0\ ;X=x^2$; ③ $X^2+6X+5=0$; $\Delta=16$;

$X=-1$ أو $X=-5 \Rightarrow \boxed{S=\emptyset}$

لاحظ أنّ الحلين $X=-1$ و$X=-5$ مرفوضان لأنّ $X \geq 0$.

ح. المعادلات والمتراجحات الصمّاء:

$\sqrt{a}=b$ يكافئ $a=b^2$ و $b \geq 0$

$$①\sqrt{1-x^2}=x \Leftrightarrow \begin{cases}1-x^2=x^2\\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2=1\\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=\frac{1}{2}\\ x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$②\sqrt{x^2+5}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+5=(x+1)^2\\ x+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+1=5\\ x\geq -1\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=2}$$

$$③\sqrt{x^2+5x+3}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+5x+3=(2x+1)^2\\ 2x+1\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-x-2=0\\ x\geq -\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1 \text{ أو } x=-\frac{2}{3}\\ x\geq -\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=1}$$

$$\boxed{\sqrt{a}=\sqrt{b} \text{ يكافئ } a=b \text{ و } b\geq 0}$$

$$①\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=x \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-1=0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$②\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=x+1 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x\geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=2}$$

$$③\sqrt{x^2+3}=\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3=x+2 \\ x+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1=0 \\ x\geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{S=\emptyset}$$

$$\boxed{\sqrt{a}>\sqrt{b} \text{ يكافئ } a>b \text{ و } b\geq 0}$$

$$①\sqrt{2x-1}>\sqrt{x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>x-4 \\ x-4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x\geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{S=[4;+\infty[}$$

$$②\sqrt{2x-1}>\sqrt{4-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>4-x \\ 4-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{5}{3} \\ x\leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{S=\left]\frac{5}{3};4\right]}$$

$$\boxed{\sqrt{a}>b \text{ يكافئ } \left(a>b^2 \text{ و } b\geq 0\right) \text{ أو } \left(a\geq 0 \text{ و } b<0\right)}$$

$$\boxed{\sqrt{a}<b \text{ يكافئ } a<b^2 \text{ و } a\geq 0 \text{ و } b\geq 0}$$

$$①\sqrt{2-x}>x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x>(x+4)^2 \\ x+4\geq 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} 2-x\geq 0 \\ x+4<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9x+14<0 \\ x\geq -4 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x\leq 2 \\ x<-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\in[-4;-2[\,\cup\,]-\infty;-4[\Leftrightarrow \boxed{S=]-\infty;-2[}$$

$$②x+3>\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1<(x+3)^2 \\ x+1\geq 0 \\ x+3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x+8>0 \\ x\geq -1 \\ x\geq -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x\in[-1;+\infty[\\ x\in[-3;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{S=[-1;+\infty[}$$

$$③\sqrt{x^2+2x-3}<2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3<(2x+1)^2 \\ x^2+2x-3\geq 0 \\ 2x+1\geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+2x+4>0 \\ x^2+2x-3\geq 0 \\ x\geq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x\in]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[\\ x\in\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{S=[1;+\infty[}$$

* * *

الاشتقاقية

أ. العدد المشتق:

f دالة معرّفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد من D_f. تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 إذا كانت:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$$

يسمى l العدد المشتق للدالة f في العدد x_0 ونرمز له بـ: $f'(x_0)$.

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0، فإنّ المنحنى البياني (C_f) للدالة f يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة x_0 معادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

ب. الدالة المشتقة للدالة f:

f دالة معرّفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$. نقول إنّ الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f. تُسمى الدالة التي ترفق بكل x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f على D_f ويرمز لها بـ: f'

ج. التقريب التآلفي لدالة:

f دالة معرّفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ و $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f على D_f. أحسن تقريب تآلفي بجوار x_0 للدالة f هو الدالة: $x\to f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

د. مشتقات الدوال المألوفة:

الدالة f	الدالة المشتقة f'	مجالات قابلية الاشتقاق
a	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

$u+v$	$u'+v'$	يجب أخذ شروط كل دالة بعين الاعتبار
$u.v$	$u'v+uv'$	
λu	$\lambda u'$	
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$	

تمارين تطبيقية:

التمرين 01:

ادرس قابلية اشتقاق الدوال التالية عند القيمة a وعيّن العدد المشتق $f'(a)$ ثمّ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a:

① ... $\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \\ a = -1 \end{cases}$ ، ② ... $\begin{cases} f(x) = x^3 + 2x - 5 \\ a = 0 \end{cases}$ ، ③ ... $\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt{x} \\ a = 4 \end{cases}$

④ ... $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} \\ a = 1 \end{cases}$ ، ⑤ ... $\begin{cases} f(x) = 3 + \dfrac{1}{x+1} \\ a = 2 \end{cases}$ ، ⑥ ... $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2} \\ a = 3 \end{cases}$

حل التمرين 01:

① $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1\ ;\ a = -1}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2+1-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2-2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(h-2)}{h} = \lim_{h\to 0} h-2 = -2 \Rightarrow \boxed{f'(-1) = -2}$$

$$(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -2(x+1) + 2 \Rightarrow \boxed{(T): y = -2x}$$

② $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 2x - 5\ ;\ a = 0}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3+2h-5+5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3+2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(h^2+2)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2+2 = 2 \Rightarrow \boxed{f'(0) = 2}$$

$$(T): y = f'(0)(x) + f(0) = 2x - 5 \Rightarrow \boxed{(T): y = 2x - 5}$$

③ $\boldsymbol{f(x) = 1 + \sqrt{x}\ ;\ a = 4}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+\sqrt{4+h}-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)\left(\sqrt{4+h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\boxed{f'(4)=\frac{1}{4}}$$

$$(T):y=f'(4)(x-4)+f(4)=\frac{1}{4}(x-4)+3\Rightarrow\boxed{(T):y=\frac{1}{4}x+2}$$

④ $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}\ ;a=1}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h}{1+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(1+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{1+h}=-1\Rightarrow\boxed{f'(1)=-1}$$

$$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)=-(x-1)+1\Rightarrow\boxed{(T):y=-x+2}$$

⑤ $\boldsymbol{f(x)=3+\frac{1}{x+1}\ ;a=-2}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3+\frac{1}{-2+h+1}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+\frac{1}{h-1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{h-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(h-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h-1}=-1\Rightarrow\boxed{f'(-2)=-1}$$

$$(T):y=f'(-2)(x+2)+f(-2)=-(x+2)+2\Rightarrow\boxed{(T):y=-x}$$

⑥ $\boldsymbol{f(x)=\frac{2x+1}{x-2}\ ;a=3}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(3+h)+1}{3+h-2}-7}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h+7}{h+1}-7}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-5h}{h+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-5h}{h(h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-5}{h+1}=-5\Rightarrow\boxed{f'(3)=-5}$$

$$(T):y=f'(3)(x-3)+f(3)=-5(x-3)+7\Rightarrow\boxed{(T):y=-5x+22}$$

* * *

التمرين 02:

لتكن f الدالة المعرّفة على المجال $[-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=\sqrt{1+x}$.

1. ادرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0.
2. استنتج أحسن تقريب تآلفي للعدد $\sqrt{1+h}$ عندما يؤول h إلى 0.
3. عيّن قيمة مقرّبة لكل من العددين $\sqrt{0{,}99}$ و $\sqrt{1{,}002}$.

* * *

حل التمرين 02:

$\boldsymbol{f(x)=\sqrt{1+x}}$، $\boldsymbol{D_f=[-1;+\infty[}$

1. **دراسة قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0.**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

منه نستنتج أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 و$f'(0)=\frac{1}{2}$.

2. **استنتاج أحسن تقريب تآلفي للعدد $\sqrt{1+h}$ عندما يؤول h إلى 0.**

$$\sqrt{1+h}\approx f'(0)h+f(0)\Rightarrow \boxed{\sqrt{1+h}\approx\frac{1}{2}h+1}$$

3. **تعيين قيمة مقرّبة لكل من العددين $\sqrt{0,99}$ و $\sqrt{1,002}$.**

$$\sqrt{0{,}99}=\sqrt{1\underbrace{-0{,}01}_{h}}\approx\frac{1}{2}(-0{,}01)+1\approx\boxed{0{,}995}$$

$$\sqrt{1{,}002}=\sqrt{1+\underbrace{0{,}002}_{h}}\approx\frac{1}{2}(0{,}002)+1\approx\boxed{1{,}001}$$

* * *

التمرين 03:

احسب مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=x^3-4x+5$; 2) $f(x)=(x^2-1)^3$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+3x+4}$;

4) $f(x)=\sqrt{3x-6}$; 5) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$; 6) $f(x)=\cos^2 3x$;

7) $f(x)=x+\sin^3(\pi x)$; 8) $f(x)=\sin x.\cos x$; 9) $f(x)=|x^2+4x-5|$

* * *

حل التمرين 03:

1) $f'(x) = \boxed{3x^2 - 4}$; 2) $f'(x) = 3(x^2-1)^2(2x) = \boxed{6x(x^2-1)^2}$

$$3)\ f'(x) = \frac{(2x+3)(x^2+3x+4) - (2x+3)(x^2+3x-4)}{(x^2+3x+4)^2}$$

$$= \frac{(2x+3)[(x^2+3x+4) - (x^2+3x-4)]}{(x^2+3x+4)^2} = \boxed{\frac{8(2x+3)}{(x^2+3x+4)^2}}$$

$$4)\ f'(x) = \boxed{\frac{3}{2\sqrt{3x-6}}}\ ;\ 5)\ f'(x) = \sqrt{x^2+1} + x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

6) $f'(x) = 2\cos 3x\ (-3\sin 3x) = \boxed{-6\cos 3x\,.\sin 3x}$

7) $f'(x) = 1 + 3\sin^2(\pi x) \times \pi\cos(\pi x) = \boxed{1 + 3\pi\cos(\pi x)\,.\sin^2(\pi x)}$

8) $f'(x) = \cos x\,.\cos x - \sin x\,.\cos x = \boxed{\cos^2 x - \sin^2 x}$

9) $f(x) = |x^2+4x-5|$; $x^2+4x-5 = 0 \Rightarrow x_1 = -5\ ; x_2 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4x-5, & x \in]-\infty;-5] \cup [1;+\infty[\\ -x^2-4x+5, & x \in]-5;1[\end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+4, & x \in]-\infty;-5] \cup [1;+\infty[\\ -2x-4, & x \in]-5;1[\end{cases}$$

* * *

تطبيقات الاشتقاقية

أ. **دراسة اتجاه تغيّر دالة:**

لتكن دالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة.

- إذا كانت f' موجبة على المجال D_f، فإنّ الدالة f متزايدة على المجال D_f.
- إذا كانت f' سالبة على المجال D_f، فإنّ الدالة f متناقصة على المجال D_f.
- إذا كانت f' معدومة على المجال D_f، فإنّ الدالة f ثابتة على المجال D_f.

إذا كانت الدالة f إمّا متزايدة تماما أو متناقصة تماما على مجال D_f، نقول إنّها رتيبة على المجال D_f.

ب. **حصر دالة:**

لتكن دالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على مجال $[a,b]$ و f' دالتها المشتقة.

- إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a,b]$ فإنّ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$: $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
- إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a,b]$ فإنّ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$: $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$.

ج. **تعيين عبارة دالة:**

لتكن دالة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة.

- القول إنّ منحنى الدالة f يقبل عند النقطة $(x_0; y_0)$ مماسا ميله a (أو يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$) معناه: $\boxed{f'(x_0) = a \text{ و} f(x_0) = y_0}$.
- القول إنّ منحنى الدالة f يقبل عند النقطة $A(x_0; y_0)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل معناه: $\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ و} f(x_0) = y_0}$.

د. **القراءة البيانية:**

- لقراءة قيمة $f'(x_0)$ بيانيا نحسب ميل المماس عند النقطة ذات الفاصلة x_0 وذلك بأخذ نقطتين من المماس (A و B) وحساب الميل: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- إذا كانت $f(x_0)$ قيمة حدّية محلية للدالة f، فإنّ $f'(x_0) = 0$.
- إذا كانت النقطة $(x_0; y_0)$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f، فإنّ $f''(x_0) = 0$.

* * *

تمارين تطبيقية:

التمرين 01:

ادرس اتجاه تغيّر الدوال التالية على مجال تعريفها ثمّ شكل جدول تغيراتها.

① $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ ، $D_f = \mathbb{R}$

② $g(x) = \frac{4x+3}{1-x}$ ، $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

③ $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ ، $D_h =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

حل التمرين 01:

① $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x = \boxed{4x(x^2 - 1)}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- من أجل $x \in]-\infty; -1[\cup]0; 1[$: $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة.
- من أجل $x \in [-1; 0] \cup [1; +\infty[$: $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة.

جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

② $g(x) = \dfrac{4x+3}{1-x} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{4(1-x) - (-1)(4x+3)}{(1-x)^2} = \boxed{\dfrac{7}{(1-x)^2}}$

- من أجل $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما.

جدول تغيّرات الدالة g:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
$g(x)$	-4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-4

③ $h(x)=\sqrt{x^2+2x-3} \Rightarrow h'(x)=\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-3}}=\boxed{\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}}$

- من أجل $x \in]-\infty;-3[$: $h'(x)<0$ ومنه الدالة h متناقصة.
- من أجل $x \in]1;+\infty[$: $h'(x)>0$ ومنه الدالة h متزايدة.

جدول تغيّرات الدالة h:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	▨	‖	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	▨	0	↗	$+\infty$

ملاحظات:

1. الهدف من التطبيق هو دراسة اتجاه التغيّر، أمّا حساب النهايات فسيأتي في درس لاحق.
2. لاحظ أنّ الدالة h معرّفة عند -3 و 1 لكنها غير قابلة للاشتقاق عند هاتين القيمتين.

* * *

التمرين 02:

1. f دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$
عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث يقبل المنحنى الممثل للدالة f عند النقطة $(1;-3)$ مماسا ميله $\frac{2}{3}$.
2. g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=ax^2+bx+c$
عيّن الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يشمل المنحنى الممثل للدالة f النقطة $(0;3)$ ويقبل مماسا في $\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{8}\right)$ موازيا لحامل محور الفواصل.
3. h دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ بـ: $h(x)=\frac{x^2+2x-3}{2x-3}$
بيّن أنّ المنحنى (C_h) يقبل عند نقطتين A و B مماسين ميل كل منهما يساوي 4- ، ثمّ اكتب معادلتي هذين المماسين.

* * *

حل التمرين 02:

1. $f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$، $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

$$f'(x)=\frac{(2x+\alpha)(x+2)-(x^2+\alpha x+\beta)}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+2\alpha-\beta}{(x+2)^2}$$

$$\begin{cases} f(1) = -3 \\ f'(1) = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+\alpha+\beta}{3} = -3 \\ \dfrac{5+2\alpha-\beta}{9} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = -10 \\ 2\alpha-\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -7 \end{cases}}$$

$D_g = \mathbb{R}$ ،$g(x) = ax^2 + bx + c$ .2

$g'(x) = 2ax + b$

$$\begin{cases} g(0) = 3 \\ g\left(\dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{1}{8} \\ g'\left(\dfrac{5}{4}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ \dfrac{25}{16}a + \dfrac{5}{4}b + c = -\dfrac{1}{8} \\ \dfrac{5}{2}a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ \dfrac{25}{16}a + \dfrac{5}{4}b = -\dfrac{25}{8} \\ \dfrac{5}{2}a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 25a + 20b = -50 \\ b = -\dfrac{5}{2}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ -25a = -50 \\ b = -\dfrac{5}{2}a \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 3 \end{cases}}$$

$D_h = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ ، $h(x) = \frac{x^2+2x-3}{2x-3}$ .3

$$h'(x) = \frac{(2x+2)(2x-3) - 2(x^2+2x-3)}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2-6x}{(2x-3)^2}$$

$$h'(x) = -4 \Rightarrow \frac{2x^2-6x}{(2x-3)^2} = -4 \Rightarrow 2x^2 - 6x = -4(4x^2 - 12x + 9)$$

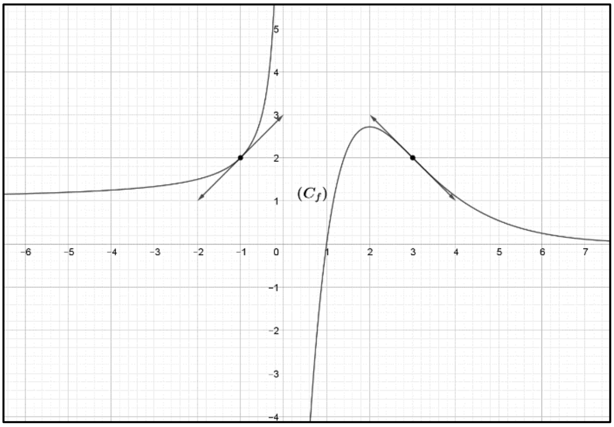
$$18x^2 - 54x + 36 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 2 \Rightarrow \boxed{A(1;0); B(2;5)}$$

$$(T_1): y = h'(1)(x-1) + h(1) = -4(x-1) \Rightarrow \boxed{(T_1): y = -4x + 4}$$

$$(T_2): y = h'(2)(x-2) + h(2) = -4(x-2) + 5 \Rightarrow \boxed{(T_2): y = -4x + 13}$$

* * *

التمرين 03:



ليكن الشكل المقابل المنحنى البياني للدالة f.

1. احسب $f'(2)$، $f'(-1)$ و $f'(3)$.
2. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم عين إشارة $f(x)$.
3. نضع : $h(x) = [f(x)]^2$.
   - أ- عين مجموعة تعريف الدالة h.
   - ب- احسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة h.

* * *

حل التمرين 03:

1. حساب $f'(2)$، $f'(-1)$ و $f'(3)$.

$f'(2) = 0$ (قيمة حدّية)

$f'(-1) = 1$: $\left(A(-1;2); B(0;3); a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{0-(-1)} = 1\right)$

$f'(3) = -1$: $\left(C(3;2); D(2;3); a' = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3-2}{2-3} = -1\right)$

2. جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f(2)$	↘	0

$$f(2) \approx 2{,}7$$

تعيين إشارة $f(x)$.

- من أجل $x \in]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$: $f(x) \geq 0$
- من أجل $x \in]0; 1[$: $f(x) < 0$

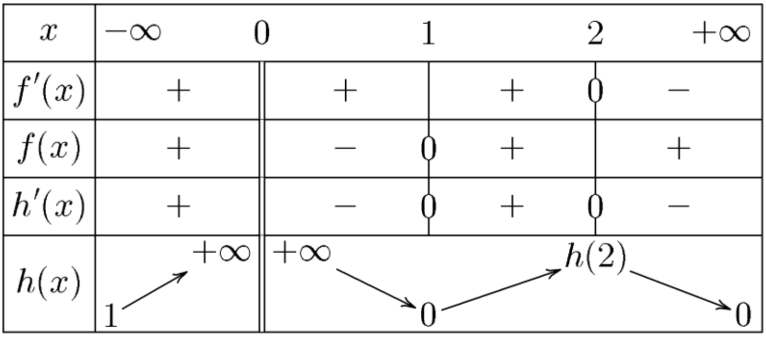
3. $h(x) = [f(x)]^2$.
   - أ- تعيين مجموعة تعريف الدالة h.

$D_h = \mathbb{R}^*$

   - ب- حساب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

$h'(x) = 2f(x).f'(x)$

جدول تغيرات الدالة h.



x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$h(2)$	↘	0

$$h(2) \approx 2,7^2 \approx 7,3$$

* * *

النهايات

أ. مفهوم النهاية:

- القول أنّ نهاية الدالة f عند x_0 هي l يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث:
  إذا كان $0 < |x - x_0| < \alpha$ يكون $0 \leq |f(x) - l| < e$
  ونكتب: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.
- القول أنّ نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي l يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث:
  إذا كان $x > B$ يكون $0 \leq |f(x) - l| < e$
  ونكتب: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.
- القول أنّ نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث:
  إذا كان $x > B$ يكون $f(x) > A$
  ونكتب: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- القول أنّ نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي $+\infty$ يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث:
  إذا كان $x < -B$ يكون $f(x) > A$
  ونكتب: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
- القول أنّ نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أكبر هي $+\infty$ يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0 < x - x_0 < \alpha$ يكون $f(x) > A$
  ونكتب: $\lim_{x \xrightarrow[x > x_0]{} x_0} f(x) = +\infty$.
- القول أنّ نهاية الدالة f عند x_0 بقيم أصغر هي $+\infty$ يعني أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0 < x_0 - x < \alpha$ يكون $f(x) > A$
  ونكتب: $\lim_{x \xrightarrow[x < x_0]{} x_0} f(x) = +\infty$.

ب. عمليات على النهايات:

f و g دالتان. l و l' عددان حقيقيان و a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$

نهاية مجموع دالتين:

$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	l	l	l	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	l'	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$
$-\infty$	ح ع ت	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$l+l'$	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$

نهاية جداء دالتين:

0	$\ldots\infty$	l	l	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$
$\ldots\infty$	$\ldots\infty$	$\ldots\infty$	l'	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$
ح ع ت	$\ldots\infty$ ②	$\ldots\infty$ ①	$l\times l'$	$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\times g(x)]$

نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\ldots\infty$	$\ldots\infty$	l	l	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$
$\ldots\infty$	l	$\ldots\infty$	$l'\neq 0$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$
ح ع ت	$\ldots\infty$ ①	0	$\dfrac{l}{l'}$	$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$

①: إذا كان العدد l و ∞ من نفس الإشارة تكون نهاية الجداء (أو حاصل القسمة) $+\infty$.

إذا كان العدد l و ∞ مختلفين في الإشارة تكون نهاية الجداء (أو حاصل القسمة) $-\infty$.

②: إذا كانت نهايتا الدالتين f و g من نفس الإشارة تكون نهاية الجداء $+\infty$.

إذا كانت نهايتا الدالتين f و g مختلفتين في الإشارة تكون نهاية الجداء $-\infty$.

أمثلة:

$$\lim_{\substack{x\longrightarrow 2\\ x<2}} \underbrace{(2x+3)}_{\to 7}\underbrace{\left(\frac{5 \quad\to 5}{x-2\to 0^-}\right)}_{\to-\infty} = -\infty\ ;\ \lim_{\substack{x\longrightarrow 3\\ x>3}} \underbrace{(-3x)}_{\to-9}\underbrace{\left(\frac{-1\quad\to -1}{x-3\to 0^+}\right)}_{\to-\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(2x+3)}_{\to-\infty}\underbrace{(x^2-1)}_{\to+\infty} = -\infty\ ;\ \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(2x+3)}_{\to+\infty}\underbrace{(x^2-1)}_{\to+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x+2)}_{\to-\infty}\underbrace{(3x-1)}_{\to-\infty} = +\infty$$

بعض نهايات الدوال المرجعية:

	$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

النهاية عند ∞ $(\pm)$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدّها الأعلى درجة عند ∞ $(\pm)$

النهاية عند ∞ $(\pm)$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدّين الأعلى درجة عند ∞ $(\pm)$

مثال 1: $\lim_{x \to -\infty} 3x^2 + 2x + 7 = \lim_{x \to -\infty} 3x^2 = \boxed{+\infty}$

مثال 2: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+4}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = \boxed{+\infty}$

مثال 3: $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-5x+1}{2x^2+3x-7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

مثال 4: $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{x^2-6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = \boxed{0}$

حالات عدم التعيين:

① $\infty - \infty$; ② $0 \times \infty$; ③ $\frac{\infty}{\infty}$; ④ $\frac{0}{0}$

كيفية إزالة حالات عدم التعيين:

الحالة الأولى: ح ع ت من الشكل $\infty - \infty$

نخرج الحد الأعلى درجة عاملا مشتركا، أو نستعمل القاعدة الخاصة بنهاية دالة كثير حدود عند $-\infty$ أو $+\infty$، ونستعمل المرافق عند حساب نهاية دالة صمّاء:

مثال 1:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \boxed{+\infty}$$

مثال 2:

$$\lim_{x \to -\infty} x^4 + x^3 + 7x^2 + 8x - 12 = \lim_{x \to -\infty} x^4 = \boxed{+\infty}$$

مثال 3:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \begin{matrix} \to 1 \\ \to \infty \end{matrix} = \boxed{0}$$

الحالة الثانية: ح ع ت من الشكل $0 \times \infty$

ننشر الجداء، أو نستعمل المرافق لحساب نهاية دالة صمّاء:

مثال 1:

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\boxed{0}$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{x}{x+1}\right)}_{\to 1}\sqrt{x+1}=\boxed{+\infty}$$

الحالة الثالثة: ح ع ت من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

نخرج الحد الأعلى درجة عاملا مشترك في البسط والمقام ثمّ نختزل، أو نستعمل القاعدة الخاصة بنهاية دالة ناطقة عند $-\infty$ أو $+\infty$:

مثال 1:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-x+5}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-x+5}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\underbrace{\left(3-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}_{\to 3}}{\underbrace{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 1}}=\boxed{-\infty}$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=\boxed{+\infty}$$

الحالة الرابعة: ح ع ت من الشكل $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

نخرج الحد $(x-x_0)$ عاملا مشتركا ثمّ نختزل الكسر:

مثال 1:

$$\lim_{x\to\mathbf{1}}\frac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-\mathbf{1})(4x+7)}{(x-\mathbf{1})(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{4x+7}{x+3}=\boxed{\frac{11}{4}}$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to-\mathbf{2}}\frac{x^3+8}{x^2-4}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+\mathbf{2})(x^2-2x+4)}{(x+\mathbf{2})(x-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2x+4}{x-2}=\boxed{-3}$$

ج. النهايات والمستقيمات المقاربة:

1) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow$ المستقيم $\boldsymbol{x=a}$ مستقيم مقارب عمودي (يوازي محور التراتيب)

2) $\lim_{x\to\infty} f(x)=b \Rightarrow$ المستقيم $\boldsymbol{y=b}$ مستقيم مقارب أفقي (يوازي محور الفواصل)

3) $\lim_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=0 \Rightarrow$ المستقيم $\boldsymbol{y=ax+b}$ مستقيم مقارب مائل

ملاحظة :

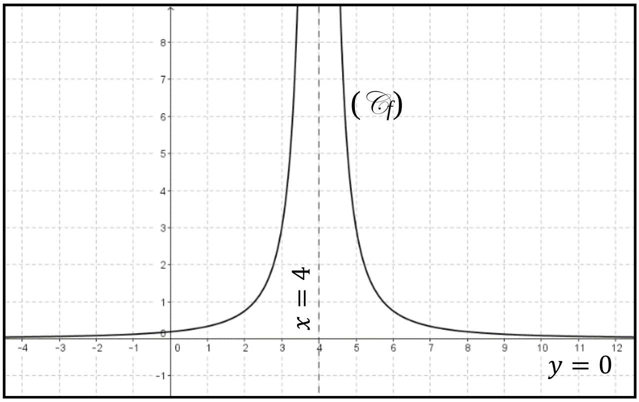
إذا كانت $f(x) = ax + b + g(x)$ و$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ ، فإنّ المستقيم (Δ)
ذا المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار (∞).

مثال 1: $\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{(x-4)^2}}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{(x-4)^2} = 0\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{(x-4)^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 4}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 4}} \frac{3}{(x-4)^2} = +\infty\ ;\ \lim_{\substack{> \\ x\to 4}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 4}} \frac{3}{(x-4)^2} = +\infty$$

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $\boxed{x = 4}$ وآخر أفقيا معادلته : $\boxed{y = 0}$



مثال 2: $\boldsymbol{f(x) = x - 2 + \frac{3}{x-1}}$

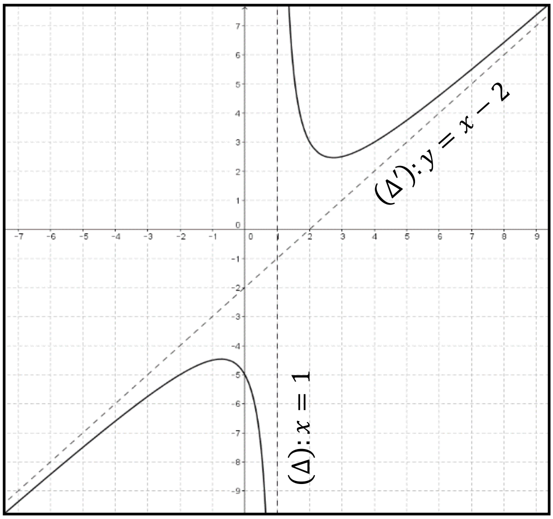
$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} x - 2 + \frac{3}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} x - 2 + \frac{3}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x-1} = 0$$

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيما مقاربا عموديا $\boxed{(\Delta): x = 1}$ وآخر مائلا $\boxed{(\Delta'): y = x - 2}$



د. دراسة دالة عددية:

مخطط دراسة دالة:

1. مجموعة التعريف
   - تحديد مجموعة التعريف إذا لم تكن قد أعطيت في النص.
   - دراسة شفعية الدالة أو دوريتها قصد تقليص مجموعة الدراسة وتحديد مراكز أو محاور تناظر المنحنى الممثل للدالة.
2. حساب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة.
3. دراسة اتجاه تغيّر الدالة.
   - حساب المشتقة على المجالات التي تقبل عليها الدالة الاشتقاق.
   - دراسة إشارة المشتقة واستنتاج اتجاه تغيّر الدالة.
   - تحديد القيم الحدّية في حالة وجودها.
4. تشكيل جدول تغيّرات الدالة.
5. تحديد المستقيمات المقاربة.
6. التمثيل البياني للدالة.
   - رسم المستقيمات المقاربة.
   - تمثيل النقاط المساعدة (النقط الحدية ونقط تقاطع المنحنى مع محوري الإحداثيات).
   - رسم المماسات عند القيم الحدّية وأخرى مطلوبة في النص.
   - استغلال عناصر تناظر المنحنى إن وجدت.

* * *

تمارين تطبيقية:

التمرين 01:

I- احسب النهايات التالية:

$$① \lim_{x\to+\infty}\left(2x+1-\frac{4}{x}\right)\ ;\ ② \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{(x+1)^2}\ ;\ ③ \lim_{x\to0}\frac{2x^2+7x-3}{x^2};$$

$$④ \lim_{x\to2}\frac{2x^2-4x}{x-2}\ ;\ ⑤ \lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}\ ;\ ⑥ \lim_{x\to1}\frac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}\ ;$$

$$⑦ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\ ;\ ⑧ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-6x+10}+x+2.$$

II- احسب النهايات للدالة f عند حدود مجموعة تعريفها وعيّن معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}$) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$$①f(x)=\frac{x^2-4x+5}{x^2-4x-5};②f(x)=1+\frac{3x}{1-4x^2};③f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}$$

حل التمرين 01:

I- حساب النهايات التالية :

$$① \lim_{x\to+\infty}\left(2x+1-\frac{4}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\underbrace{\left(2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}_{\to2}=\boxed{+\infty}$$

$$② \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}3x=\boxed{-\infty}$$

$$③ \lim_{x\to0}\frac{2x^2+7x-3\to-3}{x^2\qquad\to0^+}=\boxed{-\infty}$$

$$④ \lim_{x\to2}\frac{2x^2-4x\to0}{x-2\quad\to0}=\lim_{x\to2}\frac{2x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}2x=\boxed{4}$$

$$⑤ \lim_{x\to3}\frac{x^2+2x-15\to0}{x-3\quad\to0}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+5)}{x-3}=\lim_{x\to3}x+5=\boxed{8}$$

$$⑥ \lim_{x\to1}\frac{4x^2+3x-7\to0}{x^2+2x-3\to0}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{4x+7}{x+3}=\boxed{\frac{11}{4}}$$

$$⑦ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1\to0}{x-2\quad\to0}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

⑧ $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-6x+10}+x+2$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-6x+10}+x+2\right)\left(\sqrt{x^2-6x+10}-x-2\right)}{\sqrt{x^2-6x+10}-x-2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-6x+10)-(x+2)^2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}-x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-10x+6}{|x|\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}}-x-2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(10-\frac{6}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}}+1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{10-\frac{6}{x}}{\left(\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}}+1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \frac{10}{2} = \boxed{5}$$

II- حساب النهايات للدالة f وتعيين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}$)

① $f(x) = \dfrac{x^2-4x+5}{x^2-4x-5}$; $x^2-4x-5=0 \Rightarrow x_1=-1$; $x_2=5$

$Df =]-\infty;-1[\cup]-1;+5[\cup]+5;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = \boxed{1};\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}-1} \frac{x^2-4x+5 \to 10}{x^2-4x-5 \to 0^+} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}-1} \frac{x^2-4x+5 \to 10}{x^2-4x-5 \to 0^-} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}+5} f(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}+5} \frac{x^2-4x+5 \to 10}{x^2-4x-5 \to 0^-} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}+5} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}+5} \frac{x^2-4x+5 \to 10}{x^2-4x-5 \to 0^+} = \boxed{+\infty}$$

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتيهما : $\boxed{x=-1}$ و $\boxed{x=5}$

وآخر أفقيا معادلته : $\boxed{y=1}$

② $f(x) = 1+\dfrac{3x}{1-4x^2}$; $1-4x^2=0 \Rightarrow x^2=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x_1=-\dfrac{1}{2}$; $x_2=\dfrac{1}{2}$

$$Df = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right[\cup\left]+\frac{1}{2};+\infty\right[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{-4x^2} = 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-4x} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{-4x^2} = 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{-4x} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}-\frac{1}{2}} f(x) = 1 + \lim_{x\overset{<}{\to}-\frac{1}{2}}\frac{3x}{1-4x^2}\begin{matrix}\to -\frac{3}{2}\\ \to 0^-\end{matrix} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-\frac{1}{2}} f(x) = 1 + \lim_{x\overset{>}{\to}-\frac{1}{2}}\frac{3x}{1-4x^2}\begin{matrix}\to -\frac{3}{2}\\ \to 0^+\end{matrix} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}+\frac{1}{2}} f(x) = 1 + \lim_{x\overset{<}{\to}+\frac{1}{2}}\frac{3x}{1-4x^2}\begin{matrix}\to +\frac{3}{2}\\ \to 0^+\end{matrix} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}+\frac{1}{2}} f(x) = 1 + \lim_{x\overset{>}{\to}+\frac{1}{2}}\frac{3x}{1-4x^2}\begin{matrix}\to +\frac{3}{2}\\ \to 0^-\end{matrix} = \boxed{-\infty}$$

المنحنى ($\mathcal{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتيهما : $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$ و $\boxed{x=\frac{1}{2}}$

وآخر أفقيا معادلته : $\boxed{y=1}$

③ $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\,;\, x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2\,;\, x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$

$Df=[1;+\infty[$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}1}\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1} = \boxed{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)-(x-1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}} = 0$$

المنحنى ($\mathcal{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا بجوار $(+\infty)$ معادلته : $\boxed{y=0}$

* * *

التمرين 02:

لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ: $f(x)=\frac{-x^2+5x+5}{x-3}$ و ($\mathcal{C}$) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث من أجل كل $x \neq 3$ فإنّ:
$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$
2. احسب نهايات الدالة f عند حدود مجال تعريفها.

3. بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يُطلب تعيين معادلتيهما.

4. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

* * *

حل التمرين 02:

$f(x) = \frac{-x^2+5x+5}{x-3}$ ، $Df = \mathbb{R} - \{3\}$

1. تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$

باستعمال القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} -x^2+5x+5 & x-3 \\ \cline{2-2} x^2-3x & -x+2 \\ 2x+5 & \\ -2x+6 & \\ 11 & \end{array}$$

$$\boxed{f(x) = -x+2+\frac{11}{x-3}}$$

باستعمال خوارزمية هورنر:

	-1	5	5
3			
	-1	2	11

2. حساب نهايات الدالة f عند حدود مجال تعريفها

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} -x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} -x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\overset{<}{x\to3}} f(x) = \lim_{\overset{<}{x\to3}} \frac{-x^2+5x+5 \to 11}{x-3 \quad \to 0^-} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\overset{>}{x\to3}} f(x) = \lim_{\overset{>}{x\to3}} \frac{-x^2+5x+5 \to 11}{x-3 \quad \to 0^+} = \boxed{+\infty}$$

.3 بيان أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين وتعيين معادلتيهما

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 3}} f(x) = -\infty \; ; \; \lim_{\substack{> \\ x\to 3}} f(x) = +\infty$$

$\Longrightarrow$ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب $(D) : x = 3$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) - (-x+2) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{11}{x-3} = 0$$

$\Longrightarrow$ مستقيم مقارب مائل $(\Delta) : y = -x + 2$

.4 دراسة وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ)

$$f(x) - (-x+2) = \frac{11}{x-3}$$

x	$-\infty$ $\quad$ 3	$+\infty$
$f(x) - (-x+2)$	$-$	$+$
الوضعية	(Cf) تحت (Δ)	(Cf) فوق (Δ)

* * *

التمرين 03:

f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$.

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
2. أ. احسب $f'(x)$، ثمّ ادرس إشارتها على $\mathbb{R}$.
   ب. احسب $f(0)$ و $f(-1)$، ثمّ شكل جدول تغيّرات الدالة f.
3. أ. تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = (x-1)(2x^2+5x+5)$.
   ب. عيّن نقط تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع حامل محور الفواصل.
4. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها $\left(-\frac{1}{2}\right)$، ثمّ اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة A.
5. أنشئ المماس (T) والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.
6. حل بيانيا المتراجحة: $f(x) \geq 0$.
7. لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2|x|^3 + 3x^2 - 5$.
   (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   أ. اثبت أنّ الدالة g زوجية.
   ب. استنتج رسم المنحنى (C_g) انطلاقا من المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

* * *

حل التمرين 03:

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$ ، $D_f = \mathbb{R}$

1. حساب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 + 3x^2 - 5 = \lim_{x\to-\infty} x^3 \underbrace{\left(2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3}\right)}_{\to 2} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 + 3x^2 - 5 = \lim_{x\to+\infty} x^3 \underbrace{\left(2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3}\right)}_{\to 2} = \boxed{+\infty}$$

2. أ. حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها على $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x = \boxed{6x(x+1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \,;\, x_2 = 0$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ب. حساب $f(0)$ و $f(-1)$.

$f(0) = -5$ ، $f(-1) = -4$

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	-5	↗	$+\infty$

3. أ. التحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = (x-1)(2x^2+5x+5)$.

$$(x-1)(2x^2+5x+5) = 2x^3 + 5x^2 + 5x - 2x^2 - 5x - 5$$

$$= 2x^3 + 3x^2 - 5 = f(x)$$

ب. تعيين نقط تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع حامل محور الفواصل.

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)\underbrace{(2x^2+5x+5)}_{\Delta=-15} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{(C_f) \cap (xx') = \{(1;0)\}}$$

4. بيان أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها $\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$f''(x) = 12x + 6 \; ; \; f''(x) = 0 \Rightarrow 12x + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة A.

$$(T): y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) \; ; \; f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \; ; \; f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}$$

$$(T): y = -\frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{9}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}}$$

5. إنشاء المماس (T) والمنحنى $(\mathscr{C})$.
6. حل بيانيا المتراجحة: $f(x) \geq 0$.

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow \boxed{S = [1; +\infty[}$$

7. $g(x) = 2|x|^3 + 3x^2 - 5$ ، $D_g = \mathbb{R}$

أ. اثبات أنّ الدالة g زوجية.

D_g متناظر بالنسبة إلى الصفر، ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$g(-x) = 2|-x|^3 + 3(-x)^2 - 5 = 2|x|^3 + 3x^2 - 5 = g(x)$$

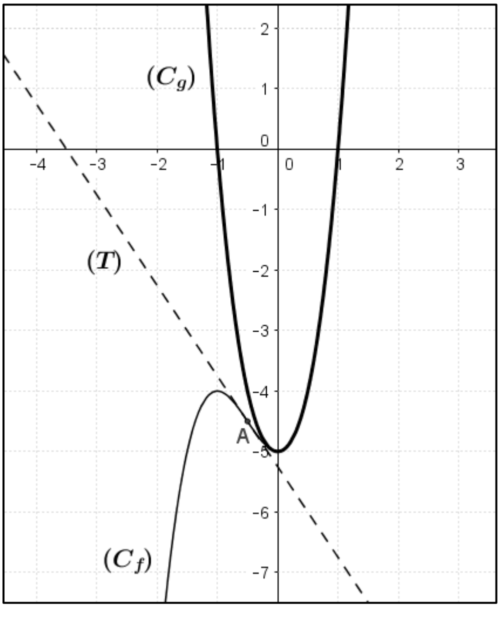
منه نستنتج أنّ الدالة g زوجية.

ب. استنتاج رسم المنحنى (C_g) انطلاقا من المنحنى $(\mathscr{C})$.

من أجل $x \geq 0$، لدينا: $|x| = x$ أي $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5 = f(x)$

ومنه نستنتج أنّ المنحنى (C_g) ينطبق على المنحنى (C_f) على المجال $[0; +\infty[$

ثمّ نرسم (C_g) على المجال $]-\infty; 0]$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.



التمرين 04:

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$.

$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. تحقق أنّ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1، $f(x)=2+\frac{1}{2x-2}$.
2. احسب النهايات للدالة f ثمّ فسّر النتائج هندسيا.
3. أ. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1، $f'(x)=\frac{-2}{(2x-2)^2}$.
   ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها.
4. عيّن تقاطع $(\mathscr{C})$ مع حاملي محوري الإحداثيات.
5. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 2.
6. ارسم (Δ) و$(\mathscr{C})$.
7. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

* * *

حل التمرين 04:

$f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$، $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

1. التحقق أنّ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1، $f(x)=2+\frac{1}{2x-2}$.

$$2+\frac{1}{2x-2}=\frac{2(2x-2)+1}{2x-2}=\frac{4x-3}{2x-2}=f(x)$$

2. حساب النهايات للدالة f وتفسير النتائج هندسيا.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2+\frac{1}{2x-2}=\boxed{2}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{2x-2}=\boxed{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{4x-3}{2x-2}\begin{matrix}\to 1\\ \to 0^-\end{matrix}=\boxed{-\infty};\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{4x-3}{2x-2}\begin{matrix}\to 1\\ \to 0^+\end{matrix}=\boxed{+\infty}$$

نستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما أفقي معادلته $y=1$ والآخر عمودي معادلته $x=1$.

3. أ. بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1، $f'(x)=\frac{-2}{(2x-2)^2}$.

$$f'(x)=\frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{(2x-2)^2}=\boxed{\frac{-2}{(2x-2)^2}}$$

ملاحظة: يمكن حساب $f'(x)$مباشرة باستعمال القاعدة:

$$\boxed{f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}}$$

ب. استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f

بما أنّ $f'(x) < 0$ ، فإنّ الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;1[$ و$]1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\parallel$	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	2

4. تعيين تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع حاملي محوري الإحداثيات.

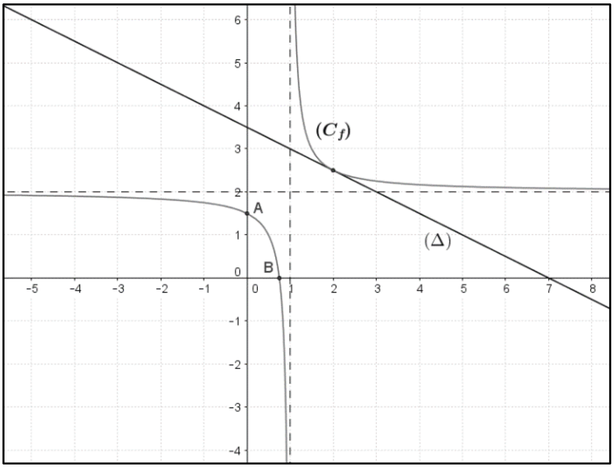
$f(0)=\frac{3}{2}$، ومنه (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة $A\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

$f(x)=0 \Rightarrow 4x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$، ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة $B\left(\frac{3}{4};0\right)$.

5. كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 2.

$$(\Delta): y = f'(2)(x-2)+f(2) = -\frac{1}{2}(x-2)+\frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}}$$

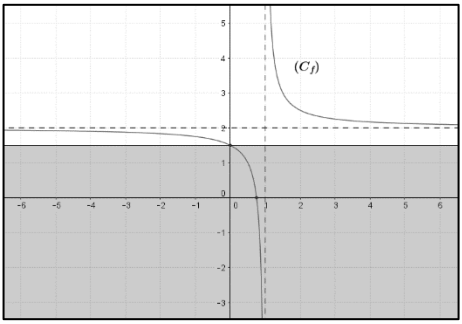
6. رسم (Δ) و$(\mathscr{C}_f)$.



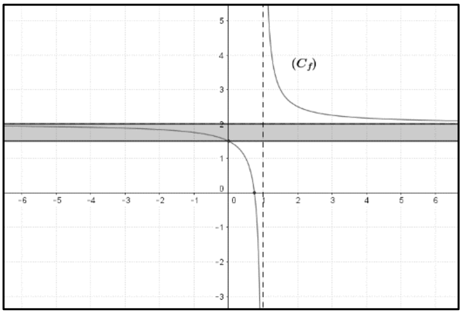
7. مناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$.

ندرس تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم الأفقي ذي المعادلة $y=m$.

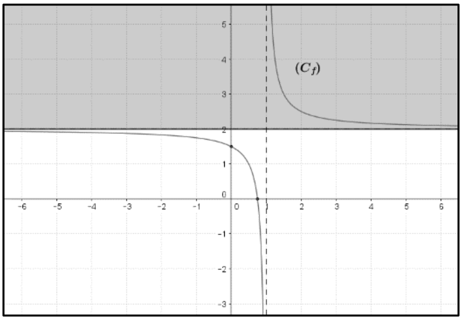
- من أجل $m \in \left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$: تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلا وحيدا موجبا.



- من أجل $m = \frac{3}{2}$: تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلا وحيدا معدوما.
- من أجل $m \in \left]\frac{3}{2};2\right[$: تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلا وحيدا سالبا.



- من أجل $m = 2$: لا تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلا.
- من أجل $m \in]2;+\infty[$: تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلا وحيدا موجبا.



* * *

التمرين 05: (تمرين 50 ص 137 بتصرّف)

I- f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 4$. (C) المنحنى البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيّرات الدالة f.

2. أثبت أنّ النقطة $S(1;-3)$ مركز تناظر للمنحنى (C).
3. احسب $f(4)$ ثمّ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.
4. عيّن نقط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات، ثمّ ارسم المنحنى (C).

II- g دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $g(x)=-1+\frac{5}{x+1}$. (H) المنحنى البياني للدالة g في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيّرات الدالة g.
2. بيّن أنّ المنحنى (H) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ_1) و(Δ_2) يُطلب تعيين معادلتيهما.
3. أثبت أنّ Ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحنى (H).
4. عيّن نقط تقاطع (H) مع محوري الإحداثيات، ثمّ ارسم المنحنى (H).
5. تحقق أنّ (C) و(H) يشملان النقطة $A(0;4)$، ثمّ ادرس تقاطع (C) و(H).
6. أثبت أنّ نقطتين من نقط تقاطع (C) و(H) متناظرتين بالنسبة للنقطة S.
7. أثبت أنّ (C) و(H) لهما مماس مشترك (T) في النقطة A.

* * *

حل التمرين 05:

I- $f(x)=x^3-3x^2-5x+4$. $D_f=\mathbb{R}$

1. دراسة تغيّرات الدالة f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3\underbrace{\left(1-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}_{\to 1}=-\infty$$

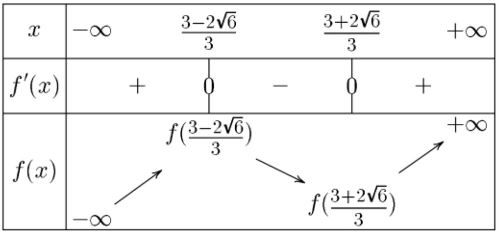
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3\underbrace{\left(1-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}_{\to 1}=+\infty$$

$$f'(x)=3x^2-6x-5\ ;\ \Delta=96\ ;x_1=\frac{3-2\sqrt{6}}{3}\ ;\ x_2=\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$$

من أجل $x\in\left]-\infty;\frac{3-2\sqrt{6}}{3}\right[\cup\left]\frac{3+2\sqrt{6}}{3};+\infty\right[$: $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة.

من أجل $x\in\left[\frac{3-2\sqrt{6}}{3};\frac{3+2\sqrt{6}}{3}\right]$: $f'(x)\le 0$ ومنه الدالة f متناقصة.

جدول تغيّرات الدالة f:



x	$-\infty$	$\frac{3-2\sqrt{6}}{3}$		$\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\frac{3-2\sqrt{6}}{3})$	↘	$f(\frac{3+2\sqrt{6}}{3})$	↗ $+\infty$

$$f\left(\frac{3-2\sqrt{6}}{3}\right) \approx 5{,}7\ ;\ f\left(\frac{3+2\sqrt{6}}{3}\right) \approx -11{,}7$$

2. اثبات أنّ النقطة $S(1;-3)$ مركز تناظر للمنحنى (C).

مركز تناظر $S(1;-3) \Rightarrow \begin{cases} (2-x) \in D_f \ldots \text{محققة} \\ f(2-x)+f(x) = -6 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&f(2-x)+f(x)\\
&= (2-x)^3 - 3(2-x)^2 - 5(2-x) + 4 + x^3 - 3x^2 - 5x + 4\\
&= 8 - 12x + 6x^2 - x^3 - 12 + 12x - 3x^2 - 10 + 5x + 4\\
&\quad + x^3 - 3x^2 - 5x + 4 = \boxed{-6}
\end{aligned}$$

3. حساب $f(4)$ وحل المعادلة $f(x) = 0$.

$f(4) = 0 \Rightarrow f(x) = (x-4)(ax^2+bx+c)$

نستعمل خوارزمية هورنر لتعيين قيم a ، b و c.

	1	−3	−5	4
4				
	1	1	−1	0

$$f(x) = (x-4)(x^2+x-1)$$

$f(x) = 0 \Rightarrow (x-4)(x^2+x-1) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = 4; x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

4. تعيين نقط تقاطع (C) مع محوري الإحداثيات.

$f(0) = 4$ ، ومنه يتقاطع (C) مع محور التراتيب عند النقطة $(0;4)$.

$f(x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{4; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ ، ومنه يتقاطع (C) مع محور الفواصل

عند النقط $(4;0)$ ، $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ و $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.

رسم المنحنى (C). (انظر الشكل في نهاية التمرين)

II- $g(x) = -1 + \frac{5}{x+1}$. $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

1. دراسة تغيّرات الدالة g.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -1 + \frac{5}{\underbrace{x+1}_{\to 0}} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -1+\frac{5}{\underbrace{x+1}_{\to 0}} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} g(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\<}} -1+\frac{5\ \ \to 5}{x+1\to 0^{-}} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} g(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\>}} -1+\frac{5\ \ \to 5}{x+1\to 0^{+}} = \boxed{+\infty}$$

$$g'(x) = -\frac{5}{(x+1)^2}$$

بما أنّ $g'(x) < 0$ فإنّ الدالة g متناقصة على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و$]-1;+\infty[$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$-1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -1$

2. بيان أنّ المنحنى (H) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ_1) و(Δ_2) يُطلب تعيين معادلتيهما.

بما أنّ $\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = -1$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} g(x) = -\infty$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\>}} g(x) = +\infty$

نستنتج أنّ المنحنى (H) يقبل مستقيمين مقاربين $(\Delta_1): y = -1$ و$(\Delta_2): x = -1$

3. اثبات أنّ Ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحنى (H).

$$\Omega(x;y) \in (\Delta_1) \cap (\Delta_2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \Omega(-1;-1)$$

$\Omega(-1;-1)$ مركز تناظر $\Rightarrow \begin{cases} (-2-x) \in D_g \\ g(-2-x)+g(x) = -2 \end{cases}$

$$x \in D_g \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow -x \neq 1 \Rightarrow -2-x \neq -1 \Rightarrow (-2-x) \in D_g \ldots ①$$

$$g(-2-x)+g(x) = -1+\frac{5}{-2-x+1}-1+\frac{5}{x+1}$$

$$= -2-\frac{5}{x+1}+\frac{5}{x+1} = -2 \ldots ②$$

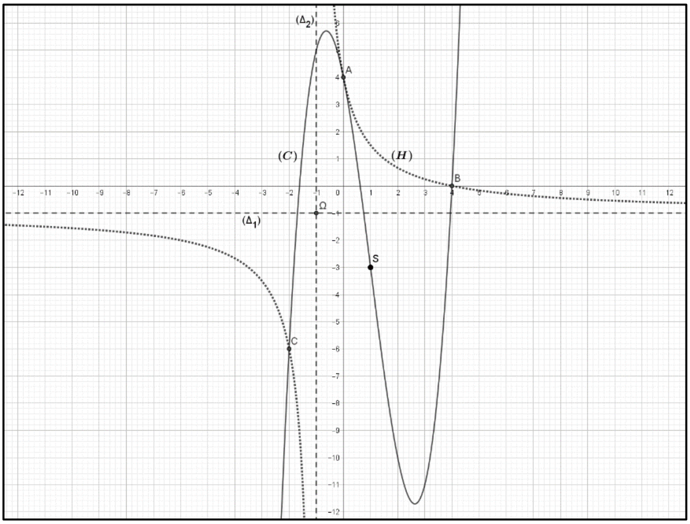
من ① و② نستنتج أنّ النقطة Ω مركز تناظر للمنحنى (H).

4. تعيين نقط تقاطع (H) مع محوري الإحداثيات.

$g(0) = 4$ ، ومنه يتقاطع (H) مع محور التراتيب عند النقطة $(0;4)$.

$g(x) = 0 \Rightarrow -1+\frac{5}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{-x+4}{x+1} = 0 \Rightarrow x = 4$ ، ومنه يتقاطع (H) مع محور الفواصل عند النقطة $(4;0)$.

رسم المنحنى (H).



5. التحقق أنّ (C) و(H) يشملان النقطة $A(0;4)$

بما أنّ $f(0)=g(0)=4$ فإنّ المنحنيين (C) و(H) يشملان النقطة $A(0;4)$

دراسة تقاطع (C) و(H):

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^3-3x^2-5x+4=-1+\frac{5}{x+1}$$

$$\Rightarrow x^3-3x^2-5x+5=\frac{5}{x+1}\Rightarrow (x+1)(x^3-3x^2-5x+5)-5=0$$

$$\Rightarrow x^4-3x^3-5x^2+5x+x^3-3x^2-5x+5-5=0$$

$$\Rightarrow x^4-2x^3-8x^2=0\Rightarrow x^2(x^2-2x-8)=0$$

$$\Rightarrow x_1=0; x_2=4; x_3=-2$$

$$\Rightarrow \boxed{(C)\cap(H)=\{A(0;4);B(4;0);C(-2;-6)\}}$$

6. اثبات أنّ نقطتين من نقط تقاطع (C) و(H) متناظرتين بالنسبة للنقطة S.

لبيان أنّ النقطتين B وC متناظرتين بالنسبة للنقطة S، يكفي أن نبيّن أنّ النقطة S منتصف القطعة $[BC]$.

$$\frac{x_B+x_C}{2}=1=x_S\ ;\ \frac{y_B+y_C}{2}=-3=y_S\Rightarrow \boxed{S\ \text{منتصف}\ [BC]}$$

7. اثبات أنّ (C) و(H) لهما مماس مشترك في النقطة A.

ليكن (T) و(T') مماسان للمنحنيين (C) و(H) على الترتيب عند النقطة A.

$$\begin{cases}(T): y=f'(0)x+f(0)=-5x+4\\(T'): y=g'(0)x+g(0)=-5x+4\end{cases}\Rightarrow \boxed{(T)=(T')}$$

* * *

المتتاليات العددية

I- المتتالية الحسابية :

1. العلاقة التراجعية :

$$\boxed{u_{n+1}=u_n+r}$$

2. عبارة الحد العام :

$$\boxed{u_n=u_p+(n-p)r}\ ;\ u_n=u_0+nr\ ;\ u_n=u_1+(n-1)r$$

3. الوسط الحسابي :

إذا كانت الأعداد c,b,a حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإنّ: $\boxed{a+c=2b}$ ، أي:

$$\boxed{a+b+c=3b}$$

مثال 1:

عيّن الحدود الثلاثة الأولى u_0 ، u_1 ، u_2 لمتتالية حسابية متزايدة حيث :

$$\begin{cases} u_0+u_1+u_2=3 \\ u_0\times u_1\times u_2=-24 \end{cases}$$

$$u_0+u_1+u_2=3 \Rightarrow 3u_1=3 \Rightarrow \boxed{u_1=1}$$

$$u_0\times \underbrace{u_1}_{=1}\times u_2=-24 \Rightarrow \underbrace{u_0}_{u_1-r}\times \underbrace{u_2}_{u_1+r}=-24 \Rightarrow (1-r)(1+r)=-24$$

$$\Rightarrow 1-r^2=-24 \Rightarrow r^2=25$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ، فإنّ $r=5$

$$r=5 \Rightarrow u_0=1-5=-4\ ;u_2=1+5=6\ ;\boxed{(u_0,u_1,u_2)=(-4,1,6)}$$

التحقيق :

$$u_0+u_1+u_2=6+1-4=\boxed{3}$$

$$u_0\times u_1\times u_2=6\times 1\times(-4)=\boxed{-24}$$

4. حساب المجاميع :

$$\boxed{S_n=u_p+u_{p+1}+\cdots+u_n=\frac{n-p+1}{2}(u_p+u_n)}$$

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$$

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$$

مثال :

$$u_0=1\ ;r=3\ ;S=u_0+\cdots+u_9$$

$$S=\frac{10}{2}\left(u_0+\underbrace{u_9}_{u_0+9r}\right)=5(1+28)=5\times 29=145$$

II- المتتالية الهندسية :

1. العلاقة التراجعية :

$$\boxed{v_{n+1}=v_n\times q}$$

2. عبارة الحد العام :

$$\boxed{v_n=v_p\times q^{n-p}}\ ;\ v_n=v_0\times q^n\ ;\ v_n=v_1\times q^{n-1}$$

3. الوسط الهندسي :

إذا كانت الأعداد c,b,a حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإنّ : $\boxed{a\times c=b^2}$ ، أي:

$$\boxed{a\times b\times c=b^3}$$

مثال :

عيّن الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 لمتتالية هندسية **متزايدة ، حدودها موجبة** حيث :

$$\begin{cases} v_1\times v_3=256 \\ v_1+v_2+v_3=56 \end{cases}$$

$v_1\times v_3=256\Rightarrow v_2^2=256\Rightarrow \boxed{v_2=16}$ (لأنّ حدود المتتالية (v_n) موجبة)

$$v_1+\underbrace{v_2}_{16}+v_3=56\Rightarrow \underbrace{v_1}_{\frac{v_2}{q}}+\underbrace{v_3}_{v_2.q}=40\Rightarrow \frac{16}{q}+16q=40$$

$\Rightarrow 16q^2-40q+16=0\Rightarrow 2q^2-5q+2=0\Rightarrow \boxed{q=2}$ ((v_n) متزايدة)

$$\Rightarrow \boxed{v_1=\frac{v_2}{q}=8\ ;v_3=v_2.q=32}$$

التحقيق :

$$v_1\times v_3=8\times 32=\boxed{256}\ ;\ v_1+v_2+v_3=8+16+32=\boxed{56}$$

4. حساب المجاميع :

$$\boxed{S_n=v_p+v_{p+1}+\cdots+v_n=v_p\left(\frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}\right)=v_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)}$$

$$v_0+v_1+\cdots+v_n=v_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)=v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

$$v_1+\cdots+v_n=v_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

* * *

تمارين تطبيقية:

التمرين 01: (بكالوريا 2010 آداب)

I- (u_n) متتالية حسابية معرّفة على $\mathbb{N}$ بالحدّين $u_{10}=31$ و $u_{15}=46$

1. عيّن أساسها r وحدّها الأول u_0
2. اكتب u_n بدلالة n
3. بيّن أنّ 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n)
4. احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$.

II- نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$

1. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0
2. احسب بدلالة n المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

* * *

حل التمرين 01:

I- $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$

1. **تعيين الأساس r والحدّ الأول u_0**

$$u_{15} = u_{10} + 5r \Rightarrow 5r = u_{15} - u_{10} = 46 - 31 = 15 \Rightarrow \boxed{r = \frac{15}{5} = 3}$$

$$u_{10} = u_0 + 10r \Rightarrow u_0 = u_{10} - 10r = 31 - 30 \Rightarrow \boxed{u_0 = 1}$$

2. **كتابة u_n بدلالة n**

$$u_n = u_0 + nr = 1 + 3n \Rightarrow \boxed{u_n = 3n + 1}$$

3. **بيان أنّ 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n)**

$$u_n = 6028 \Rightarrow 3n + 1 = 6028 \Rightarrow 3n = 6027 \Rightarrow \boxed{n = 2009}$$

منه نستنتج أنّ العدد 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n)

4. **حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2009}$**

$$S = \frac{2010}{2}(u_0 + u_{2009}) = 1005(1 + 6028) = 1005 \times 6029 = \boxed{6059145}$$

II- $v_n = 2 \times 8^n$

1. **بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0**

$$v_{n+1} = 2 \times 8^{n+1} = 2 \times 8^n \times 8 \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = 8v_n}$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 8$ وحدّها الأول $v_0 = 2 \times 8^0 = 2$

2. **حساب بدلالة n المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$**

$$S' = v_0\left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = 2\left(\frac{8^{n+1} - 1}{8 - 1}\right) = \boxed{\frac{2}{7}(8^{n+1} - 1)}$$

* * *

التمرين 02: (بكالوريا 2014 آداب)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الأربعة الآتية مع التعليل :

1. (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدّها الأول $u_2 = 1$. الحدّ العام للمتتالية (u_n) هو:
   أ) $u_n = 1 + 3n$ ب) $u_n = 7 + 3n$ جـ) $u_n = -5 + 3n$
2. n عدد طبيعي. المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ يساوي :
   أ) $\frac{n^2+n}{2}$ ب) $\frac{n(n-1)}{2}$ جـ) $\frac{n^2+1}{2}$
3. x عدد حقيقي. تكون الأعداد $x - 2$ ، x ، $x + 1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان :
   أ) $x = 3$ ب) $x = 5$ جـ) $x = -2$
4. (v_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ ، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$. أساس المتتالية (v_n) هو:
   أ) 2 ب) 3 جـ) 6

* * *

حل التمرين 02:

1. (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدّها الأول $u_2 = 1$. الحدّ العام للمتتالية (u_n) هو:
جـ) $u_n = -5 + 3n$

$$u_n = u_2 + (n-2)r = 1 + 3(n-2) = 1 + 3n - 6 \Rightarrow \boxed{u_n = -5 + 3n}$$

2. n عدد طبيعي. المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ يساوي : أ) $\boldsymbol{\frac{n^2+n}{2}}$

إنّ هذا المجموع هو لحدود متتابعة لمتتالية حسابية حدّها الأول 1 وأساسها 1

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(1+n) = \boxed{\frac{n^2+n}{2}}$$

3. x عدد حقيقي. تكون الأعداد $x - 2$ ، x ، $x + 1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان : **جـ) $x = -2$**

تكون الأعداد $x - 2$، x، $x + 1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان:

$$(x+1)(x-2) = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = x^2 \Rightarrow -x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

4. (v_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ ، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$. أساس المتتالية (v_n) هو: **ب) 3**

$$v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 3 \times 3^n = 6 \times 3^n \Rightarrow \boxed{v_0 = 6\,; q = 3}$$

* * *

التمرين 03: (بكالوريا 2010 ت إ بتصرف)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$$

1. احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3
2. نقبل أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < 2$
   بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 2$
   - أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول
   - ب. اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :
     $$u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$
   - ج. ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟
4. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ واستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$.

حل التمرين 03:

$$\boldsymbol{u_0 = 1} \text{ ، } \boldsymbol{u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}}$$

1. حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

$$u_1 = \frac{3u_0+2}{4} = \frac{3(1)+2}{4} = \boxed{\frac{5}{4}}\ ;\ u_2 = \frac{3u_1+2}{4} = \frac{3\left(\frac{5}{4}\right)+2}{4} = \boxed{\frac{23}{16}}$$

$$u_3 = \frac{3u_2+2}{4} = \frac{3\left(\frac{23}{16}\right)+2}{4} = \boxed{\frac{101}{64}}$$

2. ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{4} - u_n = \boxed{\frac{2-u_n}{4}}$$

$$u_n < 2 \Rightarrow -u_n > -2 \Rightarrow 2 - u_n > 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة تماما}}$$

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 2$

أ. بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدّها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n+2}{4} - 2 = \frac{3u_n-6}{4} = \frac{3}{4}(u_n-2) = \boxed{\frac{3}{4}v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدّها الأول $v_0 = u_0 - 2 = -1$

ب. كتابة عبارة v_n بدلالة n واستنتاج أنّ: $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-\left(\frac{3}{4}\right)^n} \; ; \; v_n = u_n - 2 \Rightarrow u_n = v_n + 2 = \boxed{2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

ج. حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n = 2 \; ; \; \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0\right]$$

4. حساب المجموع S_n بدلالة n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) = -\left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}\right)$$

$$\boxed{S_n = 4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right]}$$

استنتاج أنّ: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + 2 + v_1 + 2 + \cdots + v_n + 2 = S_n + 2(n+1)$$

$$= 4\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] + 2n + 2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} + 2n - 2$$

$$= 4\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2 = \boxed{3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2}$$

* * *

التمرين 04: (بكالوريا 2015 ت إ)

بيّنت دراسة أنّ 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يُحالون على التقاعد سنويا وبالمقابل يُوظّف 3000 عامل سنويا. علما أنّ سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ : u_n لعدد العمال سنة $2012 + n$ أي $u_0 = 50$

1. احسب u_1 و u_2
2. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3$
   ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية
3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = 60 - u_n$
   - أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول
   - ب. اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n
   - ج. قدّر عدد العمال سنة 2017
   - د. حدّد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)
   - ه. احسب نهاية المتتالية (u_n). هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60 ألف عامل ؟

حل التمرين 04:

.1 حساب u_1 وu_2

$$u_1 = 50\left(1-\frac{5}{100}\right)+3 = 50\times 0{,}95+3 = \boxed{50{,}5}$$

$$u_2 = 50{,}5\left(1-\frac{5}{100}\right)+3 = 50{,}5\times 0{,}95+3 = \boxed{50{,}975}$$

.2 أ. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$

$$u_{n+1} = u_n\left(1-\frac{5}{100}\right)+3 = \boxed{0{,}95u_n+3}$$

ب. بيان أنّ المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية

$$\underbrace{u_0+u_2}_{100{,}975} \neq \underbrace{2u_1}_{101} \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ ليست حسابية}}$$

$$\underbrace{u_0\times u_2}_{2548{,}75} \neq \underbrace{u_1^2}_{2550{,}25} \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ ليست هندسية}}$$

.3 $v_n = 60 - u_n$

أ. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول

$$v_{n+1} = 60-u_{n+1} = 60-0{,}95u_n+3 = 63-0{,}95u_n$$

$$= 0{,}95(60-u_n) = \boxed{0{,}95v_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 0,95 وحدّها الأول $v_0 = 10$

ب. كتابة v_n بدلالة n ، واستنتاج u_n بدلالة n

$$v_n = v_0\times q^n = \boxed{10(0{,}95)^n}\,;u_n = 60-v_n = \boxed{60-10(0{,}95)^n}$$

ج. تقدير عدد العمال سنة 2017

$$2012+n = 2017 \Rightarrow n = 5\,;u_5 = 60-10(0{,}95)^5 = \boxed{52262}$$

د. تحديد اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

$$u_{n+1}-u_n = [60-10(0{,}95)^{n+1}]-[60-10(0{,}95)^n]$$

$$= 10(0{,}95)^n(1-0{,}95) = 0{,}5(0{,}95)^n$$

$$u_{n+1}-u_n > 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة تماما}}$$

هـ. حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}[60-10(0{,}95)^n] = \boxed{60}\,;\ [(0{,}95)^n \to 0]$$

لا يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60 ألف عامل لأنّه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ $10(0,95)^n \neq 0$.

* * *

التمرين 05: (بكالوريا 2016 د2 ع ت)

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :
$u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}$ ولتكن المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

1. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0
2. أ. عبّر بدلالة n عن عبارة الحدّ العام v_n
   ب. استنتج عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n
   جـ. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
3. أ. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$
   ب. تحقق أنّ : $\frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n
   جـ. استنتج بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \cdots + \frac{1}{u_n+2}$.

* * *

حل التمرين 05:

$$\boldsymbol{u_0 = 0} \text{ ، } \boldsymbol{u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}} \text{ ، } \boldsymbol{v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}}$$

1. بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2u_n+2}{u_n+3} - 1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3} + 2} = \frac{\frac{u_n-1}{u_n+3}}{\frac{4u_n+8}{u_n+3}} = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 2}\right) = \frac{1}{4} v_n$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدّها الأول $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = -\frac{1}{2}$

2. أ. التعبير عن عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{1}{2 \times 4^n} = -\frac{1}{2 \times 2^{2n}} = \boxed{-\frac{1}{2^{2n+1}}}$$

ب. استنتاج عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Rightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \Rightarrow u_n(1 - v_n) = 2v_n + 1$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n} = \boxed{\frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 + \frac{1}{2^{2n+1}}}}$$

جـ. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{1+\frac{1}{2^{2n+1}}} = \boxed{1}\,;\left(\frac{1}{2^{2n}}\to 0 \text{ و } \frac{1}{2^{2n+1}}\to 0\right)$$

3. أ. حساب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)$$

$$\boxed{S_n = -\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]}$$

ب. تحقق أنّ : $\frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{3}(1-v_n)$

$$\frac{1}{u_n+2} = \frac{1}{\frac{2v_n+1}{1-v_n}+2} = \frac{1}{\frac{3}{1-v_n}} = \frac{1-v_n}{3} = \boxed{\frac{1}{3}(1-v_n)}$$

جـ. استنتاج بدلالة n المجموع : $S'_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \cdots + \frac{1}{u_n+2}$

$$S'_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \cdots + \frac{1}{u_n+2}$$

$$S'_n = \frac{1}{3}(1-v_0) + \frac{1}{3}(1-v_1) + \cdots + \frac{1}{3}(1-v_n)$$

$$S'_n = \frac{1}{3}\left[(n+1) - (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)\right] = \frac{1}{3}\left[(n+1) - S_n\right]$$

$$\boxed{S'_n = \frac{1}{3}\left[(n+1) + \frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]\right]}$$

* * *

المرجح في المستوي

أ. مرجح نقطتين:

تعريف:

لتكن A و B نقطتين متمايزتين وليكن α و β عددين حقيقيين حيث: $\alpha + \beta \neq 0$.

نسمي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب، النقطة G حيث: $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

إحداثيات النقطة G هي: $G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$.

خواص:

1. إذا كانت النقطة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$، فإنّ G مرجح الجملة $\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$، حيث $k \in \mathbb{R}^*$.
2. إذا كانت النقطة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$، فإنّ النقط A ، B و G على استقامة واحدة.
3. إذا كانت النقطة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$، فإنّ $\overrightarrow{AG} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha+\beta}}\overrightarrow{AB}$.

مبرهنة:

إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب، فإنّ من أجل كل نقطة M من المستوي: $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

ب. مرجح ثلاث نقط:

تعريف:

A ، B و C ثلاث نقط و α ، β و γ ثلاث أعداد حقيقية حيث: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

نسمي مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب، النقطة G حيث: $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

إحداثيات النقطة G هي: $G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$.

خاصية:

إذا كانت النقطة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$، فإنّ:

$\overrightarrow{AG} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma}}\overrightarrow{AC}$.

مبرهنة:

إذا كانت النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب، فإنّ من أجل كل نقطة M من المستوي:

$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

ج. تعيين مجموعة نقط باستعمال المرجح:

- مجموعة النقط M التي تحقّق: $\|\overrightarrow{MG}\| = k(k > 0)$ هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها k
- مجموعة النقط M التي تحقّق: $\|\overrightarrow{MG}\| = \left\|\overrightarrow{MG'}\right\|$ هي محور القطعة $[GG']$
- مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1)\}$ هو منتصف القطعة $[AB]$
- مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1);(C;1)\}$ هو مركز ثقل المثلث ABC
- إذا كان $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ، فإنّ الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M.

خاصية التجميع:

النقطة G مرجح النقط A ، B وC المرفقة بالمعاملات α ، β وγ على الترتيب. إذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ وكانت D مرجح النقطتين A وB المرفقتين بالمعاملين α وβ على الترتيب، فإنّ النقطة G مرجح النقطتين D وC المرفقتين بالمعاملين $\alpha + \beta$ وγ على الترتيب.

$$\begin{cases} G\{(\boldsymbol{A};\boldsymbol{\alpha}),(\boldsymbol{B};\boldsymbol{\beta});(C;\gamma)\} \\ D\{(\boldsymbol{A};\boldsymbol{\alpha}),(\boldsymbol{B};\boldsymbol{\beta})\} \end{cases} \Rightarrow G\{(\boldsymbol{D};\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta});(C;\gamma)\}$$

* * *

تمارين تطبيقية:

التمرين 01:

ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين حيث $AB = 4cm$.

لتكن النقطة I المعرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

وG مرجح الجملة $\{(A,-1);(B,1);(C,2)\}$.

1. أنشئ النقطتين I و G.
2. عيّن ثمّ أنشئ (Δ) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4$.
3. عيّن ثمّ أنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $3\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\|$.

* * *

حل التمرين 01:

1. **إنشاء النقطتين I و G.**

$$\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}}$$

$$G\{(A,-1);(B,1);(C,2)\} \Rightarrow -\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}$$

ملاحظة: يمكننا الوصول إلى النتيجة النهائية مباشرة باستعمال العلاقة:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\gamma}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

2. تعيين وإنشاء المجموعة (Δ):

$$\|-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=4\Rightarrow\|2\overrightarrow{MG}\|=4\Rightarrow\boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=2}$$

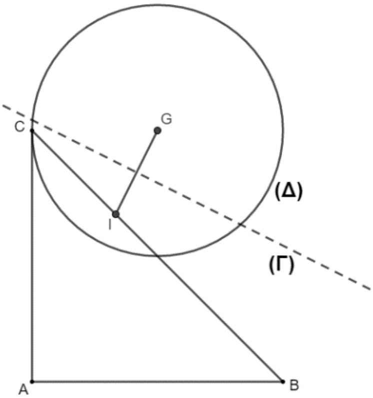
منه نستنتج أنّ المجموعة (Δ) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 2.

3. تعيين وإنشاء المجموعة (Γ)

$$3\|-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=2\|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|\Rightarrow 3\|2\overrightarrow{MG}\|=2\|3\overrightarrow{MI}\|$$

$$\Rightarrow 6\|\overrightarrow{MG}\|=6\|\overrightarrow{MI}\|\Rightarrow\boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{MI}\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي محور القطعة المستقيمة $[GI]$.



* * *

التمرين 02:

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقط $A(-1;1)$، $B(0;2)$ ، $C(2;-3)$.

G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-3);(C,-1)\}$ و H مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-3)\}$.

1. علم النقط A، B و C.
2. احسب إحداثيي النقطتين G و H ، ثمّ بيّن أنّ النقطة H هي منتصف القطعة $[CG]$.
3. عيّن ثمّ أنشئ المجموعات (Γ_1) ، (Γ_2) و (Γ_3) للنقط M من المستوي حيث:

$$(\Gamma_1):\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=2$$

$$(\Gamma_2):\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=2\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|$$

$$(\Gamma_3):\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

* * *

حل التمرين 02:

1. **تعليم النقط A، B و C.**
2. **حساب إحداثيي النقطتين G و H**

$$G\{(A,2);(B,-3)\} \Rightarrow G\left(\frac{2x_A-3x_B}{-1};\frac{2y_A-3y_B}{-1}\right) \Rightarrow \boxed{G(2;4)}$$

$$H\{(A,2);(B,-3);(C,-1)\} \Rightarrow H\left(\frac{2x_A-3x_B-x_C}{-2};\frac{2y_A-3y_B-y_C}{-2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{H\left(2;\frac{1}{2}\right)}$$

بيان أنّ النقطة H هي منتصف القطعة $[CG]$.

طريقة ①:

$$\begin{cases} \dfrac{x_C+x_G}{2}=\dfrac{2+2}{2}=2=x_H \\ \dfrac{y_C+y_G}{2}=\dfrac{-3+4}{2}=\dfrac{1}{2}=y_H \end{cases} \Rightarrow \boxed{H \text{ منتصف } [CG]}$$

طريقة ②:

$$\begin{cases} H\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{2});(\boldsymbol{B},\boldsymbol{-3});(C,-1)\} \\ \quad G\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{2});(\boldsymbol{B},\boldsymbol{-3})\} \end{cases} \Rightarrow H\{(G,-1);(C,-1)\} \Rightarrow \boxed{H \text{ منتصف } [CG]}$$

3. **تعيين وإنشاء المجموعات (Γ_1) ، (Γ_2) و (Γ_3) :**

$$M\in(\Gamma_1) \Rightarrow \left\|\underbrace{2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}}_{-2\overrightarrow{MH}}\right\| = 2 \Rightarrow \left\|-2\overrightarrow{MH}\right\| = 2 \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MH}\right\| = 1}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ_1) هي الدائرة التي مركزها H ونصف قطرها 1.

$$M\in(\Gamma_2) \Rightarrow \left\|\underbrace{2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}}_{-2\overrightarrow{MH}}\right\| = 2\left\|\underbrace{2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}}_{-\overrightarrow{MG}}\right\|$$

$$\Rightarrow \left\|-2\overrightarrow{MH}\right\| = 2\left\|-\overrightarrow{MG}\right\| \Rightarrow 2\left\|\overrightarrow{MH}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MG}\right\| \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MH}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG}\right\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ_2) هي محور القطعة المستقيمة $[GH]$.

$$M\in(\Gamma_3) \Rightarrow \left\|\underbrace{2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}}_{-2\overrightarrow{MH}}\right\| = \left\|\underbrace{2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{\text{شعاع مستقل عن } M}\right\|$$

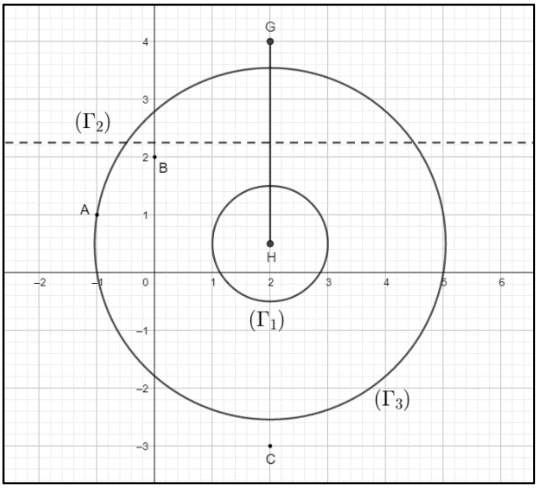
$$\Rightarrow \left\|-2\overrightarrow{MH}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right\|$$

$$\Rightarrow \left\|-2\overrightarrow{MH}\right\| = \left\|-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} \Rightarrow -3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left\|-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{37}$$

$$M \in (\Gamma_3) \Rightarrow 2\|\overrightarrow{MH}\| = \sqrt{37} \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MH}\| = \frac{\sqrt{37}}{2}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ_3) هي الدائرة التي مركزها H ونصف قطرها $\frac{\sqrt{37}}{2}$.



* * *

التمرين 03:

ABC مثلث حيث $BC = 8cm, AC = 12cm, AB = 10cm$.

لتكن النقطة I مرجح الجملة $\{(A,1);(B,3)\}$، النقطة J مرجح الجملة $\{(B,3);(C,-1)\}$ و G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,3);(C,-1)\}$.

1. أنشئ النقطتين I و J.
2. بيّن أنّ النقط I، C و G في استقامية.
3. بيّن أنّ النقط J، A و G في استقامية.
4. ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمستقيمين (CI) و (AJ)؟ أنشئ النقطة G.
5. عيّن ثمّ أنشئ (Δ) مجموعة النقط M من المستوي حيث:
   $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 2\|3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.
6. عيّن ثمّ أنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث:
   $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\|$.

* * *

حل التمرين 03:

1. **إنشاء النقطتين I و J**

$$I\{(A,1);(B,3)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}\ ; J\{(B,3);(C,-1)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$$

2. بيان أنّ النقط I، C و G في استقامية

$$\begin{cases} I\{(A,1);(B,3)\} \\ G\{(A,1);(B,3);(C,-1)\} \end{cases} \Rightarrow G\{(I,4);(C,-1)\} \Rightarrow \overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{النقط } I\text{، } C \text{ و } G \text{ في استقامية}}$$

3. بيان أنّ النقط J، A و G في استقامية

$$\begin{cases} J\{(B,3);(C,-1)\} \\ G\{(A,1);(B,3);(C,-1)\} \end{cases} \Rightarrow G\{(A,1);(J,2)\} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{النقط } J\text{، } A \text{ و } G \text{ في استقامية}}$$

4. إنشاء النقطة G

$$\begin{cases} G \in (CI) \\ G \in (AJ) \end{cases} \Rightarrow \boxed{G \in (CI) \cap (AJ)}$$

5. تعيين وإنشاء المجموعة (Δ)

$$M \in (\Delta) \Rightarrow \left\| \underbrace{\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}}_{4\overrightarrow{MI}} \right\| = 2\left\| \underbrace{3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}_{2\overrightarrow{MJ}} \right\| \Rightarrow 4\|\overrightarrow{MI}\| = 4\|\overrightarrow{MJ}\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MJ}\|}$$

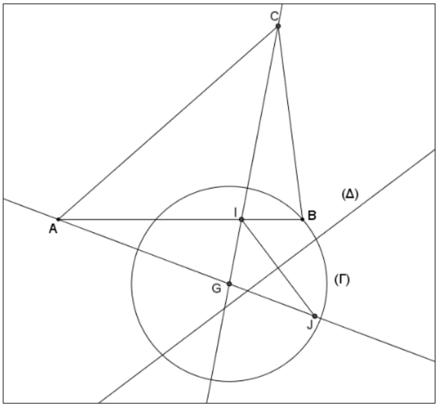
منه نستنتج أنّ المجموعة (Δ) هي محور القطعة $[IJ]$.

6. تعيين وإنشاء المجموعة (Γ)

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow \left\| \underbrace{\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}} \right\| = \left\| \underbrace{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}}_{\text{مستقل عن } M} \right\| \Rightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = \|-\overrightarrow{AC}\|$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \frac{1}{3}\|\overrightarrow{AC}\| \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MG}\| = 4}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 4.



التمرين 04:

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع، النقطة K مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$ النقطة I منتصف $[AB]$ والنقطة G تحقق العلاقة: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ... ①.

1. ارسم الشكل وأنشئ النقطة G.
2. بيّن أنّ $3\overrightarrow{KG}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.
3. أ. استنتج من العلاقة ① أنّ النقطة A مرجح الجملة $\{(G,3);(C,-2);(D,1)\}$.
   ب. بيّن أنّ النقطة K هي نقطة تقاطع المستقيمين (GC) و (AD).
4. عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left\|\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$$

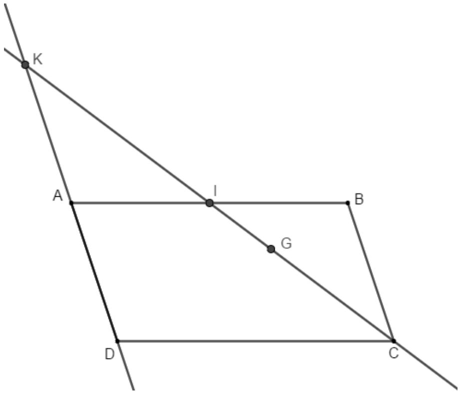
حل التمرين 04:

1. رسم الشكل وإنشاء النقطة G.

$$\begin{cases} K\{(A,1);(B,1);(C,-1)\} \\ I\{(A,1);(B,1)\} \end{cases} \Rightarrow K\{(I,2);(C,-1)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{IK}=-\overrightarrow{IC}}$$

$$\begin{cases} G\{(A,1);(B,1);(C,1)\} \\ I\{(A,1);(B,1)\} \end{cases} \Rightarrow G\{(I,2);(C,1)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}}$$

يمكن إنشاء النقطة G باعتبارها مركز ثقل المثلث ABC أي نقطع تقاطع متوسطاته.



2. بيان أنّ $3\overrightarrow{KG}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GK}+\boldsymbol{\overrightarrow{KA}}+\boldsymbol{\overrightarrow{KB}}+\overrightarrow{KC}=\vec{0} \text{ ... ②}$$

$$K\{(A,1);(B,1);(C,-1)\} \Rightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}=\vec{0} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{KA}}+\boldsymbol{\overrightarrow{KB}}=\overrightarrow{KC}$$

$$② \Rightarrow 3\overrightarrow{GK}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0} \Rightarrow \boxed{3\overrightarrow{KG}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}}$$

3. أ. استنتاج أنّ النقطة $\boldsymbol{A}$ مرجح الجملة $\{(\boldsymbol{G},\mathbf{3});(\boldsymbol{C},\mathbf{-2});(\boldsymbol{D},\mathbf{1})\}$

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}\ldots ③$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$$

$$③\Rightarrow 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Rightarrow 3\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\boxed{A\{(G,3);(C,-2);(D,1)\}}.$$

ب. بيان أنّ النقطة $\boldsymbol{K}$ هي نقطة تقاطع المستقيمين $(\boldsymbol{GC})$ و $(\boldsymbol{AD})$.

$$K\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}\Rightarrow K\{(A,1);(B,1);(C,1);(C,-2)\}$$

$$\Rightarrow K\{(G,3);(C,-2)\}$$

$$A\{(\boldsymbol{G},\mathbf{3});(\boldsymbol{C},\mathbf{-2});(D,1)\}\Rightarrow A\{(\boldsymbol{K},\mathbf{1});(D,1)\}\Rightarrow\boxed{K\in(AD)}$$

$$3\overrightarrow{KG}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}\Rightarrow K\{(G,3);(C,-2)\}\Rightarrow\boxed{K\in(GC)}$$

$$\begin{cases}K\in(AD)\\K\in(GC)\end{cases}\Rightarrow\boxed{(AD)\cap(GC)=K}$$

4. تعيين المجموعة $(\boldsymbol{E})$.

$$\left\|\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|\Rightarrow 2\left\|\overrightarrow{MA}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MI}\right\|$$

$$\Rightarrow\boxed{\left\|\overrightarrow{MA}\right\|=\left\|\overrightarrow{MI}\right\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) هي محور القطعة $[AI]$.

* * *

الزوايا الموجهة وحساب المثلثات

أ. زاوية موجّهة لشعاعين غير معدومين:

ليكن $\vec{u}$ و$\vec{v}$ شعاعين غير معدومين من المستوي.

- الثنائية $(\vec{u},\vec{v})$ تسمى زاوية موجهة لشعاعين.
- إذا كان x قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ فإنّ كل الأعداد من الشكل $x+2k\pi$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$. مع $k\in\mathbb{Z}$.
- من بين أقياس الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ يوجد قيس وحيد على المجال $]-\pi;\pi]$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$.
- من بين كل ثلاثة أشعة غير معدومة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و$\vec{w}$ لدينا:

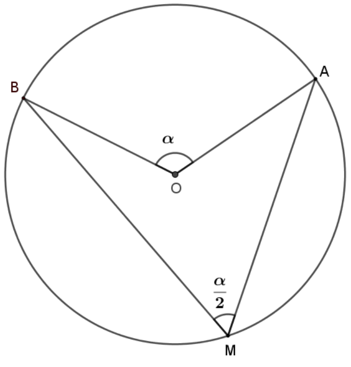
$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$$

ب. خواص الزوايا الموجهة:

- ليكن α قيسا للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ وα' قيسا للزاوية $(\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'})$. تكون الزاويتان $(\vec{u},\vec{v})$ و $(\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'})$ متقايستين إذا وفقط إذا وُجد عدد صحيح k حيث: $\alpha'=\alpha+2k\pi$.
- يكون الشعاعان $\vec{u}$ و$\vec{v}$ مرتبطين خطيا إذا وفقط إذا كان:

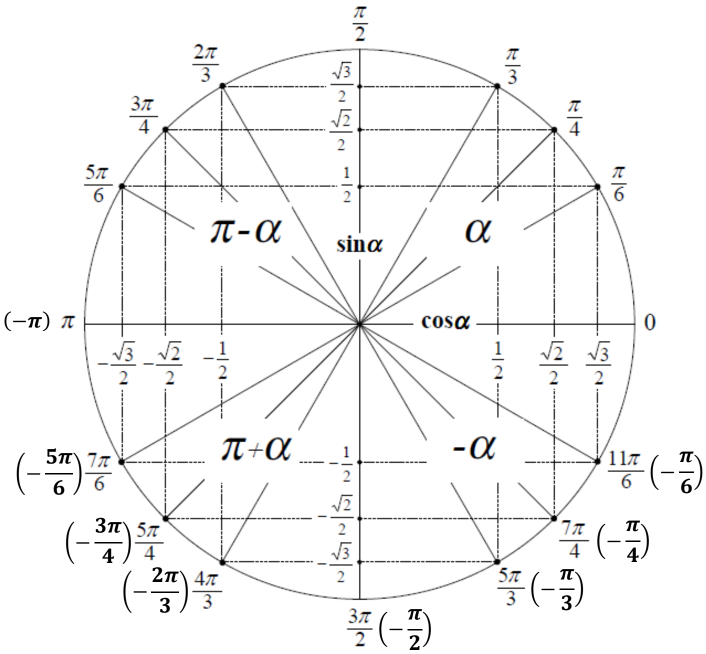
$$(\vec{u},\vec{v})=2k\pi \text{ أو } (\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi$$

- ليكن k وk' عددين حقيقيين غير معدومين.
  - ✓ إذا كان k وk' من نفس الإشارة فإنّ: $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$
  - ✓ إذا كان k وk' من إشارتين مختلفتين فإنّ: $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$
- A ، B وM ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى من دائرة مثلثية (C) مركزها O.
  إذا كان α قيسا للزاوية $\underbrace{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}_{\text{زاوية مركزية}}$ فإنّ $\frac{\alpha}{2}$ قيس للزاوية $\underbrace{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}_{\text{زاوية محيطية}}$.



ج. حساب المثلثات:

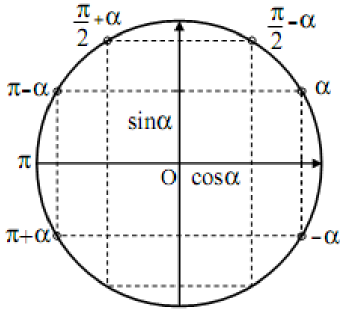
جدول القيم الشهيرة:



جدول النسب المثلثية لبعض الزوايا الشهيرة:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

جيب تمام وجيب الزوايا المرفقة:



$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$

د. حلّ معادلات ومتراجحات مثلثية:

1) $\cos a = \cos b \Rightarrow a = b + 2k\pi$ أو $a = -b + 2k\pi$

2) $\sin a = \sin b \Rightarrow a = b + 2k\pi$ أو $a = \pi - b + 2k\pi$

3) $\cos a = \sin b \Rightarrow \cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ ... نحوّل $\sin$ إلى $\cos$

4) $\cos a = \sin b \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin b$ ... نحوّل $\cos$ إلى $\sin$

5) $a\cos x + b\sin x = c \Rightarrow \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\alpha}\cos x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\beta}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\cos x \,.\, \cos\alpha + \sin x \,.\, \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

- $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1; 1] \Rightarrow \cos(x - \alpha) = \cos\beta \Rightarrow S = \{\alpha \pm \beta + 2k\pi\}$
- $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\Rightarrow S = \emptyset.$

ه. الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية:

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم مباشر متعامد ومتجانس. ولتكن (C) الدائرة المثلثية التي مركزها O.

من أجل كل نقطة M غير منطبقة على O، الثنائية (r,θ) حيث: $OM = r$ و $\theta = \left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$، تُسمى ثنائية إحداثيات قطبية في المستوي للنقطة M ونرمز $M(r,\theta)$.

إذا كانت الاحداثيات الديكارتية للنقطة M هي (x,y) وإحداثياها القطبية (r,θ) فإنّ:

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ ، $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$.

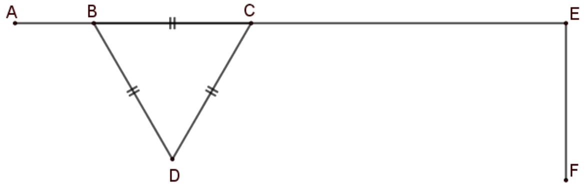
تمارين تطبيقية:

التمرين 01: (تمرين 18 ص 228)

نعتبر النقط A ، B ، C و E في استقامية، المثلث BCD متقايس الأضلاع و (EF) يعامد (AE)

عيّن قيسا للزوايا الموجهة التالية:

1) $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BD})$ ، 2) $(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CD})$ ، 3) $(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{EF})$ ، 4) $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{EF})$



* * *

حل التمرين 01:

$$1)\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BD})=(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD})=\boxed{-\frac{\pi}{3}}$$

$$2)\ (\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})=\pi+\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{4\pi}{3}}$$

$$3)\ (\overrightarrow{CE};\overrightarrow{EF})=(\overrightarrow{EC};\overrightarrow{EF})+\pi=\frac{\pi}{2}+\pi=\boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

$$4)\ (\overrightarrow{BD};\overrightarrow{EF})=(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BH})=(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BH})$$

$$=\frac{\pi}{3}+\pi+\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{11\pi}{6}}$$ ... ① ط

$$4)\ (\overrightarrow{BD};\overrightarrow{EF})=(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BH})=-(\overrightarrow{BH};\overrightarrow{BD})=-\left[(\overrightarrow{BH};\overrightarrow{BC})-(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BC})\right]$$

$$=-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{-\frac{\pi}{6}}$$ ... ② ط

لاحظ أنّ $\frac{11\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{6}$ هما قيسان لنفس الزاوية الموجهة $\left(\frac{11\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\pi\right)$.

النقطة H هي صورة النقطة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{EF}$.

* * *

التمرين 02:

1. عِلمًا أنّ : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ، أحسب $\sin\frac{7\pi}{12}$ ثمّ استنتج $\cos\frac{13\pi}{12}$.
2. بسّط العبارة: $A=\sin(\frac{3\pi}{2}-x)+\sin(x+5\pi)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)$.
3. x عدد حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ حيث: $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
   - أ. احسب قيمة $\cos 2x$ و $\sin 2x$.
   - ب. تحقق أنّ $\cos 4x=\sin x$.
   - ج. استنتج قيمة x.

* * *

حل التمرين 02:

1. حساب $\sin\frac{7\pi}{12}$ واستنتاج $\cos\frac{13\pi}{12}$

$$\cos^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}=1 \Rightarrow \sin^2\frac{7\pi}{12}=1-\cos^2\frac{7\pi}{12}=1-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$$=1-\frac{8-4\sqrt{3}}{16}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 \Rightarrow \sin\frac{7\pi}{12}=\boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

$$\cos\frac{13\pi}{12}=\cos\left(\frac{6\pi+7\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}\right)=-\sin\frac{7\pi}{12}=\boxed{\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

2. تبسيط العبارة: $A=\sin(\frac{3\pi}{2}-x)+\sin(x+5\pi)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$$A=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=-\cos x-\sin x+\sin x=\boxed{-\cos x}$$

3. $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ حيث: $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

أ. حساب قيمة $\cos 2x$ و $\sin 2x$.

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=1-2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right)$$

$$=1-2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

$$\sin^2 2x=1-\cos^2 2x=1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin 2x=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

ب. التحقق أنّ $\cos 4x=\sin x$.

$$\cos 4x=2\cos^2 2x-1=2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2-1=2\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\right)-1$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{4}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\boxed{\sin x}$$

ج. استنتاج قيمة x.

$$\cos 4x = \sin x \Rightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2}-x \text{ أو } 4x = -\frac{\pi}{2}+x$$

$$\Rightarrow 5x = \frac{\pi}{2} \text{ أو } 3x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} \text{ أو } x = -\frac{\pi}{6} \ (\text{مرفوضة}) \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{10}}$$

التمرين 03:

1. حلّ في المجال $]-\pi;\pi[$ المعادلة : $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^2 + 7x + 3 = 0$ ، ثمّ استنتج حلول المعادلة : $2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0$
3. بيّن أنّ : $\sin\left(\frac{95\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{97\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{103\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{105\pi}{100}\right) = 0$.

حل التمرين 03:

1. حلّ في المجال $]-\pi;\pi[$ المعادلة : $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$

$$\sqrt{2}\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}}$$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^2 + 7x + 3 = 0$

$$2x^2 + 7x + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{S = \left\{-\frac{1}{2}; -3\right\}}$$

استنتاج حلول المعادلة : $2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0$

$$2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}} \ (\cos x \neq -3)$$

3. بيان أنّ : $\sin\left(\frac{95\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{97\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{103\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{105\pi}{100}\right) = 0$.

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{95\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{97\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{103\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{105\pi}{100}\right) \\ &= \sin\left(\frac{105\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{95\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{103\pi}{100}\right) + \sin\left(\frac{97\pi}{100}\right) \\ &= 2\sin 2\pi \, . \cos\frac{\pi}{10} + 2\sin 2\pi \, . \cos\frac{3\pi}{50} = \boxed{0} \end{aligned}$$

التمرين 04:

1. برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$.
3. ليكن α عدد حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ حيث: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
   - أ. تحقق أنّ: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$، ثمّ احسب $\cos 2\alpha$.
   - ب. استنتج قيمة α.
   - ج. عيّن القيمة المضبوطة لكل من العددين:

$\sin(4\alpha + 1441\pi)$ و $\cos(4\alpha + 2020\pi)$

* * *

حل التمرين 04:

1. برهان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$.

$$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 \text{ أو } \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos 0 \text{ أو } \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \text{ أو } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ أو } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left\{2k\pi\,; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\,; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}}$$

3. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ ، $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$
   - أ. التحقق أنّ: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$، وحساب $\cos 2\alpha$.

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{2+\sqrt{3}}{4} - \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

   - ب. استنتاج قيمة α.

$$\begin{cases}\cos 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{12}}$$

ج. تعيين القيمة المضبوطة لكل من العددين:

$\sin(4\alpha + 1441\pi)$ و $\cos(4\alpha + 2020\pi)$

$$\sin(4\alpha + 1441\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos(4\alpha + 2020\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

<u>التمرين 05:</u> (تطبيقات ص 222-223)

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

① $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ ، ② $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

① $\cos x + \sin x = 1$

② $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

③ $\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = -1$

④ $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = m$. (ناقش تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m)

3. حل في المجال $]0;2\pi[$ المتراجحات التالية:

① $2\cos x < 1$ ② $\sqrt{2}\cos 3x + 1 \le 0$

③ $\sin x < -\frac{1}{2}$ ④ $\sqrt{2}\sin 4x - 1 \le 0$

4. حل في المجال $]-\pi;\pi]$ المتراجحات التالية:

① $2\cos 2x - \sqrt{3} \ge 0$ ② $\cos 4x - \frac{1}{2} > 0$

③ $2\sin 5x + \sqrt{3} \ge 0$ ④ $2\sin 4x - \sqrt{2} > 0$

<u>حل التمرين 05:</u>

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

① $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ أو } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$$

② $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ أو } x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi}$$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

① $\cos x + \sin x = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ أو } x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ أو } x = 2k\pi}$$

② $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ أو } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ أو } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$$

③ $\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = -1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ أو } 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ أو } 2x = -\frac{11\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \text{ أو } x = -\frac{11\pi}{24} + k\pi}$$

④ $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = m \Rightarrow \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = \frac{m}{2}$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos 3x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 3x = \frac{m}{2} \Rightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m}{2}$$

- $\frac{m}{2} \in [-1;1] \Rightarrow m \in [-2;2] \Rightarrow \cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\beta$

$\Rightarrow 3x+\frac{\pi}{3}=\beta+2k\pi$ أو $3x+\frac{\pi}{3}=-\beta+2k\pi$

$\Rightarrow 3x=\beta-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $3x=-\beta-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Rightarrow \boxed{x=\frac{\beta}{3}-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \text{ أو } x=-\frac{\beta}{3}-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}}$

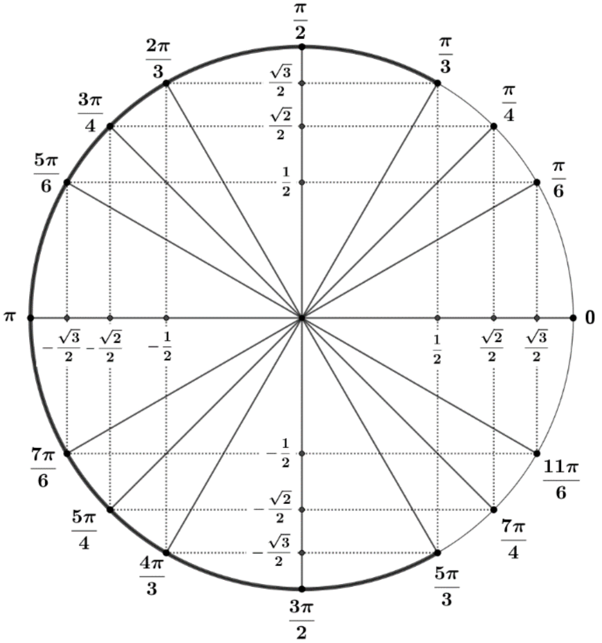
- $\frac{m}{2} \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\Rightarrow m \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[: \boxed{S=\emptyset}$

3. حل في المجال $[0;2\pi[$ المتراجحات التالية:

① $2\cos x<1$ ② $\sqrt{2}\cos 3x+1\le 0$

③ $\sin x<-\frac{1}{2}$ ④ $\sqrt{2}\sin 4x-1\le 0$

① $2\cos x<1 \Rightarrow \cos x<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \boxed{S=\left]\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right[}$

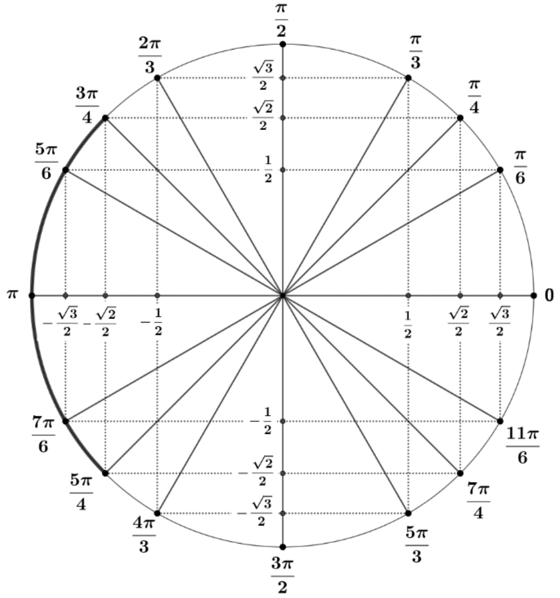


② $\sqrt{2}\cos 3x+1\le 0 \Rightarrow \cos 3x\le -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{4}+2k\pi<3x<\frac{5\pi}{4}+2k\pi$

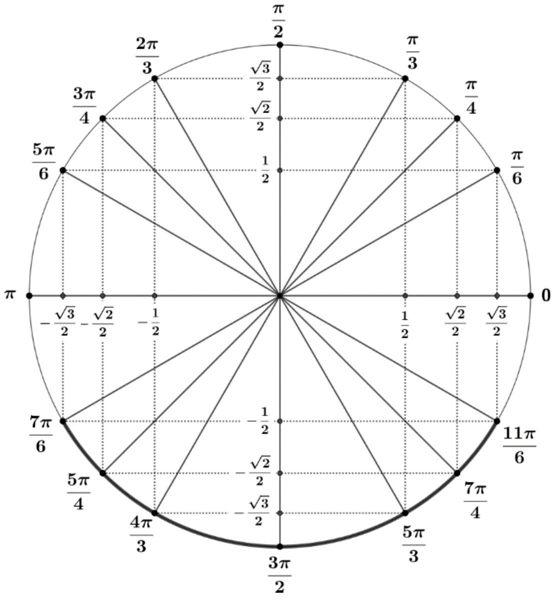
$\Rightarrow x\in\left]\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3};\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right[$

$k = 0 : x \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{12}\right[$; $k = 1 : x \in \left]\frac{11\pi}{12};\frac{13\pi}{12}\right[$; $k = 2 : x \in \left]\frac{19\pi}{12};\frac{7\pi}{4}\right[$

$$\boxed{S = \left]\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{12};\frac{13\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{19\pi}{12};\frac{7\pi}{4}\right[}$$



③ $\sin x < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{S = \left]\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right[}$



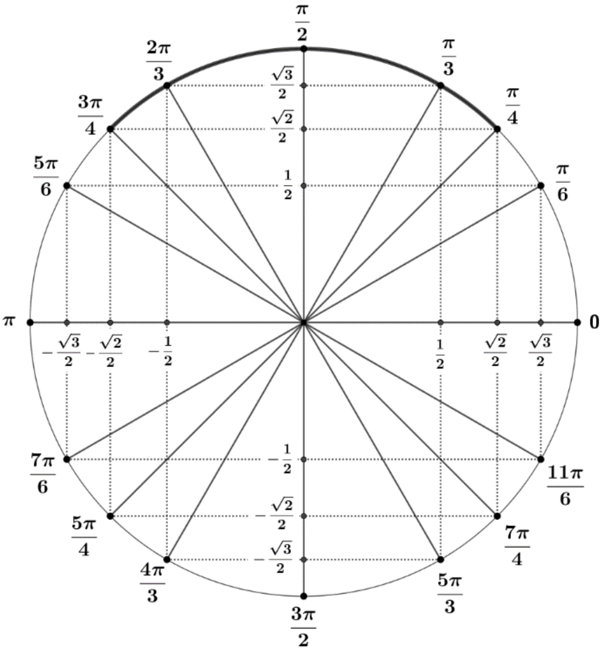
④ $\sqrt{2}\sin 4x-1\geq 0\Rightarrow \sin 4x\geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \dfrac{\pi}{4}+2k\pi\leq 4x\leq \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$

$$\Rightarrow x\in\left[\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2};\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right]$$

$k=0: x\in\left[\dfrac{\pi}{16};\dfrac{3\pi}{16}\right]$; $k=1: x\in\left[\dfrac{9\pi}{16};\dfrac{11\pi}{16}\right]$; $k=2: x\in\left[\dfrac{17\pi}{16};\dfrac{19\pi}{16}\right]$;

$k=3: x\in\left[\dfrac{25\pi}{16};\dfrac{27\pi}{16}\right]$

$$\boxed{S=\left[\frac{\pi}{16};\frac{3\pi}{16}\right]\cup\left[\frac{9\pi}{16};\frac{11\pi}{16}\right]\cup\left[\frac{17\pi}{16};\frac{19\pi}{16}\right]\cup\left[\frac{25\pi}{16};\frac{27\pi}{16}\right]}$$



4. حل في المجال $]-\pi;\pi]$ المتراجحات التالية:

① $2\cos 2x-\sqrt{3}\geq 0$

② $\cos 4x-\dfrac{1}{2}>0$

③ $2\sin 5x+\sqrt{3}\geq 0$

④ $2\sin 4x-\sqrt{2}>0$

① $2\cos 2x-\sqrt{3}\geq 0\Rightarrow \cos 2x\geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow -\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\leq 2x\leq \dfrac{\pi}{6}+2k\pi$

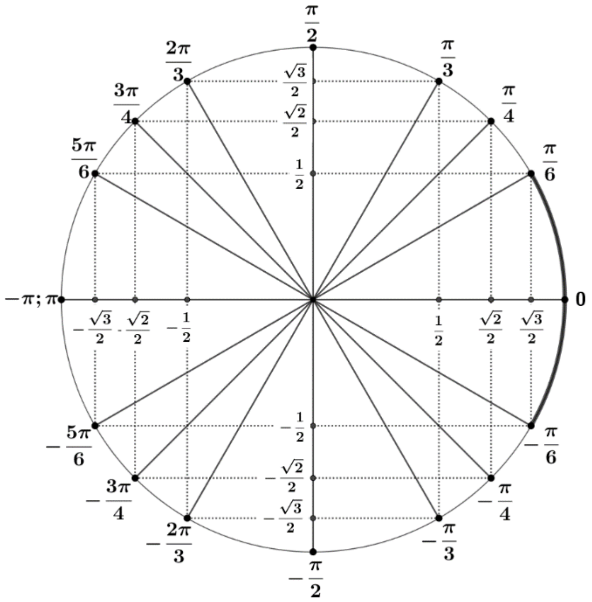
$$\Rightarrow x\in\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi;\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$$

$k=-1: x\in\left[-\frac{13\pi}{12};-\frac{11\pi}{12}\right]\ \left(\left]-\pi;-\frac{11\pi}{12}\right]\right); k=0: x\in\left[-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right]$;

$k=1: x\in\left[\frac{11\pi}{12};\frac{13\pi}{12}\right]\ \left(\left[\frac{11\pi}{12};\pi\right]\right)$

$$\boxed{S=\left]-\pi;-\frac{11\pi}{12}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{12};\pi\right]}$$

لاحظ أنّ القيمتين $-\frac{13\pi}{12}$ و $\frac{13\pi}{12}$ تقعان خارج المجال $]-\pi;\pi]$، لهذا السبب اقتصرنا على القيم الواقعة داخل المجال $]-\pi;\pi]$ فقط.



② $\cos 4x-\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \cos 4x>\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3}+2k\pi<4x<\frac{\pi}{3}+2k\pi$

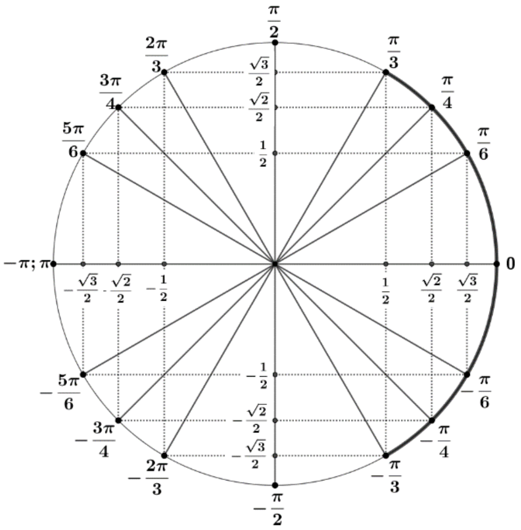
$$\Rightarrow x\in\left]-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2};\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right[$$

$k=-2: x\in\left]-\frac{13\pi}{12};-\frac{11\pi}{12}\right[\ \left(\left]-\pi;-\frac{11\pi}{12}\right]\right); k=-1: x\in\left]-\frac{7\pi}{12};-\frac{5\pi}{12}\right[$

$k=0: x\in\left]-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right[\ ; k=1: x\in\left]\frac{5\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right[$

$k=2: x\in\left]\frac{11\pi}{12};\frac{13\pi}{12}\right[\ \left(\left]\frac{11\pi}{12};\pi\right]\right)$

$$\boxed{S=\left]-\pi;-\frac{11\pi}{12}\right[\cup\left]-\frac{7\pi}{12};-\frac{5\pi}{12}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right[\ \cup\left]\frac{11\pi}{12};\pi\right]}$$



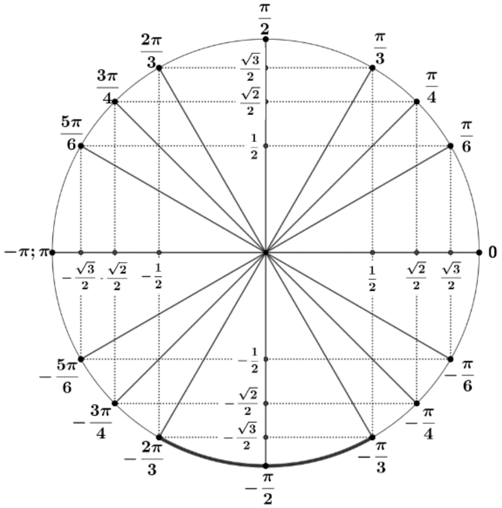
③ $2\sin 5x + \sqrt{3} \le 0 \Rightarrow \sin 5x \le -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \le 5x \le -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}; -\frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right]$$

$k = -2: x \in \left[-\dfrac{14\pi}{15}; -\dfrac{13\pi}{15}\right]$; $k = -1: x \in \left[-\dfrac{8\pi}{15}; -\dfrac{7\pi}{15}\right]$

$k = 0: x \in \left[-\dfrac{2\pi}{15}; -\dfrac{\pi}{15}\right]$; $k = 1: x \in \left[\dfrac{4\pi}{15}; \dfrac{\pi}{3}\right]$; $k = 2: x \in \left[\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{11\pi}{15}\right]$

$$\boxed{S = \left[-\frac{14\pi}{15}; -\frac{13\pi}{15}\right] \cup \left[-\frac{8\pi}{15}; -\frac{7\pi}{15}\right] \cup \left[-\frac{2\pi}{15}; -\frac{\pi}{15}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{15}; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{11\pi}{15}\right]}$$



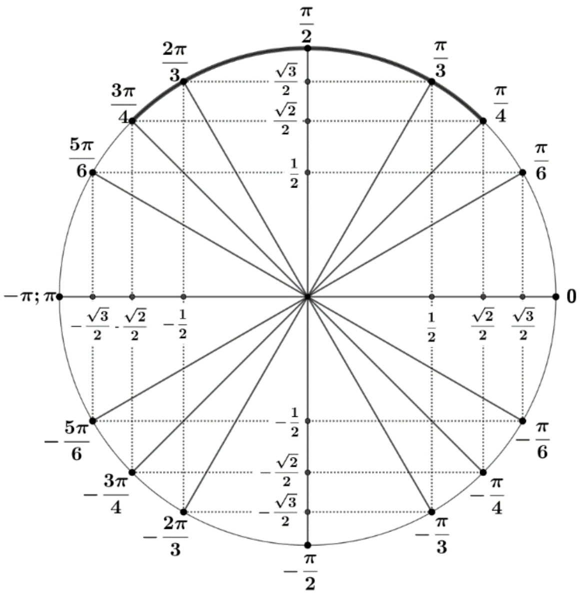
④ $2\sin 4x-\sqrt{2}>0 \Rightarrow \sin 4x>\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}+2k\pi<4x<\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

$$\Rightarrow x\in\left]\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2};\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right[$$

$k=-2: x\in\left]-\frac{15\pi}{16};-\frac{13\pi}{16}\right[\ ; k=-1: x\in\left]-\frac{7\pi}{16};-\frac{5\pi}{16}\right[$

$k=0: x\in\left]\frac{\pi}{16};\frac{3\pi}{16}\right[\ ; k=1: x\in\left]\frac{9\pi}{16};\frac{11\pi}{16}\right[$

$$\boxed{S=\left]-\frac{15\pi}{16};-\frac{13\pi}{16}\right[\cup\left]-\frac{7\pi}{16};-\frac{5\pi}{16}\right[\cup\left]\frac{\pi}{16};\frac{3\pi}{16}\right[\cup\left]\frac{9\pi}{16};\frac{11\pi}{16}\right[}$$



خلاصة:

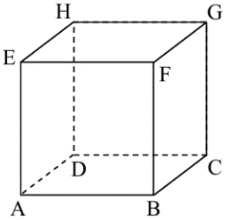
لحل متراجحة مثلثية نتبع الخطوات التالية:

1. حصر المجال الذي من أجله تتحقق المتراجحة مع مراعاة المجموعة المطلوب فيها حل المتراجحة: $\mathbb{R}$ أو $[0;2\pi[$ أو $]-\pi;\pi]$.
2. إذا كانت المتراجحة تشتمل على $\cos x$ أو $\sin x$ فإنّ مجموعة الحلول هي المجال المحدد أعلاه.
3. إذا كانت المتراجحة تشتمل على $\cos nx$ أو $\sin nx$ نقسم طرفي المجال المحدد أعلاه على n ونعطي قيم لـ k حتى نحدد كل الحلول المحصورة في المجموعة المطلوب فيها حل المتراجحة.

* * *

الهندسة في الفضاء

تمرين شامل يلخص جميع قواعد الهندسة في الفضاء



الجزء الأول :

ABCDEFGH مكعب ضلعه a

1. **احسب الجداء السلمي بدلالة a لكل من:** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BF}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DF}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{DF}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BF} = 0\ \left(\text{لأنّ}\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BF}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} \underbrace{=}_{\text{نسقط } G \text{ على } (ABD)} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} \underbrace{=}_{\text{مرتبطان خطيا وفي نفس الاتجاه}} a.a = a^2$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} \underbrace{=}_{\text{نسقط } H \text{ على } (ABC)} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} \underbrace{=}_{\text{مرتبطان خطيا ومتعكسان في الاتجاه}} -a.a = -a^2$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DF} \underbrace{=}_{\text{نسقط } F \text{ على } (ADC)} \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} \underbrace{=}_{\text{متعامدان}} 0\ \left(\text{قطرا المربع متعامدان}\right)$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AG} \underbrace{=}_{\text{نسقط } G \text{ على } (ABC)} \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} = AC^2 = 2a^2\ (AC^2 = AB^2 + BC^2)$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EG} \underbrace{=}_{\text{نسقط } A \text{ على } (EFG)} \overrightarrow{EG}.\overrightarrow{EG} = EG^2 = 2a^2\ (EG^2 = EF^2 + FG^2)$$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{DF} \underbrace{=}_{\text{علاقة شال}} \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}\right).\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}\right)$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}}_{0(\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB})} + \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF}}_{0(\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BF})} + \underbrace{\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{DB}}_{0(\overrightarrow{CG}\perp\overrightarrow{DB})} + \underbrace{\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BF}}_{a^2(\overrightarrow{CG}\parallel\overrightarrow{BF})} = a^2$$

ملاحظة هامة : طريقة الإسقاط تعتمد على اختيار مستوي يشمل ثلاث نقط من الأربعة المكوّنة للجداء السلمي واسقاط النقطة الرابعة على هذا المستوي. ولا يصح اسقاط نقطتين في آن واحد بل نستعمل علاقة شال ، ولو أسقطنا كلا من G و F على المستوي (ABC) في المثال الأخير لكانت النتيجة : $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$ وهذا خطأ.

2. **بيّن أنّ $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EG} = 0$ و $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EB} = 0$ ، ثمّ استنتج أنّ المستقيم (DF) عمودي على المستوي (BEG)**

$$\underbrace{\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{HF}.\overrightarrow{EG}}_{\text{نسقط } D \text{ على } (EFG)} = 0\ ;\ \underbrace{\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EB}}_{\text{نسقط } D \text{ على } (EFB)} = 0$$

بما أنّ $\overrightarrow{DF}$ عمودي على $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EB}$ وهما شعاعان غير مرتبطين خطيا من المستوي (BEG)، نستنتج أنّ المستقيم (DF) عمودي على المستوي (BEG).

* * *

الجزء الثاني :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1;0;-1)$ ، $B(2;2;3)$ ، $C(3;1;-2)$ ، $D(-4;2;1)$

1. **بيّن أن النقط C,B,A تعين مستويا**

لبيان أن النقط C,B,A تعيّن مستويا (أو أنّها ليست في استقامية) ،
نبيّن أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطّيا

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1} \Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

$\Rightarrow \boxed{\text{النقط } C,B,A \text{ تعيّن مستويا}}$

2. **عيّن شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)**

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) ، فهو إذن عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، منه :

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+2b+4c=0 \dots ①\\ 2a+b-c=0 \dots ②\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{نضرب المعادلة ② في } -2]{} \begin{cases}a+2b+4c=0\\ -4a-2b+2c=0\end{cases} \xrightarrow[\text{نجمع المعادلتين}]{} -3a+6c=0$$

$$\Rightarrow a=2c \xrightarrow[\text{نعوّض } a \text{ في المعادلة ②}]{} 4c+b-c=0$$

$$\Rightarrow b=-3c \xrightarrow[c=1 \text{ نفرض}]{} \boxed{\vec{n}(2;-3;1)}$$

3. **استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)**

إذا كان $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) ، فإنّ هذا الأخير
يقبل معادلة من الشكل : $ax+by+cz+d=0$

طريقة أولى :

$$(ABC): 2x-3y+z+d=0\,;$$
$$A\in(ABC) \xrightarrow[\text{نعوّض إحداثيات } A \text{ في معادلة } (ABC)]{} 2-1+d=0 \Rightarrow d=-1$$

$$\boxed{(ABC): 2x-3y+z-1=0}$$

طريقة ثانية :

$$M(x;y;z)\in(ABC) \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM}=0 \Rightarrow 2(x-1)-3y+(z+1)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{2x-3y+z-1=0}$$

4. أثبت أن المثلث ABC قائم

لإثبات أن المثلث ABC قائم ، نحسب الجداء السلمي
أو نطبق نظرية فيثاغورس العكسية

طريقة أولى :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1(2)+2(1)+4(-1)=2+2-4=0 \ \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$$

$\Rightarrow$ المثلث ABC قائم في A

طريقة ثانية :

$$AB=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}\ ;\ AC=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

$$BC=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-5)^2}=\sqrt{27}$$

$BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow$ المثلث ABC قائم في A

5. احسب مساحة المثلث ABC

مساحة المثلث تساوي $\frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$

$$S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{\sqrt{1^2+2^2+4^2}\times\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{21}\times\sqrt{6}}{2}$$

$$=\boxed{\frac{3}{2}\sqrt{14}\,u.a}$$

6. عيّن بُعد النقطة D عن المستوي (ABC)، ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$

بُعد النقطة $M'(x';y';z')$ عن المستوي $(P): ax+by+cz+d=0$ هو :

$$\frac{|ax'+by'+cz'+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$d[D,(ABC)]=\frac{|2(-4)-3(2)+1-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\boxed{\sqrt{14}}$$

حجم رباعي الوجوه يساوي $\frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{3}$

$$V_{DABC}=\frac{1}{3}\underbrace{S}_{S_{ABC}}\times\underbrace{h}_{d[D,(ABC)]}=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}\sqrt{14}.\sqrt{14}=\frac{14}{2}=\boxed{7\,u.v}$$

7. عيّن ω مركز سطح الكرة (S) الذي معادلته :

$$x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$$

لتعيين مركز ونصف قطر سطح كرة نكتب معادلته على الشكل :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

$$x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$$

$$\Rightarrow x^2+(y+1)^2-1^2+(z-3)^2-3^2-15=0$$

$$\Rightarrow x^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega(0;-1;3)\,;r=\sqrt{25}=5}$$

8. احسب بعد النقطة ω عن المستوي (ABC)

$$d[\omega,(ABC)]=\frac{|2(0)-3(-1)+3-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{14}}=\boxed{\frac{5\sqrt{14}}{14}}$$

9. اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة ω و يعامد المستوي (ABC)

التمثيل الوسيطي لمستقيم يشمل نقطة $M_0(x_0;y_0;z_0)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ هو :

$$\begin{cases}x=x_0+\alpha t\\ y=y_0+\beta t\,;t\in\mathbb{R}\\ z=z_0+\gamma t\end{cases}$$

بما أنّ $(\Delta)\perp(ABC)$ ، فإنّ $\overrightarrow{u_{(\Delta)}}=\vec{n}$ ، أي إنّ الشعاع الناظمي للمستوي (ABC) هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

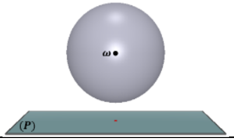
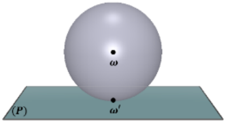
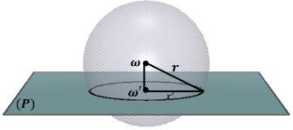
$$M(x;y;z)\in(\Delta)\Rightarrow\overrightarrow{\omega M}\parallel\vec{n}\Rightarrow\overrightarrow{\omega M}=t.\vec{n}\Rightarrow\begin{cases}x=2t\\ y+1=-3t\\ z-3=t\end{cases}$$

$$\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=2t\\ y=-1-3t\,;t\in\mathbb{R}\\ z=3+t\end{cases}}$$

10. عيّن تقاطع المستوي (ABC) و سطح الكرة (S)

لتعيين طبيعة تقاطع مستوي (P) و سطح الكرة (S) مركزها ω ونصف قطرها r ، نقارن $d[\omega,(P)]$ و r :

- $d[\omega,(P)]>r\Rightarrow(P)\cap(S)=\emptyset$ (لا يتقاطعان)
- $d[\omega,(P)]=r\Rightarrow(P)\cap(S)=\{\omega'\}$ (يتماسّان في نقطة وحيدة)
- $d[\omega,(P)]<r\Rightarrow(P)\cap(S)=C_{(\omega';r')}$ (يتقاطعان وفق دائرة)

الحالة الأولى : $\boldsymbol{d[\omega,(P)] > r}$	**الحالة الثانية :** $\boldsymbol{d[\omega,(P)] = r}$	**الحالة الثالثة :** $\boldsymbol{d[\omega,(P)] < r}$
		
$\boldsymbol{(P)\cap(S)=\emptyset}$	$\boldsymbol{(P)\cap(S)=\{\omega'\}}$	$\boldsymbol{(P)\cap(S)=C_{(\omega';r')}}$

11. ليكن (P) المستوي الذي معادلته: $x+y+z-1=0$.

بيّن أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان

ليكن $\overrightarrow{n'}(1;1;1)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P). لدينا :

$$\vec{n}.\overrightarrow{n'}=2(1)-3(1)+1(1)=0\Rightarrow\vec{n}\perp\overrightarrow{n'}\Rightarrow\boxed{(ABC)\perp(P)}$$

12. اعط التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ') تقاطع (P) و (ABC)

$$M(x;y;z)\in(\Delta')\Rightarrow\begin{cases}M\in(ABC)\\M\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-3y+z-1=0\ ...①\\x+y+z-1=0\ ...②\end{cases}$$

$$\xrightarrow[①-②]{}x-4y=0\Rightarrow x=4y$$

بتعويض x في المعادلة ② نجد : $4y+y+z-1=0$ ، منه $z=-5y+1$

وبوضع $y=t'$ نحصل على التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ').

$$\boxed{(\Delta'):\begin{cases}x=4t'\\y=t'\\z=1-5t'\end{cases};\ t'\in\mathbb{R}}$$

13. ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (Δ')

ليكن $\vec{u}$ و $\overrightarrow{u'}$ شعاعي توجيه المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix};\frac{2}{4}\neq-\frac{3}{1}$$

بما أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{u'}$ غير مرتبطين خطّيا ، فإنّ المستقيمين (Δ) و (Δ') متقاطعان أو لا ينتميان لنفس المستوي.

لتحديد الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (Δ') ، نحلّ الجملة التالية حيث $M\in(\Delta)$ و $M'\in(\Delta')$:

$$\begin{cases}x_M = x_{M'}\\ y_M = y_{M'}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2t = 4t' \dots ①\\ -1-3t = t' \dots ②\end{cases} \xrightarrow[\text{نضرب المعادلة ② في } -4]{} \begin{cases}2t = 4t'\\ 4+12t = -4t'\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}t = 2t'\\ 14t = -4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t' = -\frac{1}{7}\\ t = -\frac{2}{7}\end{cases}$$

بتعويض t و t' في التمثيلين الوسيطيين لـ (Δ) و (Δ') نحصل على النقطتين $\left(-\frac{4}{7};-\frac{1}{7};\frac{19}{7}\right)$ و $\left(-\frac{4}{7};-\frac{1}{7};\frac{12}{7}\right)$

بما أنّ $z_M \neq z_{M'}$ ، نستنتج أنّ المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

14. اعط المعادلة الديكارتية لـ (Q) المستوي المحوري للقطعة [EF] حيث : $E(1;0;0)$ و $F(-1;0;2)$

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو المستوي الذي يعامد هذه القطعة في منتصفها ، فهو إذن يعامد $\overrightarrow{EF}$ ويشمل I منتصف $[EF]$

$\overrightarrow{EF}(-2;0;2)\ ;I(0;0;1)\ ;M(x;y;z)\in(Q)\Rightarrow -2x+2z+d=0\ ;$

$I\in(Q)\Rightarrow 2+d=0\ \Rightarrow d=-2\Rightarrow \boxed{(Q){:}-2x+2z-2=0}$

15. عيّن تقاطع المستويات الثلاث (P) ، (Q) و (ABC)

لتعيين تقاطع المستويات الثلاث (P) ، (Q) و (ABC) ، ندرس تقاطع المستوي (Q) والمستقيم (Δ')

$$M\in(Q)\cap\underbrace{(P)\cap(ABC)}_{(\Delta')}\Rightarrow M\in(Q)\cap(\Delta')\ ;$$

$$-2(4t')+2(1-5t')-2=0\Rightarrow -18t'=0\ \Rightarrow t'=0$$

$$\xrightarrow[\text{نعوّض } t' \text{ في التمثيل الوسيطي لـ } (\Delta')]{} \boxed{(Q)\cap(P)\cap(ABC)=\{I(0;0;1)\}}$$

16. عيّن إحداثيات النقطتين G و 'G حيث G مركز ثقل المثلث ABC و 'G مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-1);(C;1)\}$

إذا كان $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ ، فإنّ الجملة المثقلة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ تقبل مرجحا وحيدا G حيث :

- $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
- $G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$
- $\forall M\,;\ \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$
- **مجموعة النقط M التي تحقّق : $\|\overrightarrow{MG}\|=0$ هي النقطة G**
- **مجموعة النقط M التي تحقّق : $\|\overrightarrow{MG}\|=k(k>0)$ هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها k**
- **مجموعة النقط M التي تحقّق : $\left\|\overrightarrow{MG'}\right\|=\|\overrightarrow{MG}\|$ هي المستوي المحوري للقطعة $[GG']$**
- **مجموعة النقط M التي تحقّق : $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG}'=0$ هي سطح كرة قطرها $[GG']$**
- **مجموعة النقط M التي تحقّق : $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{AB}=0$ هي المستوي الذي يشمل النقطة G ويعامد $\overrightarrow{AB}$**
- **مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1);(C;1)\}$ هو مركز ثقل المثلث ABC**
- **مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1)\}$ هو منتصف القطعة $[AB]$**

إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ ، فإنّ الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M

$$G\{(A;1),(B;1);(C;1)\}$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)\Rightarrow\boxed{G(2;1;0)}$$

$$G'\{(A;3),(B;-1);(C;1)\}$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{3x_A-x_B+x_C}{3};\frac{3y_A-y_B+y_C}{3};\frac{3z_A-z_B+z_C}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{G'\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-\frac{8}{3}\right)}$$

17. عيّن في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

أ. $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=6\ ...$ ①

$$\left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}}\right\|=6\Rightarrow\|3\overrightarrow{MG}\|=6\Rightarrow3\|\overrightarrow{MG}\|=6\Rightarrow\boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=2}$$

مجموعة النقط M التي تحقّق المعادلة ① هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 2

ب. ② ... $\boldsymbol{\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|}$

$$\left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}}\right\| = \left\|\underbrace{3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG'}}\right\|$$

$$\Rightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MG'}\| \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MG'}\|}$$

مجموعة النقط M التي تحقّق المعادلة ② هي المستوي المحوري للقطعة $[GG']$

ج. ③ ... $\boldsymbol{\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|}$

$$\left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}}\right\| = \left\|\underbrace{2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}}_{M \text{ شعاع مستقل عن }}\right\|$$

$$\Rightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = \|2\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})\|$$

$$\Rightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = \|-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\| \Rightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\| = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MG}\| = \sqrt{3}}$$

مجموعة النقط M التي تحقّق المعادلة ③ هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{3}$

د. ④ ... $\boldsymbol{(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = 0}$

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = 0$$

$$\Rightarrow (3\overrightarrow{MG})(3\overrightarrow{MG'}) = 0 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'} = 0}$$

مجموعة النقط M التي تحقّق المعادلة ④ هي سطح كرة قطرها $[GG']$

ه. ⑤ ... $\boldsymbol{(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}) = 0}$

$$(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}) = 0 \xRightarrow[\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}]{} (3\overrightarrow{MG'})(-\overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MG'}.\overrightarrow{AB} = 0}$$

مجموعة النقط M التي تحقّق المعادلة ⑤ هي المستوي الذي يشمل النقطة G' ويعامد $\overrightarrow{AB}$

* * *

الجداء السلمي في المستوي

أ. الجداء السلمي لشعاعين:

الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و$\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز $\vec{u}.\vec{v}$ والمعرّف بـ:

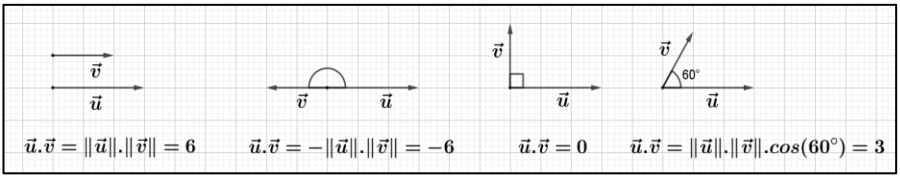
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ إذا كان $\vec{u} = 0$ أو $\vec{v} = 0$
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$ إذا كان $\vec{u} \neq 0$ و $\vec{v} \neq 0$.

مبرهنة 1: إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين فإنّ: $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

مبرهنة 2: إذا كانت في معلم متعامد ومتجانس، إحداثيات $\vec{u}$ هي $(x; y)$ و إحداثيات $\vec{v}$ هي $(x'; y')$ فإنّ: $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

مبرهنة 3: القول أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أنّ: $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

أمثلة:



ب. قواعد الحساب:

مبرهنة: من أجل كل ثلاثة أشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و$\vec{w}$ ومن أجل كل عدد حقيقي λ لدينا:

① $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$; ② $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$; ③ $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

④ $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$; ⑤ $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

المتطابقات الشهيرة:

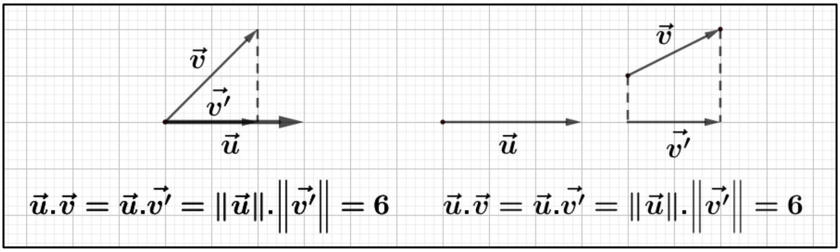
① $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

② $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

③ $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

الجداء السلمي والمسقط العمودي لشعاع:

مبرهنة: إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u} \neq \vec{0}$ وكان $\overrightarrow{v'}$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإنّ: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\overrightarrow{v'}$.



ج. تطبيقات الجداء السلمي:

معادلة مستقيم عُلِم شعاع ناظمي له ونقطة منه:

في معلم متعامد ومتجانس، يكون لكل مستقيم حيث الشعاع غير المعدوم $\vec{n}(a;b)$ ناظمي له (يعامده) معادلة من الشكل: $ax+by+c=0$ حيث c عدد حقيقي.

معادلة دائرة عُلِم مركزها ونصف قطرها:

في معلم متعامد ومتجانس، معادلة الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها $\Omega(x_0;y_0)$ ونصف قطرها r $(r>0)$ هي: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

معادلة مستقيم عُلِم قطر لها:

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

مبرهنة المتوسط:

A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا:

$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$.

مبرهنة الكاشي:

ABC مثلث حيث: $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

② $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$ ① $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

③ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$

قاعدة المساحة:

ABC مثلث حيث: $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$ و S مساحة المثلث ABC.
لدينا العلاقات التالية:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}=\frac{1}{2}ac\sin\hat{B}=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$$

قانون الجيوب:

ABC مثلث حيث: $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$$

المسافة بين نقطة ومستقيم:

في معلم متعامد ومتجانس، المسافة بين نقطة $A(x_0;y_0)$ ومستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$ هي: $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

دساتير الجمع:

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

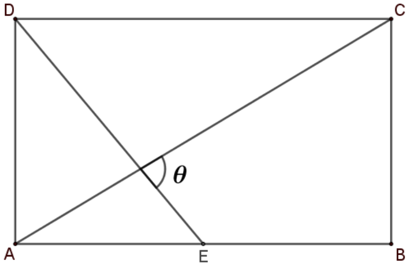
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

* * *

تمارين تطبيقية من الكتاب المدرسي:

التمرين 01: (تمرين 31 ص 299)

$ABCD$ مستطيل حيث $AD = 3$ و $AB = 5$. E منتصف $[AB]$.



1. احسب AC و DE.
2. عبّر عن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DE}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$.
3. احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$ ، واستنتج قيمة الزاوية $\left(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \theta$ بالدرجات بالتقريب $0{,}01$.

* * *

حل التمرين 01:

1. حساب AC و DE.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow \boxed{AC = \sqrt{34}}$$

$$DE^2 = DA^2 + AE^2 = 3^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 9 + \frac{25}{4} = \frac{61}{4} \Rightarrow \boxed{DE = \frac{\sqrt{61}}{2}}$$

2. التعبير عن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DE}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \boxed{-\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$$

3. حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{2}AB^2 - AD^2$$

$$= \frac{25}{2} - 9 = \boxed{\frac{7}{2}}$$

استنتاج قيمة الزاوية $\theta = \left(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ بالدرجات بالتقريب 0,01.

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = \|\overrightarrow{AC}\|.\|\overrightarrow{DE}\|.\cos\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DE}\right)$$

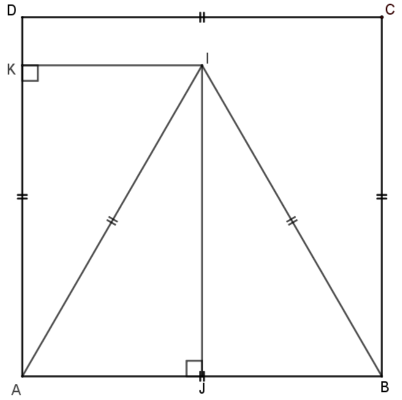
$$\cos\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DE}\right) = \frac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}}{\|\overrightarrow{AC}\|.\|\overrightarrow{DE}\|} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{34}\times\frac{\sqrt{61}}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2074}} \approx 0{,}15$$

$$\cos\left(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{AC}\right) \approx 0{,}15 \Rightarrow \boxed{\left(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{AC}\right) \approx 81{,}16°}\ (\cos(\vec{u};\vec{v}) = \cos(\vec{v};\vec{u}))$$

* * *

التمرين 02: (تمرين 54 ص 301)

$ABCD$ مربع طول ضلعه 4 و ABI مثلث متقايس الأضلاع. نسمي J وK المسقطين العموديين للنقطة I على المستقيمين (AB) و(AD)على الترتيب.



4. احسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IA}$ ، $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}$ ، $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{DC}$.
5. أ. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI}$.
   ب. احسب DI في المثلث DKI.
   جـ. استنتج من النتائج السابقة قيم $\cos 15°$ و $\cos 75°$.
   لاحظ أنّ : $2-\sqrt{3} = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2$

* * *

حل التمرين 02:

1. حساب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IA}$ ، $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}$ ، $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IJ} = IJ^2 = AI^2 - AJ^2 = 4^2 - 2^2 = \boxed{12}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI} = \|\overrightarrow{AD}\|.\|\overrightarrow{AI}\|.\cos 30°}_{(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AI})=(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AJ})-(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AJ})=90°-60°=30°} = 16\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{8\sqrt{3}}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{DC} = 0}_{\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{DC}}\ ;\ \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AD} = \boxed{-8\sqrt{3}}$$

2. أ. حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{KI} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{KI}\| = 4\times 2 = \boxed{8}$$

$$AK^2 = AI^2 - KI^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \Rightarrow AK = 2\sqrt{3} \Rightarrow DK = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DK} = \|\overrightarrow{DA}\|.\|\overrightarrow{DK}\| = 4(4 - 2\sqrt{3}) = \boxed{16 - 8\sqrt{3}}$$

ب. حساب DI في المثلث DKI.

$$DI^2 = DK^2 + KI^2 = \left(4 - 2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 = 32 - 16\sqrt{3}$$

$$DI = \sqrt{32 - 16\sqrt{3}} = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 4\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{2\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}$$

جـ. استنتاج قيم $\cos 15°$ و $\cos 75°$.

بما أنّ المثلث ADI متساوي الساقين $(AD = AI)$، فإنّ:

$$\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DI}\right) = \left(\overrightarrow{ID};\overrightarrow{IA}\right) = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$$

$$\left(\overrightarrow{DI};\overrightarrow{DC}\right) = \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right) - \left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DI}\right) = 90° - 75° = 15°$$

$$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DI'}.\overrightarrow{DC} = 4 \times 2 = 8$$

$$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{DI}\|.\|\overrightarrow{DC}\|.\cos\left(\overrightarrow{DI};\overrightarrow{DC}\right)$$

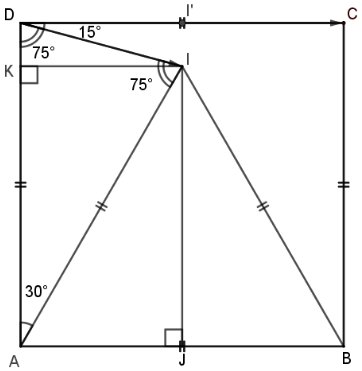
$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{DI};\overrightarrow{DC}\right) = \frac{\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DC}}{\|\overrightarrow{DI}\|.\|\overrightarrow{DC}\|} = \frac{8}{8\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI} = \|\overrightarrow{DA}\|.\|\overrightarrow{DI}\|.\cos\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DI}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DI}\right) = \frac{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DI}}{\|\overrightarrow{DA}\|.\|\overrightarrow{DI}\|} = \frac{16 - 8\sqrt{3}}{8\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^2}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$



التمرين 03: (تمرين 65 ص 302)

اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية:

1. (D) يشمل $A(2;-1)$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ناظمي له.
2. (D) يشمل $A(-\sqrt{2};1)$ وعمودي على المستقيم (BC) حيث $B(-2;1)$ و $C(5;2)$.
3. (D) يشمل O وعمودي على المستقيم (Δ) الذي معادلته $2x+3y-6=0$.

حل التمرين 03:

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \perp (D) \Rightarrow (D): 2x+3y+c=0;$

$$A(2;-1) \in (D) \Rightarrow 2(2)+3(-1)+c=0 \Rightarrow c=-1$$

$$\Rightarrow \boxed{(D): 2x+3y-1=0}$$

2. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} \perp (D) \Rightarrow (D): 7x+y+c=0;$

$$A\left(-\sqrt{2};1\right) \in (D) \Rightarrow 7\left(-\sqrt{2}\right)+1+c=0 \Rightarrow c=7\sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow \boxed{(D): 7x+y+7\sqrt{2}-1=0}$$

3. $(D) \perp (\Delta) \Rightarrow (D): -3x+2y+c=0\,; O \in (D) \Rightarrow c=0$

$$\Rightarrow \boxed{(D): -3x+2y=0}$$

التمرين 04: (تمرين 75 ص 303)

عيّن في كل حالة من الحالات التالية معادلة للدائرة (C).

1. (C) مركزها $A(-1;2)$ ونصف قطرها $R=3$.
2. (C) تشمل النقطة $A(4;1)$ ومركزها $B(2;3)$.
3. (C) قطرها $[AB]$ حيث $A(2;1)$ و $B(4;-1)$.

حل التمرين 04:

عيّن في كل حالة من الحالات التالية معادلة للدائرة (C).

1. $M \in (C) \Rightarrow AM^2=R^2 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=3^2$

$$\Rightarrow \boxed{(C): x^2+y^2+2x-4y-4=0}$$

2. $R=AB=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}. M \in (C) \Rightarrow BM^2=R^2$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=3^2 \Rightarrow \boxed{(C): x^2+y^2-4x-6y+4=0}$$

3. $M \in (C) \Rightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}.\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-4\\y+1\end{pmatrix}=0$

$$\Rightarrow (x-2)(x-4)+(y-1)(y+1)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(C): x^2+y^2-6x+7=0}$$

* * *

التمرين 05:

1. عيّن المجموعتين (γ) و(δ) للنقط M من المستوي حيث:
   - أ. $(\gamma): x^2+y^2+4x-2y-11=0$
   - ب. $(\delta): x^2+y^2-6x+8y+30=0$
2. لتكن (Γ_m) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $x^2+y^2-2mx-1=0$ حيث m وسيط حقيقي.
   - أ. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي m: (Γ_m) دائرة يُطلب تعيين مركزها ω_m ونصف قطرها.
   - ب. بيّن أنّ جميع الدوائر (Γ_m) تمر من نقطتين يُطلب تعيينهما.
   - ج. عيّن مجموعة النقط ω_m لمّا m يمسح $\mathbb{R}$.

* * *

حل التمرين 05:

1. تعيين في كل حالة مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$x^2+y^2+4x-2y-11=0 \Rightarrow (x+2)^2-4+(y-1)^2-1-11=0$$
$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=16$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (γ) دائرة مركزها $\omega(-2;1)$ ونصف قطرها $r=4$.

$$x^2+y^2-6x+8y+30=0 \Rightarrow (x-3)^2-9+(y+4)^2-16+30=0$$
$$\Rightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=-5$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (δ) خالية.

2. $(\Gamma_m): x^2+y^2-2mx-1=0$
   - أ. بيان أنّ (Γ_m) دائرة يُطلب تعيين مركزها ω_m ونصف قطرها.

$$x^2+y^2-2mx-1=0 \Rightarrow (x-m)^2-m^2+y^2-1=0$$
$$\Rightarrow (x-m)^2+y^2=m^2+1$$

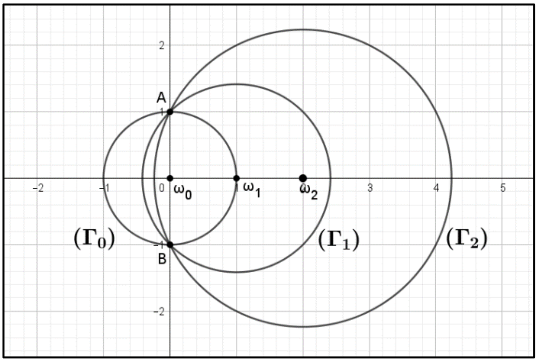
بما أنّ $m^2+1>0$ نستنتج أنّ (Γ_m) دائرة مركزها $\omega_m(m;0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{m^2+1}$.

   - ب. بيان أنّ جميع الدوائر (Γ_m) تمر من نقطتين يُطلب تعيينهما.

$$x^2+y^2-2mx-1=0 \xrightarrow[\text{مهما تكن قيمة } m]{} (-2x)m+(x^2+y^2-1)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -2x=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(0;1); B(0;-1)}$$

   - ج. تعيين مجموعة النقط ω_m لمّا m يمسح $\mathbb{R}$.

بما أنّ ترتيب النقطة ω_m ثابت عند 0، نستنتج أنّ مجموعة النقط ω_m لمّا m يمسح $\mathbb{R}$ هي المستقيم $y=0$ (محور الفواصل).



* * *

التمرين 06:

ABC مثلث حيث: $AB = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ، $AC = 5$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}) = -\frac{5\pi}{6}$.

1. بيّن أنّ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{75}{4}$.
2. باستعمال مبرهنة الكاشي احسب الطول BC.
3. عيّن طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته.

* * *

حل التمرين 06:

1. بيان أنّ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{75}{4}$.

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}) = -\frac{5\pi}{6} \Rightarrow (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \pi - \frac{5\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{75}{4}}$$

2. حساب الطول BC.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{75}{4} + 25 - 25\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 25 - \frac{75}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \boxed{BC = \frac{5}{2}}$$

3. تعين طبيعة المثلث ABC وحساب مساحته.

$$AB^2 = \frac{75}{4} ; AC^2 = 25 ; BC^2 = \frac{25}{4} ; AB^2 + BC^2 = \frac{100}{4} = 25 = AC^2$$

منه نستنتج أنّ المثلث ABC قائم في B.

$$S_{ABC} = \frac{BA \times BC}{2} = \frac{5\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{5}{2}}{2} = \boxed{\frac{25\sqrt{3}}{8}}$$

التمرين 07:

$ABCD$ شبه منحرف قائم في A و D. O منتصف $[AD]$ حيث: $AB = 4$ ، $AD = 2$ و $DC = 3$. (الوحدة cm)

1. احسب الجداءات السلمية الآتية: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$.
2. استنتج أنّ $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 11$. (استعمل علاقة شال)
3. احسب الأطوال OC ، OB ، CB.
4. احسب $\cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$ واستنتج قيس الزاوية $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$.
5. احسب مساحة المثلث OBC.

حل التمرين 07:

1. حساب الجداءات السلمية الآتية: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$.

$$\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{DC}\|}_{\text{مرتبطان خطيا في نفس الاتجاه}} = 4 \times 3 = \boxed{12}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} = -\|\overrightarrow{OA}\|.\|\overrightarrow{OD}\|}_{\text{مرتبطان خطيا متعاكسان في الاتجاه}} = -1 \times 1 = \boxed{-1}$$

2. استنتاج أنّ $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 11$.

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC})$$

$$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} + \underbrace{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{DC}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}}_{0} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = -1 + 12 = \boxed{11}$$

3. حساب الأطوال OC ، OB ، CB.

في المثلث ODC القائم في D لدينا:

$$OC^2 = OD^2 + DC^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow \boxed{OC = \sqrt{10}\ cm}$$

في المثلث OAB القائم في A لدينا:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 = 1 + 16 = 17 \Rightarrow \boxed{OB = \sqrt{17}\ cm}$$

لتكن H المسقط العمودي للنقطة C على $[AB]$. في المثلث BCH القائم في H لدينا:

$$CB^2 = CH^2 + HB^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow \boxed{CB = \sqrt{5}\ cm}$$

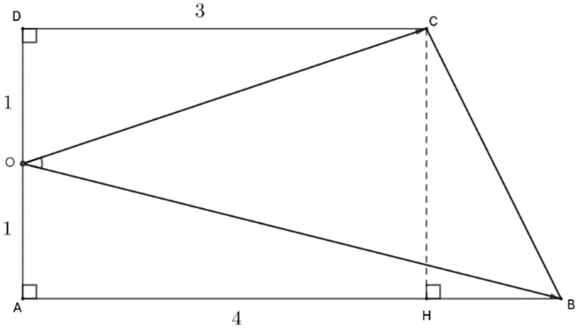
4. حساب $\cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$ واستنتاج قيس الزاوية $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})$.

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OB}\|\|\overrightarrow{OC}\| \times \cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) = \frac{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OB}\|\|\overrightarrow{OC}\|}$$

$$\cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) = \boxed{\frac{11}{\sqrt{170}}} \Rightarrow (\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) \approx \boxed{32{,}47°}$$

5. حساب مساحة المثلث OBC.

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} OB \times OC \times \sin\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right) = \frac{\sqrt{170}}{2} \times \sin(32{,}47°) \approx \boxed{3{,}5\ cm^2}$$



* * *

التحاكي

أ. تعريف التحاكي:

O نقطة من المستوي، k عدد حقيقي غير معدوم.
نسمي تحاكيا h مركزه O ونسبته k، ونرمز له بالرمز $h(O,k)$، التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث: $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$

ب. نتائج:

h تحاكي مركزه O ونسبته k، A وB نقطتان. A' وB' صورتاهما على الترتيب بالتحاكي h. لدينا:

1. $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$
2. $A'B' = |k|AB$
3. صورة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ بالتحاكي h هي النقطة G' مرجح الجملة $\{(A',\alpha);(B',\beta)\}$
4. إذا كانت النقطة A تختلف عن النقطة B، فإنّ (AB) يوازي $(A'B')$.

ج. صور أشكال هندسية بواسطة تحاكي:

- صورة مستقيم (d) هي مستقيم (d') يوازي (d).
- صورة قطعة مستقيمة $[AB]$ هي قطعة مستقيمة $[A'B']$ يوازي $(\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'})$.
- صورة دائرة (C) مركزها I ونصف قطرها r بواسطة تحاكي h نسبته k هي دائرة (C') مركزها $I' = h(I)$ ونصف قطرها $r' = |k|r$.

د. خواص التحاكي:

- التحاكي الذي نسبته العدد الحقيقي k يضاعف الأطوال $|k|$ مرّة ويضاعف المساحات k^2 مرّة.
- إذا كانت A، B وC ثلاث نقط على استقامة واحدة وكانت A'، B' وC' صورها بواسطة تحاك h، فإنّ A'، B' وC' تكون على استقامة واحدة أيضا. (الحفاظ على استقامية النقط).
- إذا كان المستقيمان (d) و(Δ) متوازيين فإنّ صورتيهما بواسطة تحاك h هما مستقيمان (d') و(Δ') متوازيان. (الحفاظ على التوازي).
- في المستوي الموجه نعتبر النقط A، B وC صورها بتحاك h هي A'، B' وC' على الترتيب. لدينا: $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}\right)$ و $BAC = B'A'C'$. (الحفاظ على الزوايا الموجهة).

تمارين تطبيقية:

التمرين 01:

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1. إذا كان $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$، فإنّ نسبة التحاكي h الذي مركزه I ويحوّل A إلى D هي 2.
2. إذا كان $3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$، فإنّ صورة B بالتحاكي h الذي مركزه C ونسبته 3 هي A.
3. h تحاكي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$ حيث: $\begin{cases}x'=-2x+3\\y'=-2y+6\end{cases}$

إحداثيات النقطة الصامدة هي $\Omega(-1;3)$.

* * *

حل التمرين 01:

1) خطأ 2) خطأ 3) خطأ

$$1.\quad \overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{3}\overrightarrow{ID}\Rightarrow\frac{1}{3}\overrightarrow{ID}=-\overrightarrow{IA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IA}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{ID}=-2\overrightarrow{IA}\Rightarrow\boxed{k=-2}.$$

$$2.\quad 3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow3\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}\Rightarrow\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\Rightarrow\boxed{h_{\left(C,\frac{1}{3}\right)}(B)=A}.$$

$$3.\quad \Omega(x_0;y_0)\ \text{نقطة صامدة}\Rightarrow\begin{cases}x_0=-2x_0+3\\y_0=-2y_0+6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x_0=3\\3y_0=6\end{cases}\Rightarrow\boxed{\Omega(1;2)}.$$

* * *

التمرين 02:

في المستوي الموجّه نعتبر النقط A ، B ، C و التحويل النقطي f من المستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث : $\overrightarrow{MM'}=-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+3\overrightarrow{CM}$.

1. بيّن أنّ للتحويل f نقطة صامدة وحيدة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-1);(B,2);(C,3)\}$.
2. بيّن أنّ التحويل f تحاك يُطلب تعيين عناصره المميزة.
3. عيّن مجموعة النقط M التي تحقق: $\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|=4AM$.

* * *

حل التمرين 02:

$\overrightarrow{MM'}=-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+3\overrightarrow{CM}$.

1. بيان أنّ للتحويل f نقطة صامدة وحيدة $G\{(A,-1);(B,2);(C,3)\}$.

$$f(G)=G\Rightarrow\overrightarrow{GG}=-\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{CG}\Rightarrow-\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\boxed{G\{(A,-1);(B,2);(C,3)\}}$$

2. بيان أنّ التحويل f تحاك يُطلب تعيين عناصره المميزة.

$$\overrightarrow{MM'}=-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+3\overrightarrow{CM}\Rightarrow\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=4\overrightarrow{GM}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{GM'}=5\overrightarrow{GM}}$$

منه نستنتج أنّ التحويل f تحاك مركزه G ونسبته 5.

3. تعيين مجموعة النقط M التي تحقق: $\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=4AM$.

$$\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=4AM\Rightarrow\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=4AM\Rightarrow\boxed{MG=MA}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة $[AG]$.

* * *

التمرين 03:

I) ABC مثلث قائم في A حيث: $AB=2a$ و $AC=a$. D نظيرة C بالنسبة إلى A، والنقطة k معرفة بالعلاقة: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

1. احسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AK}$.
2. بيّن أنّ المستقيم (BD) يعامد المستقيم (CK).
3. عيّن التحويلين f_1 و f_2 حيث f_1 يحوّل B إلى K و f_2 يحوّل K إلى B.

II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ النقط: $A(-2;2)$ ، $B(2;2)$ و $C(-2;4)$

1. بيّن أنّ المثلث ABC قائم في A.
2. اكتب معادلة الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها A وطول نصف قطرها AB.
3. اكتب معادلة الدائرة $(\mathcal{C}')$ صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{4}$.
4. بيّن أنّ النقطة B تنتمي إلى المستقيم (D) ذي المعادلة: $x+y-4=0$، ثمّ استنتج معادلة المستقيم (D') صورة المستقيم (D) بالتحاكي h.

* * *

حل التمرين 03:

I) $AB=2a$ ، $AC=a$ ، $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

1. حساب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AK}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}=-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=\boxed{-4a^2}$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|.\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=\boxed{a^2}$$

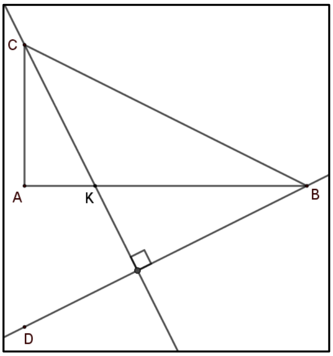
$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AK}=-\left\|\overrightarrow{BA}\right\|.\left\|\overrightarrow{AK}\right\|=-2a\times\frac{1}{4}(2a)=\boxed{-a^2}$$

2. بيان أنّ المستقيم (BD) يعامد المستقيم (CK).

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CK}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AK}\right)$$

$$=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK}=-a^2+a^2=0$$

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CK}=0\Rightarrow\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{CK}\Rightarrow\boxed{(BD)\perp(CK)}$$



3. تعيين التحويلين f_1 و f_2.

بما أنّ $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$، فإنّ التحويل f_1 الذي يحوّل B إلى K هو التحاكي الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{4}$

أمّا التحويل f_2 الذي يحوّل K إلى B فهو التحاكي الذي مركزه A ونسبته 4 لأنّ $\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AK}$.

II) $A(-2;2)$ ، $B(2;2)$ و $C(-2;4)$

1. بيان أنّ المثلث ABC قائم في A.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}.\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$$

2. كتابة معادلة الدائرة $(\mathcal{C})$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\Rightarrow AB=4\,;M(x;y)\in(\mathcal{C})\Rightarrow(x+2)^2+(y-2)^2=4^2$$

$$\Rightarrow\boxed{(\mathcal{C}):x^2+y^2+4x-4y-8=0}$$

3. كتابة معادلة الدائرة $(\mathcal{C}')$.

بما أنّ مركز الدائرة هو مركز التحاكي (النقطة الصامدة)، فإنّ $(\mathcal{C}')$ هي الدائرة التي مركزها A وطول نصف قطرها $r'=\frac{1}{4}\times4=1$ ، ومنه:

$$M(x;y)\in(\mathcal{C}')\Rightarrow(x+2)^2+(y-2)^2=1^2$$

$$\Rightarrow\boxed{(\mathcal{C}'):x^2+y^2+4x-4y+7=0}$$

4. بيان أنّ النقطة B تنتمي إلى المستقيم (D) واستنتاج معادلة المستقيم (D').

$$x_B+y_B-4=2+2-4=0\Rightarrow\boxed{B\in(D)}$$

بما أنّ صورة B بالتحاكي h هي K، نستنتج أنّ المستقيم (D') هو المستقيم الذي يوازي (D) ويشمل K.

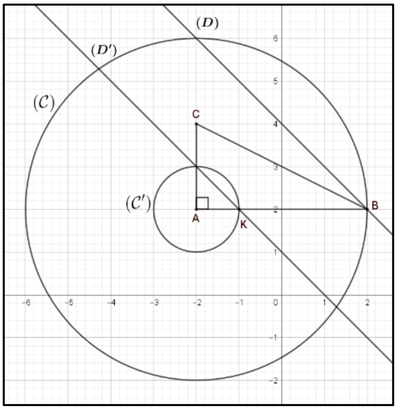
$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\begin{cases}x_K+2=\frac{1}{4}(4)\\y_K-2=\frac{1}{4}(0)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_K=-1\\y_K=2\end{cases}\Rightarrow K(-1;2)$$

$$(D'):x+y+c=0\,;K\in(D')$$

$$\Rightarrow-1+2+c=0\Rightarrow c=-1$$

$$\Rightarrow\boxed{(D'):x+y-1=0}$$



التمرين 04:

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ النقط: $A(1;-2)$ ، $B(0;-8)$ ، $C(0;-1)$ ، $D(-2;-6)$ ، $E(-3;2)$ والتحاكي h الذي مركزه $\Omega(x_0;y_0)$ ونسبته k.

1. لتكن النقطة $M'(x';y')$ صورة النقطة $M(x;y)$ بالتحاكي h. اكتب العبارة التحليلية للتحاكي h.
2. لتكن B وD صورتا النقطتين A وC بالتحاكي h على الترتيب.
   - أ. اكتب $\overrightarrow{BD}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$ ثمّ استنتج النسبة k.
   - ب. جد إحداثيتي المركز Ω.
3. بيّن أنّ النقطتين A وE تنتميان لنفس الدائرة (C) ذات المركز $\omega(-2;-1)$ يُطلب حساب نصف قطرها وكتابة معادلتها.
4. احسب مساحة الدائرة (C') صورة (C) بالتحاكي h.
5. نعتبر المستقيم (D_m) ذا المعادلة: $-x+3y=m$، حيث m وسيط حقيقي. عيّن قيم m حتى يكون (D_m) مماسا للدائرة (C) في النقطة E.

* * *

حل التمرين 04:

1. كتابة العبارة التحليلية للتحاكي h.

$$M'=h(M)\Rightarrow\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}\Rightarrow\begin{cases}x'-x_0=k(x-x_0)\\y'-y_0=k(y-y_0)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x'=kx+(1-k)x_0\\y'=ky+(1-k)y_0\end{cases}}$$

2. $h(A)=B$ ، $h(C)=D$.
   - أ. كتابة $\overrightarrow{BD}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$ واستنتاج النسبة k.

$$\begin{cases}h(A)=B\\h(C)=D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{\Omega B}=k\overrightarrow{\Omega A}\\\overrightarrow{\Omega D}=k\overrightarrow{\Omega C}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{B\Omega}=k\overrightarrow{A\Omega}\ldots①\\\overrightarrow{\Omega D}=k\overrightarrow{\Omega C}\ldots②\end{cases}\xRightarrow[①+②]{}\boxed{\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{AC}}$$

$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=k\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2=-k\\2=k\end{cases}\Rightarrow\boxed{k=2}$$

   - ب. تعيين إحداثيتي المركز Ω.

$$h(A)=B\Rightarrow\begin{cases}x_B=2x_A-x_0\\y_B=2y_A-y_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=2-x_0\\-8=-4-y_0\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x_0=2\\y_0=4\end{cases}}$$

3. بيان أنّ النقطتين A وE تنتميان لنفس الدائرة (C).

$$\omega A=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}\ ;\ \omega E=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

منه نستنتج أنّ النقطتين A وE تنتميان للدائرة (C) ذات المركز $\omega(-2;-1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{10}$.

$M \in (C) \Rightarrow \omega M^2 = r^2 \Rightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 10$

$$\Rightarrow \boxed{(C): x^2 + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0}$$

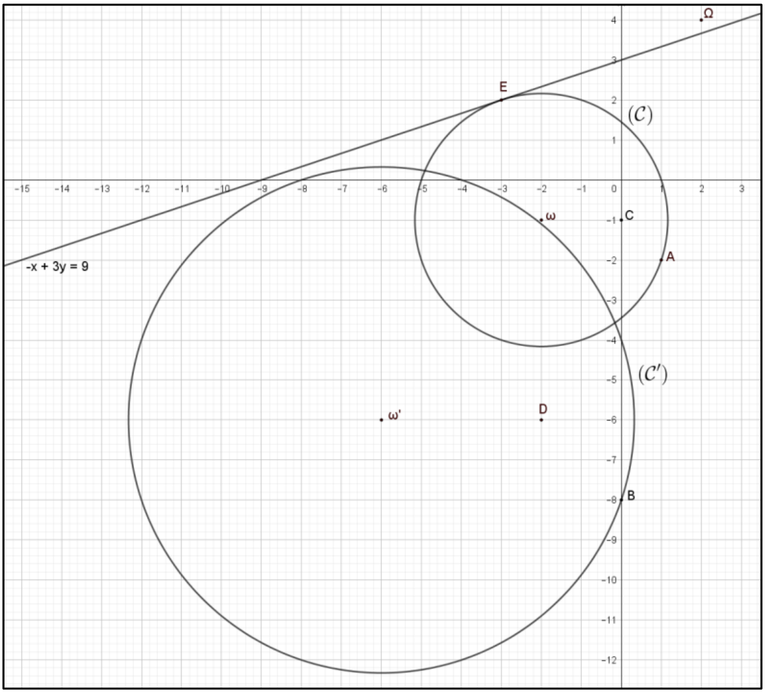
4. حساب مساحة الدائرة (C') صورة (C) بالتحاكي h.

$r' = 2r = 2\sqrt{10} \Rightarrow S' = \pi r'^2 = \boxed{40\pi\ cm^2}$

5. تعيين قيم m حتى يكون (D_m) مماسا للدائرة (C) في النقطة E.

بما أنّ الشعاع $\overrightarrow{\omega E}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ ناظمي للمستقيم (D_m) يكون هذا الأخير مماسا للدائرة (C) في النقطة E عندما تنتمي E إلى (D_m).

$E \in (D_m) \Rightarrow -(-3) + 3(2) = m \Rightarrow \boxed{m = 9}$



* * *

13) الاحتمالات:

خواص الاحتمالات

الخاصية	لغة الحوادث
$0 \leq P(A) \leq 1$	A حادثة كيفية
$P(\emptyset) = 0$	الحادثة المستحيلة
$P(\Omega) = 1$	الحادثة الأكيدة
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	الحادثة العكسية
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	A و B حادثتان كيفيتان
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	A و B حادثتان غير متلائمتين
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$	A و B حادثتان كيفيتان
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	A و B حادثتان مستقلتان

قانون الاحتمال، الأمل الرياضياتي، التباين والانحراف المعياري لمتغيّر عشوائي

متغيّر عشوائي X هو دالة عددية معرّفة على مجموعة المخارج Ω ومزوّدة باحتمال P

$$X \in \{x_1; x_2; \dots; x_n\}\ ; P(X = X_i) = P_i\ ;\ \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

قانون الاحتمال

X_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = X_i)$	P_1	P_2	...	P_n

الأمل الرياضياتي	التباين	الانحراف المعياري
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \times P_i$	$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

شجرة الاحتمالات

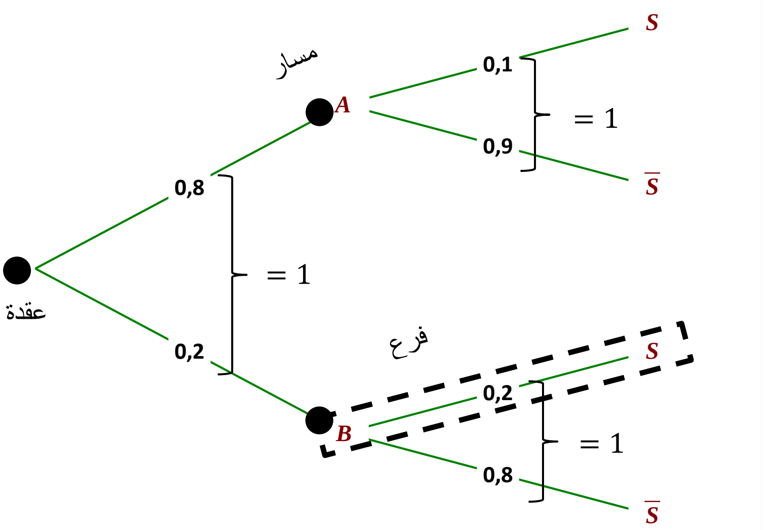
في كثير من الأحيان يمكننا نمذجة تجربة عشوائية باستعمال شجرة الاحتمالات والتي تسهل علينا بالحصول على جميع المخارج المتعلقة بهذه التجربة وحساب احتمالاتها.

قواعد استعمال شجرة الاحتمالات:

1. مجموع الاحتمالات الصادرة عن كل عقدة يساوي 1
2. احتمال الحادثة المتعلقة بكل مسار يساوي جداء احتمالات الفروع الموجودة على هذا المسار
3. احتمال كل حادثة يساوي مجموع احتمالات المسارات المؤدية لهذه الحادثة

مثال:

لتكن A ، B و S ثلاث حوادث و $\bar{S}$ الحادثة العكسية للحادثة S.



لدينا في هذه الشجرة 3 عقد، 4 مسارات و6 فروع.

$$P(A \cap S) = 0,8 \times 0,1 = \boxed{0,08}$$

$$P(A \cap \bar{S}) = 0,8 \times 0,9 = \boxed{0,72}$$

$$P(B \cap S) = 0,2 \times 0,2 = \boxed{0,04}$$

$$P(B \cap \bar{S}) = 0,2 \times 0,8 = \boxed{0,16}$$

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) = 0,08 + 0,04 = \boxed{0,12}$$

$P(\bar{S}) = P(A \cap \bar{S}) + P(B \cap \bar{S}) = 0,72 + 0,16 = \boxed{0,88}$ ... ① طريقة

$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,12 = \boxed{0,88}$ ... ② طريقة

* * *

تمارين تطبيقية:

التمرين 01:

في مدينة 20% من الأشخاص لديهم حاسوب، 90% منهم يستعملون الأنترنت و60% من الأشخاص الذين ليس لديهم حاسوب يستعملون الأنترنت. نختار عشوائيا شخصا من هذه المدينة.

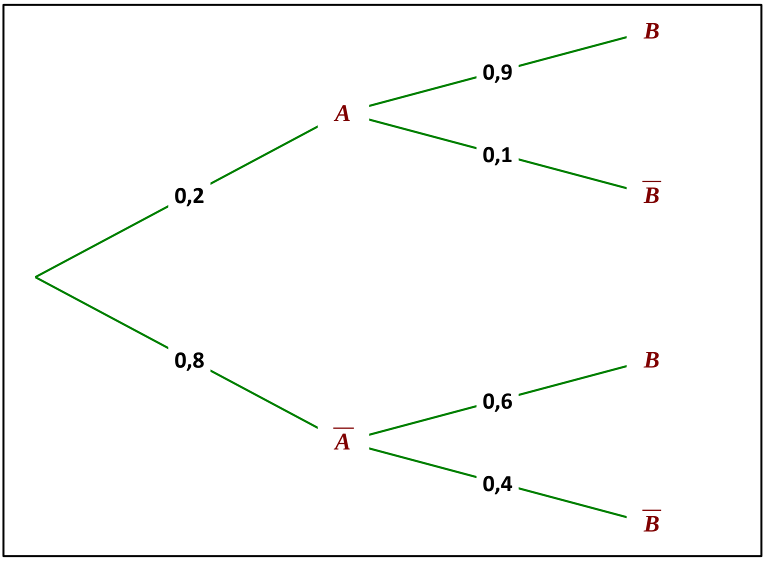
نرمز بـ A إلى الحادثة: " الشخص المختار لديه حاسوب " و B إلى الحادثة: " الشخص المختار يستعمل الأنترنت"

1. شكل شجرة الاحتمالات.
2. ما هو احتمال أن يكون الشخص المختار ليس لديه حاسوب ولا يستعمل الأنترنت؟
3. احسب $P(\bar{A}\cap B)$ و$P(A\cap B)$ ، ثمّ استنتج $P(B)$

* * *

حل التمرين 01:

1. **شجرة الاحتمالات**



2. **حساب احتمال أن يكون الشخص المختار ليس لديه حاسوب ولا يستعمل الأنترنت**

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0{,}8\times 0{,}4 = \boxed{0{,}32}$$

3. **حساب $P(\bar{A}\cap B)$ و$P(A\cap B)$ واستنتاج $P(B)$**

$$P(\bar{A}\cap B) = 0{,}8\times 0{,}6 = \boxed{0{,}48}\ ;\ P(A\cap B) = 0{,}2\times 0{,}9 = \boxed{0{,}18}$$

$$P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B) = 0{,}18 + 0{,}48 = \boxed{0{,}66}$$

* * *

التمرين 02:

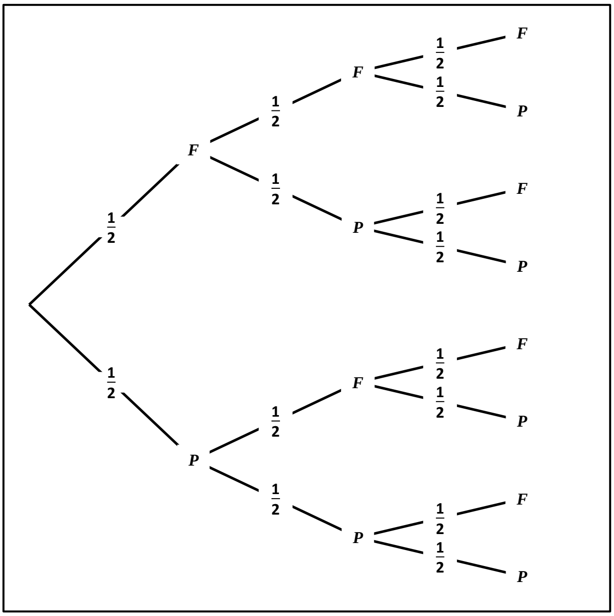
نرمي قطعة نقدية غير مزيفة ثلاث مرات متتابعة. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل 3 رميات متتابعة عدد الأوجه الظاهرة "F".

1. شكّل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة.
2. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X.
3. احسب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X.

* * *

حل التمرين 02:

1. **شجرة الاحتمالات.**



2. **قانون احتمال المتغيّر العشوائي X.**

$\boxed{X = \{0; 1; 2; 3\}}$

$$P(X = 0) = P(PPP) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{8}}$$

$$P(X = 1) = P(FPP + PFP + PPF) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boxed{\frac{3}{8}}$$

$$P(X = 2) = P(FFP + FPF + PFF) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boxed{\frac{3}{8}}$$

$$P(X = 3) = P(FFF) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{8}}$$

X_i	0	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. **حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي X.**

$$E(X) = \sum X_i \times P_i = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{12}{8} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0^2\left(\frac{1}{8}\right) + 1^2\left(\frac{3}{8}\right) + 2^2\left(\frac{3}{8}\right) + 3^2\left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$V(X) = \boxed{\frac{3}{4}} \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

* * *

التمرين 03:

نرمي في آن واحد زهرتي نرد غير مزيفين يحمل أحدهما الأرقام 1,1,2,2,2,3 ويحمل الآخر الأرقام 1,2,3,3,3,4، وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بنتيجة كل رمية:

العدد $(1-)$ إذا كان الرقمان زوجيين، العدد الأكبر إذا كان الرقمان زوجيين والعدد الأصغر إذا كان أحد الرقمين زوجي والآخر فردي.

1. عيّن قيم المتغيّر العشوائي X.
2. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X.
3. احسب الأمل الرياضي والتباين للمتغيّر العشوائي X.

* * *

حل التمرين 03:

1. **تعيين قيم المتغيّر العشوائي X.**

	1	1	2	2	2	3
1	1	1	1	1	1	3
2	1	1	-1	-1	-1	2
3	3	3	2	2	2	3
3	3	3	2	2	2	3
3	3	3	2	2	2	3
4	1	1	-1	-1	-1	3

$$\boxed{X = \{-1; 1; 2; 3\}}$$

2. تعيين قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي *X*.

$$P(X=-1)=\frac{6}{36}=\boxed{\frac{1}{6}}\ ;\ P(X=1)=\frac{9}{36}=\boxed{\frac{1}{4}}\ ;\ P(X=2)=\frac{10}{36}=\boxed{\frac{5}{18}}$$

$$P(X=3)=\frac{6}{36}=\boxed{\frac{11}{36}}$$

3. حساب الأمل الرياضي والتباين للمتغيّر العشوائي *X*.

X_i	-1	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{11}{36}$

1. حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري للمتغيّر العشوائي *X*.

$$E(X)=\sum X_i\times P_i=-1\left(\frac{1}{6}\right)+1\left(\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{5}{18}\right)+3\left(\frac{11}{36}\right)=\boxed{\frac{14}{9}}$$

$$V(X)=(-1)^2\left(\frac{1}{6}\right)+1^2\left(\frac{1}{4}\right)+2^2\left(\frac{5}{18}\right)+3^2\left(\frac{11}{36}\right)-\left(\frac{14}{9}\right)^2$$

$$V(X)=\boxed{\frac{301}{162}}$$

* * *

اعتبارات

الفصل

الأول

الموضوع الأول

التمرين الأول :

I- لتكن f دالة كثير حدود معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^8 - 10x^4 + 9$

1. بيّن أنّ $f = goh$ حيث $h(x) = x^4 - 4$ و g دالة كثير حدود معرفة بـ: $g(x) = x^2 + ax + b$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.
2. حل المتراجحة $h(x) < 0$.

II- نضع: $a = -2$ و $b = -15$

1. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $g(x) = (x-1)^2 - 16$
2. اكتب g على شكل مركّب دالتين u و v يطلب تعيينهما.
3. استنتج اتجاه تغير الدالة g على كل من المجالين $]-\infty; 1]$ و $[1; +\infty[$.
4. شكل جدول تغيرات الدالة g.
5. اكتب g على شكل جداء دالتين تآلفيتين ثم استنتج إشارتها.
6. أثبت أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_g).
7. ارسم (P) منحنى الدالة مربّع في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = \frac{1}{2}cm$، ثمّ استنتج رسم المنحنى (C_g) في نفس المعلم.

III- نضع: $S(x) = g(|x|)$ و $K(x) = |g(x)|$

1. اكتب كلا من K و S دون رمز القيمة المطلقة.
2. بيّن كيف يمكن إنشاء المنحنيين (C_k) و (C_s) اعتمادا على المنحنى (C_g)، ثمّ ارسمهما في نفس المعلم مستخدما ألوانا مختلفة.

* * *

التمرين الثاني :

نعتبر كثير الحدود: $P_m(x) = (m^2 - 4)x^4 + (m + 1)x^3 - (2 + m)x^2 - \frac{5}{2}mx + 2$

1. عيّن قيم m حتى يكون $P_m(x)$ من الدرجة الثالثة.
2. تحقق أنّ العدد 2 هو جذر لـ $P_2(x)$.
3. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x: $P_2(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$، حيث c, b, a أعداد حقيقية يُطلب تعيينها.
4. حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة $P_2(x) = 0$.
5. ادرس إشارة $P_2(x)$ ثمّ استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المتراجحة $3x^3 + 2 \leq 4x^2 + 5x$.

6. باستعمال السؤال (3) استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة $3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+2\left(x-\frac{2}{3}\right)=1$.

* * *

التمرين الثالث :

I- ABC مثلث كيفي

1. عيّن ثمّ أنشئ النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$.
2. لتكن النقطة D منتصف $[BC]$. بيّن أنّ G منتصف $[AD]$.
3. لتكن (E_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

   أ. بيّن أنّ النقطة A تنتمي إلى (E_1).

   ب. بيّن أنّ الشعاع $\vec{v}=-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M.

   ج. عيّن و أنشئ المجموعة (E_1).

4. عيّن و أنشئ (E_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

II- نفرض مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ونأخذ $A(2;1)$ ، $B(2;4)$ و $C(6;0)$

1. جد إحداثيات النقطة G.
2. لتكن $F(2;2)$ مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1)\}$. عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث تكون النقطة A مرجح الجملة $\{(B,\alpha);(F,\beta)\}$.

* * *

التمرين الرابع:

يحتوي كيس على ثلاث كرات بيضاء ، كرتين حمراوين و كرتين سوداوين. نسحب كرتين على التوالي و بدون إرجاع. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

1. عيّن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.
2. عيّن قانون احتمال المتغير X.
3. أحسب الأمل الرياضياتي و التباين للمتغير X.

* * *

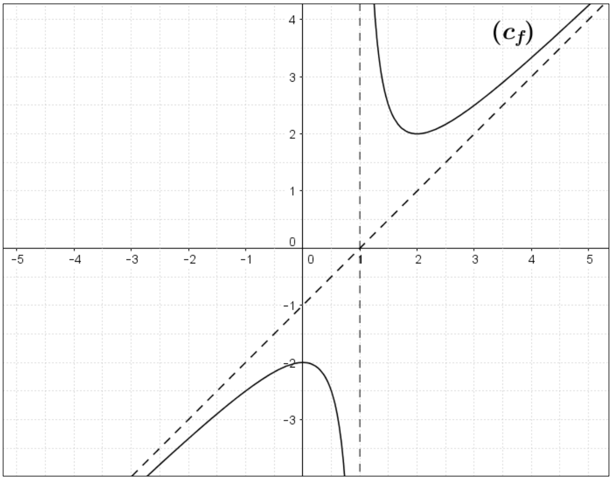
الموضوع الثاني

التمرين الأول :

الأسئلة التالية مستقلة عن بعضها البعض.

1. f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ و g دالة معرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \sqrt{x}$
   - أ. احسب كلا من $fog(1)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$.
   - ب. عيّن D_{gof} مجموعة تعريف الدالة gof، ثمّ عيّن عبارة $gof(x)$.
2. f دالة معرّفة بالعبارة: $f(x) = x^2 - 4x + 6$ و $\Omega(2; 2)$ نقطة من المستوي
   - أ. اكتب معادلة (C_f) منحنى الدالة f في المعلم $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ ثمّ ارسمه.
   - ب. بيّن أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ محور تناظر للمنحنى (C_f).
3. (P) كثير حدود معرّف بالعبارة: $P(x) = 2x^3 + x^2 + 1$
   - أ. احسب $P(-1)$. ماذا تستنتج؟
   - ب. عيّن الأعداد الحقيقية c, b, a حيث: $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$
4. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $\frac{x^2+1}{1-x} > 1$
5. f دالة معرّفة بتمثيلها البياني (C_f) التالي:

   ارسم منحنى كلا من الدالتين: $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$.



التمرين الثاني :

نعتبر المعادلة (E) ذات المتغيّر x والوسيط m حيث:

$$(E):(m-1)x^2-2(m+3)x+2m-5=0$$

عيّن مجموعة قيم m في كل حالة من الحالات التالية:

1. المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا يُطلب تعيينه.
2. المعادلة (E) من الدرجة الثانية.
3. العدد (-1) حل للمعادلة (E)، ثمّ عيّن الحل الثاني.
4. المعادلة (E) تقبل حلين أحدهما مقلوب الآخر.
5. المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

* * *

التمرين الثالث :

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقط: $A(-2;0)$ ، $B(4;-2)$ و $C(2;3)$. H نقطة معرّفة كما يلي: $-\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{BH}=\vec{0}$

و G_α مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\alpha^2+1);(C,4\alpha-1)\}$ حيث α عدد حقيقي.

1. بيّن أنّ النقطة H هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين على الترتيب بمعاملين يُطلب تعيينهما.
2. علم النقط A ، B و C، ثمّ أنشئ النقطة H.
3. عيّن إحداثيي النقطة K حتى تكون النقطة H مركز ثقل المثلث AKC.
4. عيّن قيم α التي من أجلها تكون G_α موجودة، ثمّ أنشئ G_1.
5. بيّن أنّ النقط C ، H و G_1 على استقامة واحدة.
6. عيّن وأنشئ المجموعتين (E_1) و (E_2) حيث:

$$(E_1):\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$$

$$(E_2):\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$$

* * *

التمرين الرابع:

يحتوي كيس على ثلاث كرات بيضاء و واحدة حمراء. نسحب كرتين على التوالي و بدون إرجاع.

1. عيّن شجرة الإمكانيات.
2. أحسب احتمال الحوادث التالية :
   - A. " سحب كرتين من نفس اللون".
   - B. " سحب كرة بيضاء و كرة حمراء".
   - C. " سحب كرة بيضاء و كرة حمراء بهذا الترتيب".
   - D. " سحب كرتين حمراوين".
3. نرقم الكرات البيضاء بالعدد (1) و الحمراء بالعدد (1-) ، و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المحصّل عليهما.
   عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي والتباين.

* * *

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 7x - 6$

1. تحقق أنّ العدد (-2) جذر للدالة f.
2. أثبت أنّ: $f(x) = (x+2)g(x)$ حيث $g(x)$ دالة كثير حدود يطلب تعيينها.
3. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $g(x) = (x-1)^2 - 4$، ثمّ استنتج أنّه يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $hok(x)$ حيث h و k دالتان يطلب تعيينهما.
4. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x: $g(x) - g(1) \geq 0$، ثمّ استنتج أصغر قيمة ممكنة للدالة g.
5. حدد اتجاه تغير الدالة g على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[1;+\infty[$، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
6. أثبت أنّ المنحنى (C_g) يقطع محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يُطلب تعيينهما.
7. ادرس إشارة الدالة g ثم استنتج إشارة الدالة f.
8. استنتج حلول المعادلتين: $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ و $x\sqrt{x} - 7\sqrt{x} - 6 = 0$، ثمّ حل المتراجحة: $f(x) \leq 0$.
9. أثبت أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_g).
10. اشرح كيف يمكن استنتاج رسم المنحنى (C_g) انطلاقا من التمثيل البياني للدالة مربّع، ثمّ أنشئ (C_g).

* * *

التمرين الثاني :

نعتبر كثير الحدود $f(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$.

1. أحسب $f(-1)$ و $f(2)$، ثمّ حلل $f(x)$.
2. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $f(x) \geq 0$.
3. عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية $P(x)$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x :
   $P(x+1) - P(x) = x$
4. استنتج المجموع: $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$.

* * *

التمرين الثالث :

ABC مثلث قائم في A حيث $AB = AC = 2$.

I منتصف $[AB]$ و J نظيرة I بالنسبة إلى B

1. عيّن قيم العدد الحقيقي m بحيث تكون النقطة G_m مرجحا للجملة $\{(A, m-1); (B, 2m-3)\}$.
2. أ. عبر عن الشعاع $\overrightarrow{AG_m}$ بدلالة كلا من $\overrightarrow{AB}$ و m.
   ب. عيّن قيم m بحيث تكون النقطة G_m منطبقة على I.
   ج. عيّن قيم m بحيث تكون النقطة G_m منطبقة على J.
   د. عيّن قيم m بحيث تقع النقطة G_m داخل القطعة $[AB]$.
3. عيّن ثمّ أنشئ المجموعة (γ) للنقط M من المستوي حيث:
   $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{3}{2}\|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}\|$.
4. ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k طبيعة المجموعة (δ) للنقط M من المستوي حيث:
   $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 5(1-k)^2$.

* * *

التمرين الرابع:

نرمي حجري نرد ، أحدهما مكعّب متوازن أوجهه مرقّمة من 1 إلى 6 و الآخر رباعي وجوه متوازن أوجهه مرقّمة من 1 إلى 4. نسجل جداء الرقمين الناتجين :

1. أكمل الجدول التالي :
2. عرّف قانون الاحتمال لرقم آحاد جداء الرقمين الناتجين و احسب أمله الرياضياتي.

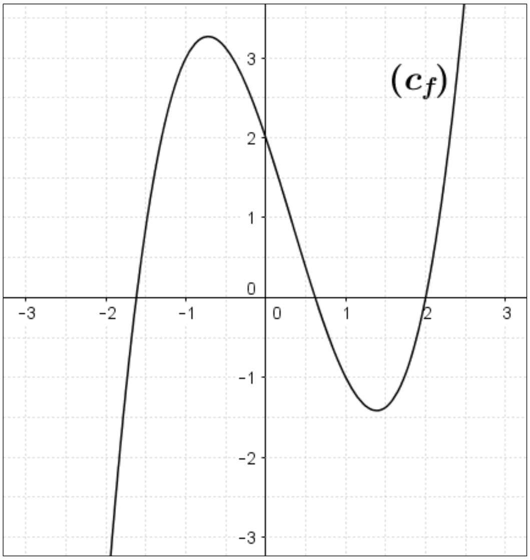
6	5	4	3	2	1	المكعّب الرباعي
						1
						2
						3
						4

* * *

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



1. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$، حيث c, b, a أعداد حقيقية يُطلب تعيينها.
2. ادرس حسب قيم x وضعية (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل.
3. انقل الشكل على ورقتك، ثمّ أنشئ في نفس المعلم وبألوان مختلفة $(C_3), (C_2), (C_1)$ التمثيلات البيانية للدوال f_3, f_2, f_1 على الترتيب حيث:

$$f_1(x) = |x^3 - x^2 - 3x + 2| \quad ; \quad f_2(x) = x^2|x| - x^2 - 3|x| + 2$$
$$f_3(x) = (x-1)^3 - (x-1)^2 - 3x + 5$$

4. نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = (x^3 - x^2 - 3x + 2)^2 \quad ; \quad g(x) = x^2$$

أ. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x) = gof(x)$.

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة h على كل من المجالين $\left[0; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ و $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1\right]$.

التمرين الثاني :

1. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:

$$mx^2 - 2x + m = 0 \ldots ①$$

2. ما هي قيم m التي تقبل من أجلها المعادلة ① حلين موجبين تماما ؟

* * *

التمرين الثالث :

ABC مثلث حيث $BC = 8cm, AC = 12cm, AB = 10cm$.

لتكن النقطة I مرجح الجملة $\{(A,1);(B,3)\}$، النقطة J مرجح الجملة $\{(B,3);(C,-1)\}$ و G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,3);(C,-1)\}$.

1. أنشئ النقطتين I و J.
2. بيّن أنّ النقط I، C و G في استقامية.
3. بيّن أنّ النقط J، A و G في استقامية.
4. ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمستقيمين (CI) و (AJ)؟ أنشئ النقطة G.
5. عيّن ثمّ أنشئ (Δ) مجموعة النقط M من المستوي حيث:
   $\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 2\left\|3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$.
6. عيّن ثمّ أنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث:
   $\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right\|$.

* * *

التمرين الرابع:

يحتوي كيس على 6 كرات مرقّمة من 1 إلى 6. نسحب كرة من الكيس ، نسجّل رقمها و نعيدها إلى الكيس ثمّ نسحب كرة ثانية. نسمي X رقم الكرة الأولى و Y رقم الكرة الثانية.

1. ما احتمال الحوادث التالية :
   - A. $X + Y = 5$.
   - B. $X . Y < 6$.
   - C. $(X + Y = 5)$ أو $(X . Y < 6)$.
2. ليكن E المتغير العشوائي المعرّف كما يلي : $E = |X - Y|$.
   - أ. عيّن قيم المتغير العشوائي E.
   - ب. عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي E.
   - ج. أحسب الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي E.

* * *

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x^2-2x+2 \quad ; \quad g(x)=\frac{x}{x-1}$$

وليكن (C_f) و(C_g) تمثيليهما البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عيّن D_f و D_g مجموعتي تعريف كل من الدالتين f و g.
2. أ. عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x:
   $f(x)=(x+a)^2+b.$
   - ب. فكك الدالة f إلى مركب دالتين u و v يُطلب تعيينهما.
   - ج. حدد اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[1;+\infty[$، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
   - د. انطلاقا من التمثيل البياني للدالة مربّع، حدد طريقة رسم المنحنى (C_f)
   - ه. أنشئ المنحنى (C_f).
3. أ. تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ لدينا: $g(x)=1+\frac{1}{x-1}$
   - ب. عيّن دساتير تغيير المعلم ثمّ اكتب معادلة المنحنى (C_g) في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\Omega(1;1)$.
   - ج. ارسم المنحنى (C_g).
4. انطلاقا من المنحنى (C_f)، ارسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة $h(x)=|f(x)|$
5. عيّن بيانيا حلول المعادلة $f(x)=g(x)$.
6. نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $(E): x^3-3x^2+3x-2=0$
   - أ. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ المعادلة $f(x)=g(x)$ تكافئ (E)
   - ب. عيّن الأعداد الحقيقية c,b,a حيث:

   $$x^3-3x^2+3x-2=(x-2)(ax^2+bx+c)$$

   - ج. استنتج حلول المعادلة $f(x)=g(x)$.

* * *

التمرين الثاني :

1. حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة $3x^2 - 5x - 2 = 0$.
2. نعتبر كثير الحدود $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4$.
   - أ. تحقق أنّ $x_0 = 2$ جذر لكثير الحدود $P(x)$.
   - ب. استنتج تحليلا لـ $P(x)$.
3. حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$، ثمّ استنتج حلول المتراجحة $P(x) \leq 0$.
4. اكتب عبارة $P(y^2)$، ثمّ استنتج حلول المعادلة $y^2 = \frac{11y^4-4}{3y^4+8}$.

* * *

التمرين الثالث :

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقط: $A(-2;1)$ ، $B(1;4)$ و $C(1;-2)$ و $D(4;1)$ ولتكن G مركز ثقل المثلث ABC.

1. علم النقط C, B, A و D.
2. عيّن إحداثيتي النقطة G.
3. بيّن أنّ $-\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$. ماذا تمثل النقطة D بالنسبة للنقط C, B, A ؟
4. بيّن أنّ النقط A ، G و D في استقامية.
5. عيّن وأنشئ المجموعتين (E_1) و (E_2) حيث:

$$(E_1): \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6$$

$$(E_2): \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

* * *

التمرين الرابع:

يحتوي كيس على 6 قريصات مرقّمة من 1 إلى 6 غير متمايزة عند اللمس. نسحب من الكيس على التوالي و مع الإرجاع قريصتين.

1. عيّن عدد عناصر المجموعة الشاملة Ω.
2. ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لقريصتين مجموع رقميهما.
   - أ. أكمل الجدول المقابل.
   - ب. استنتج قيم المتغير العشوائي X.
   - ج. عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي.

6	5	4	3	2	1	سحب 1 سحب 2
						1
						2
						3
						4
						5
						6

* * *

الموضوع السادس

التمرين الأول :

I- لتكن الدالة f المعرفة على D_f كما يلي: $f(x)=\frac{-x}{1-x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$: $f(2-x)+f(x)=2$، ثمّ استنتج أنّ الدالة f فردية في المعلم $(A;\vec{i};\vec{j})$ حيث A نقطة يُطلب تعيينها.
3. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_f$: $f(1-x)=\frac{1}{f(x)}$

II- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{0;1\}$ كما يلي: $g(x)=f(1-x).f(x)$

1. بيّن دون استعمال الآلة الحاسبة أنّ: $g(x)=g(2)=g(2019)=g(2020)$
2. ارسم المنحنيين (C_f) و$\left(C_g\right)$ في المعلم $(A;\vec{i};\vec{j})$.

* * *

التمرين الثاني :

لتكن المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$x^2+mx+m+3=0 \ldots ①$$

1. بيّن أنّ $\Delta=(m-6)(m+2)$، ثمّ ادرس إشارته.
2. عيّن قيم m التي تقبل من أجلها المعادلة ① حلين مختلفين في الإشارة.
3. عيّن قيم m التي تقبل من أجلها المعادلة ① حلين سالبين تماما.

* * *

التمرين الثالث :

ليكن $ABCD$ مربعا مركزه O و G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,6)\}$

1. أنشئ I مرجح الجملة $\{(A,1);(C,3)\}$ و J مرجح الجملة $\{(B,2);(D,6)\}$.
2. بيّن أنّ النقطة G هي مرجح النقطتين I و J المرفقتين على الترتيب بمعاملين يُطلب تعيينهما، ثمّ أنشئ G.
3. عيّن ثمّ أنشئ المجموعة (E) للنقط M من المستوي التي تحقق المساواة: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}\right\|=6\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$.
4. المستوي منسوب إلى المعلم $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$.

أ. جد إحداثيي النقطة G في هذا المعلم.

ب. جد إحداثيي النقطة G' مرجح الجملة $\{(A,3);(B,6);(C,1);(D,2)\}$.

ج. استنتج أنّ النقط O ، G و G' في استقامية.

* * *

التمرين الرابع:

يحتوي كيس على ثلاث كرات متجانسة لا نفرق بينها عند اللمس. واحدة حمراء و واحدة خضراء و واحدة زرقاء. نسحب عشوائيا وعلى التوالي كرتين بحيث نسحب الكرة الأولى و نسجّل لونها ثمّ نعيدها إلى الكيس و نسحب الكرة الثانية و نسجّل اللون المحصّل عليه بهذا الترتيب.

1. عيّن مجموعة الإمكانيات Ω.
2. نفرض سحب كرة حمراء يعطي ربح نقطة و سحب كرة خضراء يعطي ربح نقطتين و سحب كرة زرقاء يعطي خسارة ثلاث نقاط.
   - أ. عيّن قيم المتغير العشوائي لهذه التجربة.
   - ب. أحسب احتمال أن يخسر اللاعب.

* * *

الموضوع السابع

التمرين الأول :

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=-2+\sqrt{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. تحقق أنّ الدالة f هي مركب دالتين u و v يُطلب تعيينهما.
2. اعتمادا على اتجاه تغير الدالتين u و v استنتج اتجاه تغير الدالة f.
3. حل في المجال $]1;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=0$.
4. اشرح كيف يمكن رسم المنحنى (C_f) انطلاقا من التمثيل البياني للدالة جذر تربيعي
5. لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=|f(x)|$ و(C_g) تمثيلها البياني. استنتج رسم المنحنى (C_g) انطلاقا من (C_f) مع الشرح.
6. لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $h(x)=-2+\sqrt{|x|-1}$. اشرح كيفية رسم المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ أنشئه في نفس المعلم.

* * *

التمرين الثاني :

I- بيّن أنّ المساواة التالية صحيحة: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=5+2\sqrt{6}$

II- ليكن $A_m(x)$ كثير حدود ذو المتغيّر الحقيقي x والوسيط الحقيقي m حيث:

$$A_m(x)=x^2+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)mx-\sqrt{6}\,m^2$$

1. ادرس مميز المعادلة $A_m(x)=0$ بدلالة m.
2. ادرس حسب قيم m عدد حلول المعادلة $A_m(x)=0$.
3. هل توجد قيم m التي تقبل من أجلها المعادلة $A_m(x)=0$ حلين سالبين تماما ؟
4. عيّن حسب قيم m حلول المتراجحة $A_m(x)\leq 0$.

* * *

التمرين الثالث :

ABC مثلث كيفي.

لتكن النقط: I ، J و K حيث: $\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

1. مثل النقط I ، J و K .
2. بيّن أنّ النقطة I هي مرجح النقطتين B و C بمعاملين يُطلب تعيينهما.

3. بيّن أنّ كلا من النقطتين J و K هما مرجحين لرأسين للمثلث ABC مرفقتين بمعاملين يُطلب تعيينهما.
4. بيّن أنّ المستقيمات (AI) ، (BJ) و (CK) تتقاطع في نقطة واحدة. يمكنك استعمال النقطة G مرجح الجملة $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$
5. عيّن ثمّ أنشئ (Δ) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\| = \|-2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\|.$$

6. عيّن ثمّ أنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\|-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|.$$

* * *

التمرين الرابع:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقط $A(0 ; 1)$ ، $B(1 ; 0)$ و $C(-1 ; 0)$. نرفق النقط A ، B و C بالمعاملات 1 ، β و δ على الترتيب (β و δ عددان حقيقيان). G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,\beta);(C,\delta)\}$ ... (1)

1. ناقش حسب قيم β و δ وجود النقطة G. عيّن إحداثيتي G.
2. نرمي زهرة نرد مرتين وجوهها مرقّمة كما يلي : 3- ، 2- ، 1- ، 1 ، 2 ، 3. نسمي β العدد المحصّل عليه في الرمية الأولى ، و δ العدد المحصّل عليه في الرمية الثانية.
    - أ. أحسب الاحتمال حتى يكون مرجح الجملة (1) نقطة ترتيبها 1.
    - ب. أحسب الاحتمال حتى يكون مرجح الجملة (1) نقطة فاصلتها 0.
    - ج. أحسب الاحتمال حتى يكون مرجح الجملة (1) ينتمي إلى المنصّف الأول.

* * *

الموضوع الثامن

التمرين الأول :

إليك جدول تغيرات الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على المجال $[-3;5]$.

x	-3		-1		1		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	2	↘	-1	↗	3

I- فيما يلي أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1. المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β على المجال $[-3;5]$.
2. $f(1) < f(2)$.
3. من أجل كل x من المجال $[-3;5]$: $f(x) > 0$.

II- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[-3;5]$ كما يلي: $g(x) = |f(x)|$.

1. حدد إشارة الدالة f على المجال $[-3;5]$.
2. انطلاقا من جدول تغيرات الدالة f، أعط جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-3;5]$.

III- لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$ و (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. المماس للمنحنى (C_h) عند النقطة ذات الفاصلة 4 يمر بالنقطة $A(-3;5)$.
2. توجد نقطة وحيدة من المنحنى (C_h) يكون معامل توجيه المماس عندها يساوي 1.

التمرين الثاني:

نعتبر كثير الحدود $P(x) = x^3 + (\sqrt{2} - 1)x^2 + (2 - \sqrt{2})x + 2\sqrt{2}$.

1. أحسب $P(-\sqrt{2})$.
2. عيّن العددين الحقيقين α و β حيث من أجل كل عدد حقيقي x :
   $P(x) = (x + \sqrt{2})(x^2 + \alpha x + \beta)$.
3. عيّن حسب قيم x إشارة $P(x)$.
4. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $xP(x) < 0$.

التمرين الثالث:

ABC مثلث حيث $BC = 6cm, AC = 10cm, AB = 8cm$.

1. أنشئ المثلث ABC والنقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C,1)\}$.
2. عيّن ثمّ أنشئ (E_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث:
$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AC$.
3. عيّن ثمّ أنشئ (E_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث:
$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\|$.
4. عيّن ثمّ أنشئ (E_3) مجموعة النقط M من المستوي حيث:
$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\|$.
5. عيّن ثمّ أنشئ (E_4) مجموعة النقط M من المستوي حيث يكون الشعاعان
$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$ و $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطيا.

* * *

التمرين الرابع:

يحتوي كيس على 3 كرات لا نفرق بينها عند اللمس مرقمة بـ:0 ، 1 و 2. نسحب عشوائيا من الكيس كرتين على التوالي بإرجاع ونسمي x رقم الكرة الأولى و y رقم الكرة الثانية. نرفق بكل عملية سحب النقطة $M(x;y)$ من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. عيّن كل الإحداثيات الممكنة للنقطة M.
2. احسب احتمال الحوادث التالية:
   - A. "النقطة M تنتمي إلى محور الفواصل".
   - B. "النقطة M تنتمي إلى المستقيم ذي المعادلة: $2x + y = 0$".
   - C. "النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1".
3. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد $x^2 + y^2$.
   - أ. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X.
   - ب. احسب الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي X.

* * *

الموضوع التاسع

التمرين الأول :

جدول التغيرات الموالي هو لدالة u معرفة على المجال $[-2;3]$.

x	-2		-1		0		1		2		3
$u'(x)$		$+$	0		$-$		0		$+$		
$u(x)$	2	↗	3	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	2

1. عيّن إشارة الدالة u.
2. نعتبر الدوال k, h, g, f المعرفة كما يلي: $f = u^2$, $g = u^3$, $h = \frac{1}{u}$, $k = \sqrt{u}$
   - أ. عيّن مجموعة تعريف لكل دالة من الدوال k, h, g, f.
   - ب. عبّر عن كل من $k'(x), h'(x), g'(x), f'(x)$ بدلالة $u(x)$ و $u'(x)$.
   - ج. استنتج جدول تغيرات لكل دالة من الدوال k, h, g, f.

* * *

التمرين الثاني :

1. نعتبر كثير الحدود $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 42x - 40$.
   - أ. احسب $P(-2)$ ثمّ استنتج تحليلا لـ $P(x)$.
   - ب. ادرس إشارة $P(x)$.
2. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\sqrt{x-1} - 2x - 1 < 0$.
3. لتكن المعادلة (E) ذات المتغيّر x و m وسيط حقيقي حيث: $x^2 + mx + m = 0$
   عيّن قيم m التي من أجلها لا تقبل المعادلة (E) حلا في $\mathbb{R}$.

* * *

التمرين الثالث :

$ABCD$ مستطيل ، I منتصف $[AB]$ ، G مركز ثقل المثلث ABC.

1. أنشئ المرجح F للجملة $\{(C,1);(D,3)\}$.
2. بيّن أنّ M منتصف $[GD]$ هي مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,3)\}$.
3. بيّن أنّ النقطة M تنتمي إلى المستقيم (IF).
4. عيّن مجموعة النقط N من المستوي التي تحقق : $\|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\| = 6$.

* * *

التمرين الرابع:

يحتوي كيس على كريتين بيضاوين وكريتين خضراوين وكرية واحدة سوداء لا نفرق بينها باللمس. يسحب اللاعب من الكيس كريتين على التوالي وبدون إرجاع.

1. أنشئ مخططا يبين كل الحالات.
2. احسب احتمال الحوادث التالية:
   - A. "الحصول على كريتين من نفس اللون".
   - B. " الحصول على كريتين مختلفتين في اللون".
   - C. "الكرية المسحوبة الأولى خضراء".
3. يربح اللاعب $2x$ عند سحب كرية سوداء و x عند سحب كرية بيضاء و -1 عند سحب كرية خضراء حيث x عدد طبيعي غير معدوم، وليكن Y المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء الربح المحصل عليه.
   - أ. عيّن جميع القيم الممكنة للربح G بدلالة x.
   - ب. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي Y.
   - ج. عيّن قيم x حتى تكون اللعبة مربحة.

* * *

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

1. f دالة معرفة على المجال $I = [-3; 3]$ بجدول تغيراتها التالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	-5	0	2	0	-3	0	2

أ. اكمل جدول التغيرات.

ب. حل في المجال I المعادلة $f(x) = 0$، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.

ج. استنتج إشارة $f(x)$ على المجال I.

د. أثبت أنّ منحنى الدالة f يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل يُطلب كتابة معادلتيهما.

2. لتكن g الدالة المعرفة على المجال I بـ: $g(x) = [f(x)]^2$.

أ. اكتب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

ب. شكل جدول تغيرات الدالة g.

ج. عيّن القيم الحدّية المحلية للدالة g على I، ثمّ جد حصرا للدالة g على I.

التمرين الثاني :

ليكن كثير الحدود $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$.

1. احسب $P(0)$. ماذا تستنتج؟
2. برهن أنّ المعادلة $P(x) = 0$ تكافئ المعادلة:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0 \ldots ①$$

3. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $u^2 + 2u = 3 \ldots ②$.
4. استنتج حلول المعادلة ①.
5. استنتج حلول المتراجحة : $P(x) \leq 0$.
6. دون حساب عيّن إشارة $P(2020) \times P(1441) \times P(-\pi)$.

التمرين الثالث :

$ABDC$ متوازي الأضلاع. G_m مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2m);(B,1-m);(C,2-m)\}$.

1. أنشئ النقطة G_1.
2. عبّر عن $\overrightarrow{AG_m}$ بدلالة m ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.
3. استنتج أنّ : $\overrightarrow{G_1G_m} = \frac{1-m}{3}\overrightarrow{AD}$.
4. عيّن مجموعة النقط G_m لمّا يمسح m مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

* * *

التمرين الرابع:

يرمي رياضي بسهم ليصيب هدفا عبارة عن قرص مركزه O ونصف قطره $30\ cm$.

نشكل على هذا القرص ثلاث دوائر مركزها O وأنصاف قطرها $10\ cm$ ، $20\ cm$ و $30\ cm$ على الترتيب.

تحدد ثلاث مناطق ملونة على الترتيب من المركز بالأحمر، الأبيض والأخضر. نفرض أنّ السهم يصيب الهدف عند كل رمية وأنّ احتمال إصابة كل منطقة يتناسب طرديا مع مساحتها.

يسجل اللاعب 30 نقطة عند إصابة المنطقة الحمراء و20 نقطة عند إصابة المنطقة البيضاء و10 نقاط عند إصابة المنطقة الخضراء.

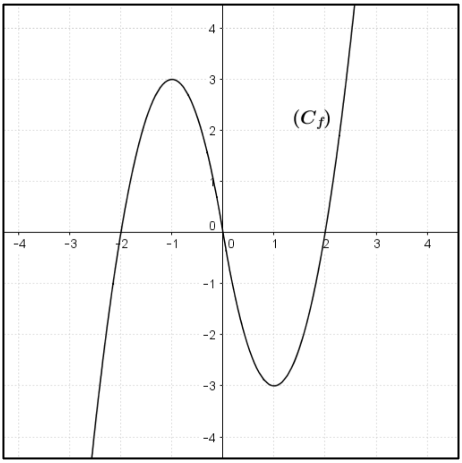
نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل رمية عدد النقاط المسجلة.

1. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X.
2. احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ والتباين $V(X)$.

* * *

الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول :



في الشكل المقابل التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$.

1. شكل جدول تغيرات الدالة f.
2. عيّن إشارة الدالة f.
3. انطلاقا من المنحنى (C_f)، اشرح كيف يمكن إنشاء التمثيلات البيانية للدوال التالية ثمّ ارسمها:
   - أ. $g(x) = f(x+1)$.
   - ب. $h(x) = f(x) - 1$.
   - ج. $k(x) = f(|x|)$.
   - د. $l(x) = |f(x)|$.

* * *

التمرين الثاني :

لتكن المعادلة (E_m) ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$(m+1)x^2 - (2m+3)x + m - 1 = 0 \dots (E_m)$$

1. عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون 0 حلا للمعادلة (E_m).
2. عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تكون (E_m) معادلة من الدرجة الثانية.
3. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E_m).
4. استنتج دون حساب إشارة حلول المعادلة $2020x^2 - 4041x + 2018 = 0$.
5. عيّن قيم الوسيط الحقيقي m (إن وُجد) حتى يكون $x_1 = -x_2 + 1$ حيث x_1 و x_2 حلي المعادلة (E_m).

* * *

التمرين الثالث :

ABC مثلث كيفي. G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,-2);(C,1)\}$. I منتصف $[AC]$، J منتصف $[BC]$.

1. عيّن وأنشئ النقطة K مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(C,1)\}$ ، ثمّ أنشئ النقطة G.
2. بيّن أنّ G مرجح الجملة المثقلة $\{(I,3);(J,-2)\}$. استنتج أنّ G هي نقطة تقاطع المستقيمين (IJ) و (BK). ما طبيعة الرباعي $ABIG$ ؟

3. M نقطة كيفية من المستوي.
   - أ. بيّن أنّ الشعاع $\vec{V} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ هو شعاع ثابت ، ثمّ بيّن أنّ $\vec{V} = 2\,\overrightarrow{BI}$.
   - ب. عيّن و أنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث :
     $$\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$
   - ج. عيّن (Δ) مجموعة النقط M من المستوي حيث :
     $$\left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

* * *

التمرين الرابع:

(A) و (B) صندوقان حيث يحوي الصندوق (A) 5 كرات خضراء و5 كرات حمراء بينما يحوي الصندوق (B) 7 كرات خضراء و3 كرات حمراء. نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق (A) نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق (B)، ثمّ نسحب من الصندوق (B) كرة واحدة ونسجل لونها.

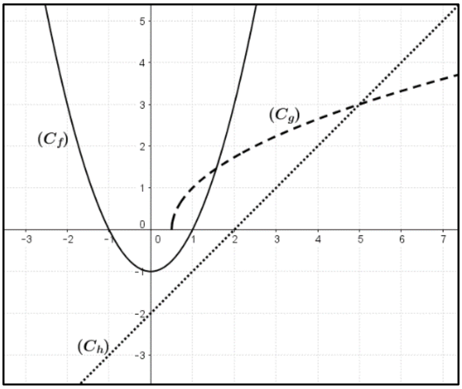
1. أنشئ شجرة احتمال تنمذج هذه التجربة، ثمّ تحقق أنّ احتمال الحصول على كرتين خضراوين هو $\frac{7}{20}$.
2. احسب احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون.
3. نعتبر X المتغيّر العشوائي الذي يرفق كل كرة خضراء بالعلامة $(+\alpha)$ وكل كرة حمراء بالعلامة $(-\alpha)$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم.
   - أ. عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X، ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.
   - ب. عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى يكون $E(X) = 1$.
4. نضيف إلى الصندوق (B) $n - 3$ كرة حمراء ونعيد عملية السحب المبينة أعلاه.
   - أ. احسب احتمال الحصول على كرتين خضراوين.
   - ب. عيّن عدد الكرات الحمراء التي ينبغي إضافتها إلى الصندوق (B) حتى يكون احتمال سحب كرتين خضراوين هو 0,25.

* * *

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول :

لتكن الدوال f ، g و h التي تمثيلاتها البيانية (C_f) ، (C_g) و (C_h) على الترتيب الممثلة أدناه.



1. بقراءة بيانية:
   - أ. جد كلا مما يلي: $foh(0)$ ، $goh(7)$ ، $gog(1)$ ، $hof(2)$.
   - ب. حل المتراجحات التالية: $f(x) \leq 3$ ، $g(x) > h(x)$ ، $h(x) \leq f(x)$
   - ج. عيّن المجال التي تكون فيه الدالة f متناقصة تماما.
2. لتكن الدوال u ، v و w المعرفة كما يلي:

$$w(x) = x - 2\ ;\ v(x) = \sqrt{2x-1}\ ;\ u(x) = x^2 - 1$$

   - أ. عيّن كلا من D_{vow} و D_{vou}، ثمّ عيّن عبارتي vou و vow.
   - ب. عيّن مجموعة تعريف الدالة T المعرفة بـ: $T(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$.

* * *

التمرين الثاني :

1. احسب $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ و $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$.
2. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلتين:

$4x^2 - 2\left(1+\sqrt{3}\right)x + \sqrt{3} = 0$ و $x^2 - \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x = -\sqrt{6}$.

3. استنتج حلول المعادلتين التاليتين:

$\frac{100}{x^2} - \frac{10\left(1+\sqrt{3}\right)}{x} + \sqrt{3} = 0$ و $x - \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{x} + \sqrt{6} = 0$.

4. استنتج حلول الجملة التالية: $\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \alpha\beta = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ حيث $\alpha < \beta$.

* * *

التمرين الثالث :

1. عيّن الأعداد الحقيقية α ، β و γ إذا علمت أنّ النقطة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ وتحقق العلاقة $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$.
2. ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين حيث $AB=4cm$.
   - أ. أنشئ النقطة G' مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,-2)\}$.
   - ب. بيّن أنّه مهما تكن النقطة M من المستوي فإنّ: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MG'}$.
   - ج. عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|=4$.
   - د. عيّن (F) مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\|6\overrightarrow{MA}-6\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|.$$

التمرين الرابع:

I) C_1 و C_2 حجرا نرد متوازنان. تحمل أوجه المكعب C_1 الأعداد: 0 ، 0 ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ وتحمل أوجه المكعب C_2 الأعداد: 0 ، 0 ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$. نرمي الحجرين في آن واحد ونسجل العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لـ C_1 و C_2. نرمز لهذين العددين بـ: α و β.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد $\sin(\alpha+\beta)$

1. ما هي القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي X؟ (يمكن إعطاء النتائج في جدول)
2. عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X
3. احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغيّر العشوائي X

* * *

قواعد الحياة

إياك أن تكون "مفعولا به" .. كن دائما "فاعلا"

مهما أحسست "بالكسرة" اترك بقلبك "فتحة" تدخل منها الأحلام

لا تكره أحدا لمجرد أنّه مختلف معك .. اترك مشاعرك "ضمّة" لكل الناس

لا ترض أن تكون "مجرورا" من أحد مهما كان قريبا منك .. فستلقى نفسك دائما "مرفوع" الرأس

صحيح يمكنك أن تحنّ إلى الذكريات .. لكن لا تستسلم لـ"كان وأخواتها"

لا تنخدع لكل من ابتسم لك .. وانتبه من "أدوات النصب"

اشتغل واحلم وتحدّ ولا تسمح أن يكون مستقبلك "مبنيا للمجهول"

لا تخبئ مشاعرك اتجاه أحد .. فالمشاعر التي تأتي متأخرة تصبح "ممنوعة من الصرف"

عش دائما "مبتدأ" .. ولا تكن مجرد "خبر"

اعتبارات

الفصل

الثاني

الموضوع الأول

التمرين الأول :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = 6x^2 + 3x - 5$

1. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة x_0 الكيفية من $\mathbb{R}$.
2. استنتج عبارة $f'(x)$.
3. استعمل التقريب التآلفي المماسي عند 1 لحساب قيمة مقرّبة للعدد $f(1{,}001)$.

* * *

التمرين الثاني :

1. أحسب $\sin x$ و $\cos x$ علما أنّ : $3\sin x + 4\cos x = 5$.
2. بسّط العبارتين الآتيتين : $A = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos x$ ؛ $B = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{7\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin x$
3. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x : $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = -1$.
4. حلّ في المجال $[0 ; 2\pi[$ المتراجحة $2\sin 3x + \sqrt{3} \geq 0$ ، ثمّ مثّل صور الحلول على الدائرة المثلثية.

* * *

التمرين الثالث :

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقطتين $A(2;2)$ ، $B(3;0)$ ، والمستقيم $(T): y = x - 2$

1. اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) محور القطعة $[OA]$.
2. اكتب معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي قطرها $[OA]$.
3. بيّن أنّ المستقيم (T) مماس للدائرة (C) في نقطة E يُطلب تعيينها.
4. بيّن أنّ النقطة B تقع خارج الدائرة (C).
5. بيّن أنّ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 6$ ثمّ استنتج قيسا للزاوية $\widehat{AOB}$.
6. احسب مساحة المثلث AOB.
7. عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MO^2 + MA^2 = 8$.

* * *

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = ax^3 + bx + c$، حيث c, b, a أعداد حقيقية و (C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

عيّن الأعداد الحقيقية c, b, a بحيث يشمل المنحنى (C_f) النقطة $A(1; -3)$ ويقبل عند النقطة $B(0; 1)$ مماسا موازيا للمستقيم (D) ذي المعادلة: $y = -6x$.

* * *

التمرين الثاني :

نعتبر مربعا موجها $ABCD$ حيث : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

نرسم خارج هذا المربع مثلثا متقايس الأضلاع ADE والنقطة F تقاطع المستقيمين (AE) و (BC).

1. أنشئ الشكل ، ثمّ احسب بالراديان أقياس الزوايا الموجهة التالية : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC})$ ، $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB})$ ، $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{DC})$
2. جد العدد الحقيقي x حيث : $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}) = x$ ، ثمّ احسب :
   $\cos x$ ، $\sin x$ ، $\cos(\pi + x)$ ، $\cos\left(x - \frac{39\pi}{2}\right)$
3. لتكن العبارتين التاليتين :

$$A(x) = \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{45\pi}{2} - x\right) - 3\sin(x - 7\pi) + \sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right)$$

$$B(x) = \cos\left(\frac{17\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{2012\pi}{2} + x\right) - \sin(11\pi + x) - \cos\left(x + \frac{1433\pi}{2}\right)$$

أ. بيّن أنّ : $A(x) = B(x)$

ب. حل في المجال المعادلة : $A\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = B\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

* * *

التمرين الثالث :

I- لتكن (S) دائرة مركزها Ω ونصف قطرها 3، A و B نقطتان منها غير متقابلتين قطريا حيث $AB = 2\sqrt{2}$. النقطة C نظيرة B بالنسبة إلى Ω.

1. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.
2. أثبت أنّ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B\Omega} = 14$ ثمّ استنتج أنّ $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega C} = -5$.

II- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق: $x^2+y^2-2x-4y-5=0$.

1. بيّن أنّ (E) دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
2. (D) مستقيم شعاع ناظمه $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $A(4;3)$.
   - أ. عيّن معادلة المستقيم (D).

بيّن أنّ المستقيم (D) يقطع الدائرة (E) في نقطتين يُطلب تعيينهما.

* * *

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 9$، و$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. عيّن f' مشتقة الدالة f.
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها.
3. هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) موازية للمستقيم ذي المعادلة: $y = 6x - 3$؟ عيّن معادلات لها في حالة الوجود.

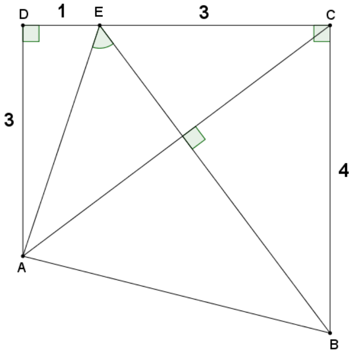
التمرين الثاني :

1. مثّل النقطة A المعرّفة بالإحداثيات القطبية $A\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$.
2. عيّن الإحداثيات القطبية للنقطة $B(-\sqrt{2}; 1)$.
3. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$.
4. حل في المجال $]0 ; 2\pi]$ المتراجحة : $\sin x - \sqrt{3}\cos x > \sqrt{2}$ ، ثمّ مثّل صور حلولها على الدائرة المثلثية.

التمرين الثالث :

$ABCD$ شبه منحرف قائم في C و D. E نقطة من $[DC]$ حيث:

$AD = 3, DE = 1, BC = 4$



1. أ. بيّن أنّ: $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB})$.

   ب. استنتج قيمة $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$.

جـ. احسب EA و EB ، ثمّ استنتج $\cos(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EB})$.

2. لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على $[BC]$.

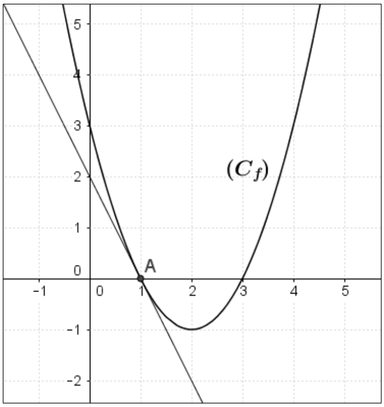
أ. بيّن أنّ $AB=\sqrt{17}$

ب. احسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}$ ، ثمّ استنتج أنّ (CA) عمودي على (BE).

* * *

الموضوع الرابع

التمرين الأول :



لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث c, b, a أعداد حقيقية و(C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. بقراءة بيانية احسب كلا من: $f(1)$ ، $f'(1)$ و $f'(2)$.
2. باستعمال النتائج السابقة عيّن الأعداد الحقيقية c, b, a.

التمرين الثاني :

نعتبر المعادلة : $\sin 3x = -\sin 2x$ ... ①

1. حل في $\mathbb{R}$ ، ثمّ في المجال $]-\pi;\pi]$ المعادلة ① ومثل صور الحلول على الدائرة المثلثية
2. تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$
3. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $\sin 3x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$
4. استنتج أنّ حلول المعادلة ① هي أيضا حلول المعادلة:
   $\sin x\,(4\cos^2 x - 1 + 2\cos x) = 0$
5. من بين حلول المعادلة ① ، عيّن تلك التي تحقق المعادلة:
   $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$
6. نضع : $X = \cos x$.
   - أ. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $4X^2 + 2X - 1 = 0$
   - ب. استنتج قيمة العددين : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ و $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

التمرين الثالث :

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقطتين $A(-2;2)$ ، $B(2;2)$.

1. احسب إحداثيي النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

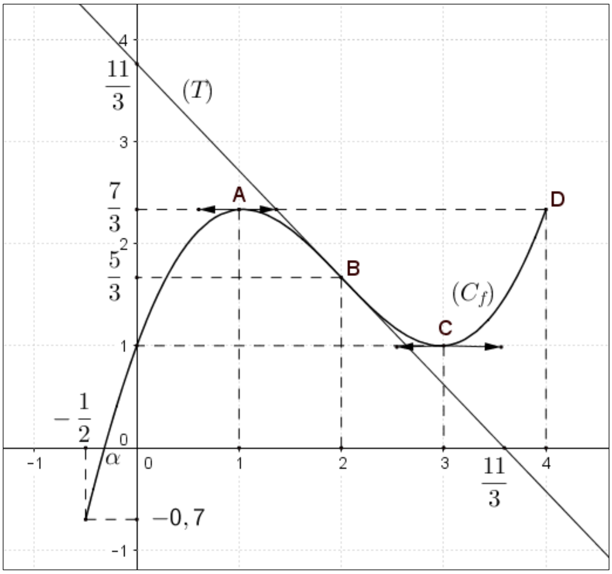
2. بيّن أنّ من أجل كل نقطة M من المستوي: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.
3. بيّن أنّ مجموعة النقط M من المستوي حيث: $MA^2 + MB^2 = 40$ هي دائرة (C) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
4. عيّن نقاط تقاطع هذه الدائرة مع محور الفواصل.
5. ليكن λ عدد حقيقي سالب. ما هي قيمة λ التي تكون من أجلها النقطة $Z(\sqrt{7};\lambda)$ تنتمي إلى الدائرة (C).
6. اكتب معادلة المماس (D) للدائرة (C) في النقطة Z.

* * *

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

f دالة معرفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};4\right]$ ، (C_f) منحناها البياني و (T) مماس له عند النقطة B.



بقراءة بيانية:

1. شكل جدول تغيرات الدالة f.
2. علما أنّ $f(\alpha)=0$، عيّن إشارة الدالة f على المجال $\left]-\frac{1}{2};4\right]$.
3. عيّن كلا من: $f(2)$ ، $f'(2)$ و $f''(2)$.
4. اكتب معادلة المماس (T) والمماسين عند النقطتين A و C.
5. لتكن الدالة g المعرفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};4\right]$ بـ: $g(x)=|f(x)|$.
   اشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f)، ثمّ ارسم (C_g).

* * *

التمرين الثاني :

1. علّم على الدائرة المثلثية النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 ، M_5 صور الأعداد : $\frac{5\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ ، $\frac{1437\pi}{6}$ ، $\frac{2016\pi}{3}$ على الترتيب ، ثمّ عيّن إحداثيات هذه النقط.
2. بسط العبارتين التاليتين :

$$A(x)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)+\sin(x+3\pi)-\cos(x-7\pi)$$

$$B(x)=\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi+x)$$

3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين :

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \text{ ، } \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x$$

* * *

التمرين الثالث :

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقطتين $A(1;\sqrt{3})$ ، $C(-\sqrt{3};1)$.

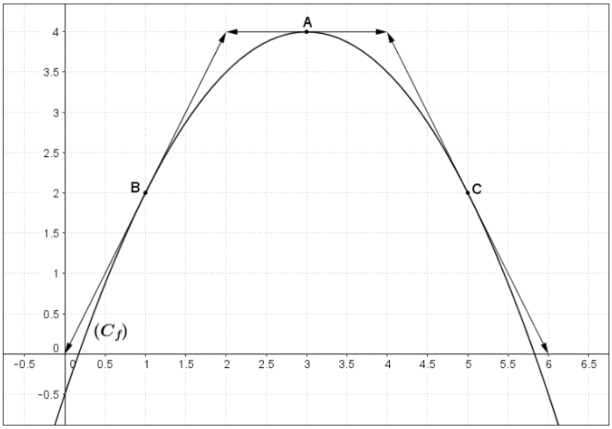
1. علّم النقطتين A و C.
2. لتكن النقطة B المعرّفة كما يلي: $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$.
   - أ. احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$ ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $OABC$.
   - ب. احسب الإحداثيات الديكارتية والقطبية للنقطة B.
3. ليكن α عدد حقيقي موجب تماما.
   - أ. اكتب بدلالة α معادلة الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها ونصف قطرها α.
   - ب. عيّن العدد الحقيقي α حتى يكون المستقيم (AC) مماسا للدائرة $(\mathcal{C})$.
4. ارسم الدائرة $(\mathcal{C})$ والمماس (AC).
5. احسب مساحة المثلث OAD حيث D منتصف القطعة $[BC]$.

* * *

الموضوع السادس

التمرين الأول :

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ كما هو مبيّن في الشكل.



1. اكمل الجدول التالي:

x	1	3	5
$f'(x)$			
$f(x)$			

2. استنتج معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة C.
3. ادرس إشارة $f'(x)$ ثمّ استنتج جدول تغيّرات الدالة f.
4. استنتج مجموعة حلول المتراجحة: $f'(x) \leq 0$.
5. حل بيانيا المعادلة: $f'(x) = 2$.

* * *

التمرين الثاني :

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{1}{2}$.
2. نعتبر العبارة: $A(x) = \cos^2 x + 5 \sin x . \cos x - 3 \sin^2 x$.
   - أ. احسب $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
   - ب. بيّن أنّ: $\frac{1}{2}(5\cos 2x - 1) = 2\cos^2 x - 3\sin^2 x$.

ج. استنتج أنّ: $A(x) = \frac{1}{2}(5\cos 2x + 5\sin 2x - 1)$.

3. أ. بيّن أنّ: $A(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[5\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

ب. استنتج حلا للمعادلة: $2A(x) + 1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ في المجال $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

* * *

التمرين الثالث :

1. ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين.

بيّن أنّ: $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقط: $A(3; 2)$ ، $B(0; 5)$ ، $C(-2; -1)$.

أ. احسب طويلة كل من الأشعة: $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.

ب. احسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ ، $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}).\overrightarrow{AC}$.

ج. استنتج $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$.

د. اعط قيسا للزاويتين: $\widehat{ACB}$ و $\widehat{BAC}$ بالتدوير إلى الدرجة.

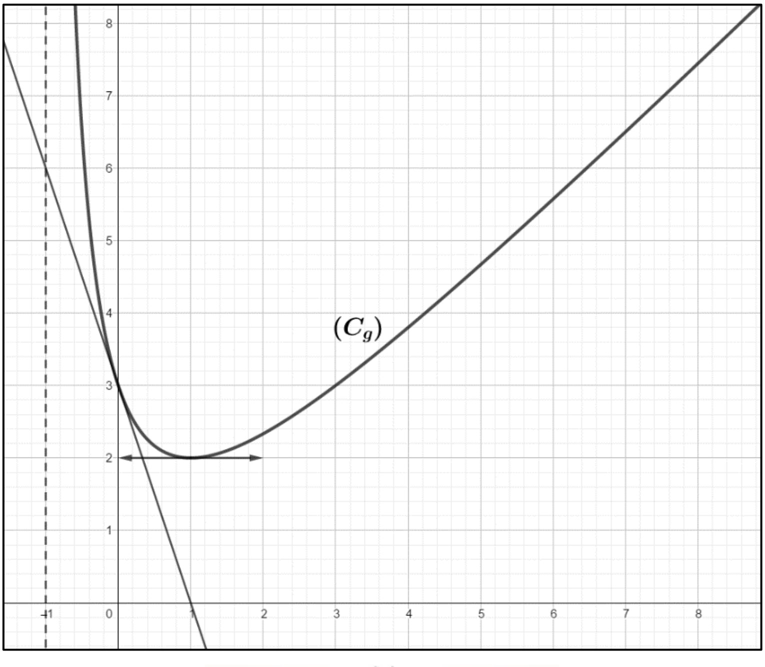
* * *

الموضوع السابع

التمرين الأول :

الرسم المقابل يمثل منحنى الدالة g المعرّفة والقابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، (T) المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$ عند النقطة $A(0;3)$.

1. باستعمال المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ عيّن معامل توجيه المماس (T)
2. نضع: $g(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$
   - أ. عيّن الأعداد الحقيقية a، b، c مستعينا بمعطيات المنحنى
   - ب. عيّن معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$
   - ج. اكتب معادلة المماس (T)
3. ناقش بيانيا وحسب قيم المتغير الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x)=-2m$



* * *

التمرين الثاني :

1. ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث: $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$. النقاط K,J,I هي منتصفات الأضلاع $[AB],[AC],[BC]$ على الترتيب.

عيّن القيس الرئيسي لكل من الزوايا الموجهة: $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA}),(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{JK}),(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{CA})$

2. DEF مثلث متساوي الساقين حيث: $(\overrightarrow{FD};\overrightarrow{FE}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. H نقطة من $[DF]$
حيث: $(\overrightarrow{EH};\overrightarrow{ED}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.
بتوظيف علاقة شال، عيّن القيس الرئيسي لكل من الزاويتين الموجهتين:
$(\overrightarrow{EH};\overrightarrow{FD})$, $(\overrightarrow{HE};\overrightarrow{EF})$.

* * *

التمرين الثالث :

ABC مثلث حيث $AB = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ، $AC = 5$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}) = -\frac{5\pi}{6}$.

1. بيّن أنّ: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{75}{4}$.
2. باستعمال مبرهنة الكاشي احسب الطول BC.
3. حدّد طبيعة المثلث ABC، ثمّ احسب مساحته.

* * *

الموضوع الثامن

التمرين الأول :

f دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↗	$f(-3)$	↘	‖	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	

1. إذا علمت أنّ $f(-3)<0$، أوجد إشارة $f(x)$
2. نقبل أن الدالة f معرّفة بالعبارة $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$ وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني
   - أ. احسب $f'(x)$ بدلالة d,c,b,a
   - ب. بالاستعانة بجدول التغيرات أثبت أن: $a=1$, $b=-4$, $c=4$, $d=1$
   - ج. أوجد المماسات للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ التي معامل توجيهها يساوي 3-

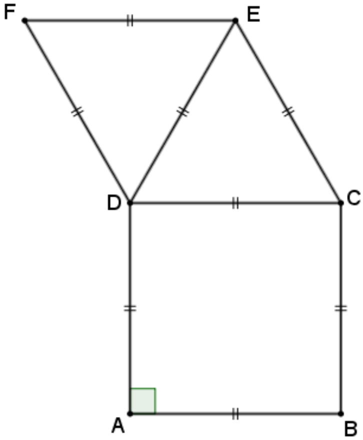
* * *

التمرين الثاني :

الأسئلة التالية مستقلة فيما بينها:

1. عيّن القيس الرئيسي لزاوية موجهة قيسها $-\frac{127\pi}{4}$.
2. علم على الدائرة المثلثية صور الأعداد: $\frac{2\pi}{3},\frac{2019\pi}{4},-\frac{5\pi}{3}$.
3. علما أنّ $\sin x=\frac{3}{8}$ و $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$، عيّن: $\cos x\,,\cos(\pi-x)\,,\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.
4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos x$.
5. حل في المجال $]-\pi;2\pi]$ المتراجحة: $\sin 2x>\frac{\sqrt{3}}{2}$.
6. أثبت أنّ:
$$\sin\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}-\sin\frac{7\pi}{8}=0\;\ldots ①$$
$$\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}=2\;\ldots ②$$
7. عيّن قيسا لكل زاوية من الزوايا الموجهة التالية:

$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DE}\right)\;;\;\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AB}\right)\;;\;\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DC}\right)\;;\;\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DF}\right)\;;\;\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)\;;\;\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{FD}\right)$$



* * *

التمرين الثالث :

ABC مثلث قائم في A حيث $AB = AC = 4$ ولتكن I منتصف $[AB]$ ، J منتصف $[AC]$ و K منتصف $[CI]$.

1. تحقق أنّ: $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}^2$ ، ثمّ استنتج قيس الزاوية $\widehat{ACI}$.
2. احسب $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{JA}$ و $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AB}$.
3. بيّن أنّ المستقيمين (JB) و (AK) متعامدان.
4. لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC). احسب AH.

* * *

الموضوع التاسع

التمرين الأول :

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 - 2x + 3$ و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. اثبت أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$ واستنتج $f'(2)$.
2. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2.
3. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجالين $]-\infty;1]$ و $[1;+\infty[$، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
4. اثبت أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_f).
5. ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

* * *

التمرين الثاني :

نعتبر العبارة: $P(x) = 2\sin^2 x - 10\sin x\,.\cos x + 12\cos^2 x$.

1. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x: $2\sin^2 x + 12\cos^2 x = 7 + 5\cos 2x$
2. استنتج أنّ: $P(x) = 7 + 5\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.
3. حل في المجال $]-\pi;\pi]$ المعادلة: $P(x) = 7$ ومثل صور الحلول على الدائرة.
4. حل في المجال $\left]-\frac{5\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right]$ المعادلة: $P(x) < 7$.

* * *

التمرين الثالث :

ABC مثلث حيث $AB = 4$ ، $AC = 6$ ، $\widehat{BAC} = 60°$.

1. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثمّ استنتج BC.
2. احسب مساحة المثلث ABC.
3. احسب $\sin\widehat{ABC}$ واستنتج قيمة مقرّبة إلى 0,1 بالدرجات للزاوية $\widehat{ABC}$. (استعمل قانون الجيوب)
4. H نقطة من $[AB]$ حيث $AH = 3$. بيّن أنّ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ثمّ استنتج أن المستقيمين (AB) و (CH) متعامدان.

5. لتكن I منتصف القطعة $[AB]$. عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2 + MB^2 = 16$.

* * *

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

f دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ حيث: $f(x) = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$ و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب النهايات للدالة f ثمّ فسّر النتائج هندسيا
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ ضع جدول تغيراتها
3. عيّن تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع حاملي المحورين
4. اكتب معادلة المماس لـ $(\mathscr{C}_f)$ و الذي يشمل النقطة $A(-1,3)$
5. ارسم بكل عناية $(\mathscr{C}_f)$
6. ادرس بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة الآتية:
   .$mx^2 + (2m-3)x + m - 2 = 0$

التمرين الثاني :

1. عيّن قيسا للزاوية الموجهة $(2\vec{u};-3\vec{v})$ إذا علمت أنّ: $(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{4}$.
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
3. حل في المجال $]0;\pi[$ المتراجحة: $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. عيّن القيس الرئيسي للزاوية التي أحد أقياسها α حيث: $\alpha = \frac{2019\pi}{6}$ ، ثمّ احسب $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$.
5. بسّط العبارة: $A = \sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$.
   (لاحظ أنّ: $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$ و $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$)

التمرين الثالث :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، نعتبر النقط $A(1;0)$ ، $B(-3;4)$ و $C(3;2)$ والمستقيم (Δ) ذا المعادلة: $x + y + 1 = 0$ ، ولتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق: $x^2 + y^2 - 6y - 1 = 0$.

1. احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. ما طبيعة المثلث ABC؟

2. تحقق أنّ (Γ) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.
3. اكتب معادلة ديكارتية للدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{2}$.
4. احسب المسافة بين B و(Δ). ما هي وضعية (Δ) بالنسبة للدائرة $(\mathcal{C})$.
5. بيّن أنّ المستقيم (Δ) يقطع الدائرة (Γ) في نقطتين متمايزتين يُطلب تعيينهما.
6. بيّن أنّ الدائرة $(\mathcal{C})$ هي صورة الدائرة (Γ) بتحاك h يُطلب تعيين مركزه ونسبته.

* * *

الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول :

نعرّف على $\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ الدالة f كما يلي : $f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x-1}{2x-3}$ ، و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها البياني.

I- عيّن α و β حتى يكون المستقيم (T) ذو المعادلة $y=-3x+3$ مماسا لـ $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

II- نضع : α = 2 وβ = -1

1. عيّن a ، b ، c حيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ فإنّ : $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-3}$.
2. ادرس تغيرات الدالة f.
3. أثبت أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x+1$.
4. ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة لـ (Δ).
5. أثبت أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل كمركز تناظر له نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين.
6. أثبت وجود مماسين لـ $(\mathscr{C}_f)$ معامل توجيه كل منهما هو (3-) ، ثمّ اكتب معادلة كل منهما.
7. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المماسات.
8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم (Δ_m) ذي المعادلة $y=-3x+m$

III- نعرّف الدالة g حيث : $g(x)=\frac{2x^2-|x|-1}{2|x|-3}$ ، و ليكن $(\mathscr{C}_g)$ منحناها البياني.

1. أثبت أنّ g دالة زوجية.
2. بيّن كيف يمكن إنشاء $(\mathscr{C}_g)$ انطلاقا من $(\mathscr{C}_f)$.
3. أنشئ في نفس المعلم السابق $(\mathscr{C}_g)$.

التمرين الثاني :

I- (C) الدائرة المثلثية التي مركزها O المرفقة بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I النقطة ذات الإحداثيات $(1;0)$ وA نقطة من (C) حيث: $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{6}$ وB منتصف القطعة $[AI]$.

1. عيّن الإحداثيات الديكارتية للنقطتين A و B.
2. بيّن أنّ: $OB=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
3. عيّن القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)$، ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ (يمكنك استعمال المثلث OBI).

II- نفرض الآن أنّ: $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

1. احسب القيمتين المضبوطتين لـ $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$ (لاحظ أنّ: $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$).
2. حل في المجال $]0; 2\pi[$ المعادلة ذات المجهول x: $\sqrt{3} - 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

* * *

التمرين الثالث :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$، ولتكن (C_m) مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي التي تحقق: $x^2 + y^2 - 2mx - 1 = 0$

1. بيّن أنّ (C_m) دائرة يُطلب تعيين مركزها w_m ونصف قطرها r_m.
2. بيّن أنّ جميع الدوائر (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين يُطلب تعيينهما.
3. عيّن مجموعة النقط w_m لمّا m يمسح $\mathbb{R}$.

* * *

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول :

I- نعرّف الدالة f على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ ، و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها البياني.

1. ادرس تغيرات الدالة f.
2. عيّن المستقيمات المقاربة لـ $(\mathscr{C}_f)$.
3. ليكن (T) مماسا لـ $(\mathscr{C}_f)$ موازيا للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$. عيّن معادلة المماس (T).
4. أنشئ (T) و $(\mathscr{C}_f)$.

II- 1. عيّن العددين الحقيقيين α و β حتى يكون $f(x)=\alpha+\frac{\beta}{(x+1)^2}$

2. نعرّف الدالة g على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $g(x)=\frac{-4}{x^2+2x+1}$ ، و ليكن $(\mathscr{C}_g)$ منحناها البياني.

- عيّن γ حتى يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $g(x)=f(x)+\gamma$
- استنتج جدول تغيرات الدالة g ، ثمّ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$

* * *

التمرين الثاني :

1. برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\cos(2x)-3\cos(x)+2=0$.
3. ليكن a عدد حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ حيث: $\cos(a)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
   - أ. تحقق من أنّ: $\sin(a)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ثمّ احسب $\cos(2a)$.
   - ب. استنتج قيمة a.
   - ج. عيّن القيمة المضبوطة لكل من العددين: $\sin(4a+2019\pi)$ و $\cos(4a+1440\pi)$.

* * *

التمرين الثالث :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ نعتبر النقط $A(2;0)$، $B(3;1)$، $C(-1;3)$، $D(1;2)$ والمستقيم (Δ) ذا المعادلة: $2x+y=0$، ولتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق: $x^2+y^2-2x-4y=0$.

1. احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. ما طبيعة المثلث ABC؟
2. احسب الأطوال DA ، DB ، DC.
3. تحقق أنّ (Γ) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.
4. احسب المسافة بين D و(Δ). ما هي وضعية (Δ) بالنسبة للدائرة (Γ).
5. عيّن معادلة لصورة الدائرة (Γ) بالتحاكي h الذي مركزه B ونسبته -1.
6. A' و C' صورتا A و C بالتحاكي h على الترتيب. استنتج نوع المثلث $A'BC'$ ثمّ بيّن أنّ $\mathcal{S}_{ABC}=\mathcal{S}_{A'BC'}$ ($\mathcal{S}$ ترمز للمساحة).

* * *

اعتبارات
الفصل
الثالث

الموضوع الأول

التمرين الأول :

I- ABC مثلث قائم في A حيث $AB = 2a$ و $AC = a$ ولتكن D نظيرة C بالنسبة إلى A ، والنقطة K المعرّفة بالعلاقة: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. ($a$ عدد حقيقي موجب تماما).

4. احسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AK}$.
5. بيّن أنّ المستقيمين (BD) و (CK) متعامدان.
6. ما هو التحويل الذي يحوّل B إلى K؟ ما هو التحويل الذي يحوّل K إلى B؟ علل.

II- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط: $A(-2;2)$ ، $B(2;2)$ و $C(-2;4)$.

1. بيّن أنّ المثلث ABC قائم في A.
2. اكتب معادلة ديكارتية للدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها A وطول نصف قطرها AB.
3. اكتب معادلة ديكارتية للدائرة $(\mathcal{C}')$ صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{4}$.
4. بيّن أنّ النقطة B تنتمي إلى المستقيم (D) الذي معادلته: $x + y - 4 = 0$، ثمّ استنتج معادلة المستقيم (D') صورة المستقيم (D) بالتحاكي h.

* * *

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ : $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $3u_{n+1} = u_n + 4$

1. أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3.
2. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 2$.
   - أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
   - ب. أكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.
   - ج. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

* * *

التمرين الثالث : 11

نعتبر النقط $A(-2,0,1)$ ، $B(1,0,-3)$ ، $C(2,1,0)$ ، $D(1,2,-2)$

1. هل المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان؟
2. بيّن أنّ النقط A ، B ، C تعيّن مستويا
3. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)
4. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)
5. عيّن المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)
6. اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها D ونصف قطرها $r = \sqrt{2}$

* * *

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقط $A(-1;1)$، $B(-4;3)$ $C(2;5)$.

1. بيّن أنّ معادلة (Δ) محور $[BC]$ هي : $3x+y-1=0$.
2. اكتب معادلة ديكارتية للدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها O و (Δ) مماسا لها.
3. عيّن إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.
4. T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ من المستوي النقطة $M'(x';y')$ حيث: $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.
   - أ. تحقق أنّ: $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$، ثمّ استنتج طبيعة التحويل T مع ذكر عناصره المميزة.
   - ب. اكتب x و y بدلالة x' و y'.
   - ج. عيّن $\overrightarrow{u'}$ شعاع توجيه (Δ') صورة (Δ) بالتحويل T، ثمّ اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ').
5. عيّن طبيعة التحويل $f=ToT$ وحدد عناصره المميزة.

* * *

التمرين الثاني :

لتكن (v_n) متتالية هندسية حدّها الأول v_0 و أساسها q موجب تماما.

1. عيّن الأساس q إذا علمت أنّ : $v_0=3$ و $v_2+v_4=60$.
2. عيّن عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ احسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$.
1. احسب الجداء P_n بدلالة n حيث : $P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$.

* * *

التمرين الثالث :

لتكن النقطتان $A(1,-1,2)$ ، $B(-1,1,-2)$

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)
2. (p) و (p') مستويان من الفضاء حيث : (p) يشمل A وعمودي على المستقيم (AB) و (p') معادلته : $x-y+2z+6=0$

أ.   أوجد المعادلة الديكارتية للمستوي (p)

ب. تحقّق أنّ المستوي (p') يشمل B ويوازي (p)

3.   اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها B ونصف قطرها $r = 4$

* * *

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$. ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة $A(4\,;\,-2)$ ونسبته $k=\frac{5}{3}$.

1. عيّن إحداثيي النقطة B' صورة النقطة $B(1\,;\,1)$ بالتحاكي h.
2. عيّن إحداثيي النقطة C التي صورتها بالتحاكي h هي النقطة $C'(9\,;\,-7)$.
3. ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x+2$. عيّن معادلة المستقيم (Δ') صورة (Δ) بالتحاكي h.
4. $(\mathscr{C})$ مجموعة النقط $M(x\,;y)$ من المستوي حيث: $x^2+y^2+4x-6y+4=0$.
   - أ. بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ دائرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
   - ب. عيّن معادلة $(\mathscr{C}')$ صورة $(\mathscr{C})$ بالتحاكي h.
   - ج. عيّن إحداثيات نقط تقاطع $(\mathscr{C})$ مع (Δ).

* * *

التمرين الثاني :

لتكن المتتالية العددية (u_n) معرّفة في $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=6$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{3}{2}$.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i}\,,\vec{j})$. وحدة الطول $2\,cm$.

1. أنشئ التمثيل البياني للدالة h حيث: $h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ وَالمستقيم ذا المعادلة $y=x$ ثمّ مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على محور الفواصل.
2. ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها.
3. لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة في $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\alpha(u_n-3)$ حيث : $\alpha\in\mathbb{R}^*$.
   أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
4. أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n و α واستنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثمّ احسب نهاية (u_n).
5. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
6. أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$، ثمّ احسب نهاية S_n.

* * *

التمرين الثالث :

نعتبر النقط $A(2,4,1)$ ، $B(0,4,-3)$ ، $C(3,1,-3)$ ، $D(1,0,-2)$ ، $E(3,2,-1)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1. معادلة المستوي (ABC) هي : $2x + 2y - z - 11 = 0$
2. E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)
3. المستقيم (CD) معرّف بتمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t - 1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 1 \end{cases}$
4. المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان

* * *

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

ABI مثلث في المستوي. ليكن h_A التحاكي الذي مركزه A و نسبته 2 و h_B التحاكي الذي مركزه B و نسبته 3. النقطة J صورة I بالتحاكي h_A و النقطة K صورة J بالتحاكي h_B.
نضع $AB = 10\ cm$.

1. أنشئ النقطتين J و K.
2. عبّر عن كل من النقطتين J و K كمرجح للنقط A ، B و I.
3. استنتج أنّ النقطة I هي مرجح النقط A ، B و K.
4. استنتج وجود نقطة وحيدة C من القطعة [AB] حيث $\overrightarrow{CK} = 6\overrightarrow{CI}$. عيّن النقطة C في الشكل.
5. نضع : $h = h_B o h_A$. بيّن أنّ التحويل h هو التحاكي الذي مركزه C و نسبته 6.
6. ما هو المحل الهندسي للنقط K لمّا تتغير I على الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها 1 ؟

* * *

التمرين الثاني :

I- لتكن f دالة معرفة على المجال $]-3;6[$ و(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، حيث $f(x) = \frac{9}{6-x}$

1. احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]-3;6[$
2. أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 3 ، ثم أنشئ المماس (Δ) والمنحنى (C_f) بدقة.
3. بيّن أنه إذا كان $x < 3$ فإن $f(x) < 3$.

II- لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = -3$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. أنشئ على محور الفواصل الحدود $u_0; u_1; u_2; u_3; u_4$.
2. حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) إذا علمت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 3$.

III- لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

1. بيّن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. بيّن أن : $u_n = \frac{6n-3}{2n+1}$.

* * *

التمرين الثالث :

نعتبر النقط $A(-1,2,1)$ ، $B(0,5,2)$ ، $C(3,0,-2)$

1. بيّن أنّ النقط A ، B ، C تعيّن مستويا
2. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3. نعتبر سطح الكرة (S) المعرّفة بالمعادلة الديكارتية :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0$$

أ. عيّن النقطة Ω مركز سطح الكرة (S) ونصف قطرها r

ب. تحقّق من أنّ المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S).

* * *

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

$(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ دائرتان مركزهما O و O' على الترتيب. نصف قطر كل منهما يساوي 2 ويتقاطعان في نقطتين A و B. $[IA]$ قطر للدائرة $(\mathscr{C})$ و $[JA]$ قطر للدائرة $(\mathscr{C}')$. K نقطة تقاطع المستقيمين (OO') و (AB).

الجزء الأول :

1. أنشئ الشكل.
2. بيّن أنّ I و J هما صورتا O و O' على الترتيب بتحاك مركزه A يُطلب تعيين نسبته ثمّ استنتج أن المستقيمين (OO') و (IJ) متوازيان.
3. بيّن أنّ: $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AK}$ مستنتجا أن النقط I ، B ، J في استقامية.
4. أحسب الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OA}$ وَ $(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}).\overrightarrow{IJ}$.

الجزء الثاني :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. نفرض أن $O'(2\ ;\ 0)$.

1. أكتب معادلة لكل من الدائرتين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.
2. بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ يتقاطعان في النقطتين $A(1;\sqrt{3})$ وَ $B(1;-\sqrt{3})$.
3. أكتب معادلة المماس (Δ) للدائرة $(\mathscr{C})$ عند النقطة A.
4. بيّن أنّ المستقيم (OO') محور القطعة $[AB]$.
5. لتكن النقطة المتغيرة M حيث : $M\left(5;\frac{\sqrt{3}}{x^2}\right)$ و x عدد حقيقي غير معدوم.
   - أ. أحسب المسافة $f(x)$ بين النقطة M و المماس (Δ).
   - ب. تحقّق أنّ : $f(x) = \frac{x^2+3}{2x^2}$ من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم.
   - ج. أدرس تغيرات الدالة f و عيّن المستقيمات المقاربة ثمّ ارسم المنحى الممثل للدالة f.

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 وبعلاقة التراجع الآتية :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$

1. عيّن قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.
2. نفرض أن $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le u_n < 1$.
   ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
3. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب. عبر عن v_n بدلالة n ، ثم احسب نهاية المتتالية (v_n).

ج. أكتب u_n بدلالة v_n ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n).

* * *

التمرين الثالث :

لتكن النقط $A(3,0,3)$ ، $B(1,4,-3)$ ، $C(1,0,3)$ ، $D(1,0,-3)$

1. بيّن أنّ المثلث BCD قائم في D ، ثمّ عيّن مساحته
2. بيّن أنّ المستقيم (AC) عمودي على المستوي (BCD)
3. عيّن حجم رباعي الوجوه $ABCD$

* * *

الموضوع السادس

التمرين الأول :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. لتكن $A(2;1)$ ، $B(5;-1)$ و$C(8;3)$ ثلاث نقط من المستوي ولتكن النقطة H منتصف القطعة $[AC]$.

1. علم النقط A ، B ، C و H ثمّ اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و$\vec{v}(3;-2)$ شعاع ناظمي له.
2. لتكن (γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث: $x^2+y^2-10x+2y+13=0$.
   - أ. أثبت أنّ (γ) دائرة مركزها B ونصف قطرها r يُطلب حسابه.
   - ب. ارسم المستقيم (Δ) والدائرة (γ).
   - ج. تحقق حسابيا أنّ $A\in(\gamma)$ ثمّ احسب المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ).
   - د. استنتج الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والدائرة (γ).
3. احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ بطريقتين واستنتج قيمة مقرّبة بالدرجات لقيس الزاوية $\widehat{ABC}$.
4. احسب الطول BH بطريقتين مختلفتين.
5. حدّد طبيعة وعناصر مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$ واكتب معادلة ديكارتية لها.
6. حدّد طبيعة وعناصر مجموعة النقط N من المستوي حيث: $NA^2+NC^2=21$.
7. ليكن h التحاكي الذي مركزه O ونسبته $-\frac{1}{2}$. نسمي (γ') و(Δ') صورتي (γ) و(Δ) على الترتيب بالتحاكي h.
   - أ. عيّن إحداثيات النقط A' ، B' وC' صور النقط A ، B وC على الترتيب بالتحاكي h.
   - ب. استنتج معادلة ديكارتية لكل من المستقيم (Δ') والدائرة (γ').
   - ج. استنتج محيط ومساحة كل من الدائرة (γ') والمثلث $A'B'C'$.

* * *

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\alpha$ والعلاقة التراجعية :

$u_{n+1}=\frac{5}{6}u_n+335$ ، حيث α عدد حقيقي

1. عيّن العدد الحقيقي α حيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة
2. نضع: $\alpha=2009$ ونقبل أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 2010$
   بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-2010$

أ. أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها

ب. اكتب v_n بدلالة n واستنتج كتابة u_n بدلالة n.

ج. احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

د. احسب بدلالة n المجموعيّن: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

$$S'_n = v_0 + 6v_1 + 6^2v_2 + \cdots + 6^nv_n$$

* * *

التمرين الثالث :

نعتبر النقط $A(0,1,-2)$، $B(-1,0,-1)$، $C(0,-5,-5)$ ، $D(2,0,-2)$، $E(1,-4,-6)$

1. بيّن أنّ النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة
2. احسب مساحة المثلث ABC
3. بيّن أنّ الرباعي $ABCE$ مستطيل
4. اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)
5. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D والعمودي على (ABC)
6. عيّن إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)
7. احسب بُعد النقطة D عن المستوي (ABC)
8. احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

* * *

الموضوع السابع

التمرين الأول :

ليكن h التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$ حيث:

$$\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases}.$$

1. برهن أنّ h تحاكي يُطلب تعيين مركزه ω ونسبته k.
2. اكتب معادلة الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها ω وتمسّ المستقيم (T) ذا المعادلة $3x - 4y + 1 = 0$.
3. اكتب معادلة (T') صورة (T) بالتحاكي h.
4. اكتب معادلة $(\mathcal{C}')$ صورة $(\mathcal{C})$ بالتحاكي h بطريقتين مختلفتين.
5. ادرس الوضعية النسبية لكل من (T') و$(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى $(\mathcal{C}')$.

* * *

التمرين الثاني:

نعرّف المتتاليتين (u_n) و (v_n) بـ : $u_0 = 1$ ، $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3} \text{ ، } v_{n+1} = \frac{u_n+4v_n}{5}$$

1. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $w_n = u_n - v_n$. برهن أنّ المتتالية (w_n) هندسية. عيّن نهايتها ، ثمّ عبّر عن w_n بدلالة n
2. عبّر عن $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ بدلالة w_n ، ثمّ استنتج اتجاه تغيّر المتتاليتين (u_n) و (v_n)
3. بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) لهما نفس النهاية يُرمز لها l
4. من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $t_n = 3u_n + 10v_n$.
   برهن أنّ المتتالية (t_n) ثابتة ، ثمّ استنتج قيمة l .

* * *

التمرين الثالث :

نعتبر النقط $A(1,2,0)$ ، $B(0,3,0)$ ، $C(-1,0,-2)$

والمستوي $(P): x + y - 2z - 3 = 0$

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1. المستوي (ABC) والمستوي (P) متطابقان
2. المعادلة الديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستوي (P) والذي يشمل A وB هي : $x + y + z - 3 = 0$

3. المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين
4. سطح الكرة التي مركزها $\Omega(0,-1,1)$ ونصف قطرها $r = 2\sqrt{3}$ مماسية للمستوي (P)
5. المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) هي النقطة $E\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right)$
6. حجم رباعي الوجوه $ABCD$ يساوي $\frac{4}{3}$
7. مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|$ هي سطح الكرة التي مركزها I $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},0\right)$ ونصف قطرها $r = 2\sqrt{2}$.

* * *

الموضوع الثامن

التمرين الأول :

نعتبر الدائرتين (C_1) و (C_2) حيث:

$(C_1): x^2+y^2+4x-y-2=0$ و $(C_2): x^2+y^2-6x-6y-7=0$

1. عيّن ω_1 و ω_2 مركزي (C_1) و(C_2) على الترتيب وكذا نصفي قطريهما r_1 و r_2.
2. بيّن أنّ (C_1) و(C_2) يتقاطعان في نقطتين A و B يُطلب تعيينهما.
3. برهن أنّ المماسين لكل من (C_1) و(C_2) في النقطة A متعامدان.
4. اكتب معادلة المماس (Δ) للدائرة (C_1) في النقطة A.
5. احسب بعد النقطة $H(1;1)$ عن المماس (Δ).
6. بيّن أنّه يوجد تحاكيان h_1 وh_2 يحولان (C_1) إلى (C_2) يُطلب تعيين نسبتيهما k_1 وk_2 ومركزيهما I_1 وI_2 على الترتيب.

* * *

التمرين الثاني :

I- f دالة معرفة على المجال $]-2;4[$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $f(x)=\frac{4}{4-x}$

1. احسب $\lim\limits_{\overset{<}{x\to 4}} f(x)$.
2. ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيرات.
3. أكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=2$.
4. بيّن أنه إذا كان : $0\le x\le 2$ فإن $0\le f(x)\le 2$.
5. أنشئ المماس (Δ) والمنحنى (C_f).

II- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_0=-1$ و $v_{n+1}=f(v_n)$

- عرف المتتالية (v_n)
- باستعمال المنحنى (C_f) والمماس (Δ) أنشئ الحدود v_0, v_1, v_2, v_3, v_4. ماذا تستنتج؟
- برهن أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما علما أنّ $0\le v_n\le 2$.

* * *

التمرين الثالث :

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب صحيح واحد فقط.

عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك.

نعتبر النقط A(1;3;-1) ، B(4;1;0) ، C(-2;0;-2) ، D(3;2;1)

والمستوي (P) الذي معادلته : $x - 3z - 4 = 0$.

1. المستوي (P) هو المستوي :

ج1 : (BCD) ، ج2 : (ABC) ، ج3 : (ABD).

2. شعاع ناظمي للمستوي (P) هو :

ج1 : $\overrightarrow{n_1}(1;2;1)$ ، ج2 : $\overrightarrow{n_2}(-2;0;6)$ ، ج3 : $\overrightarrow{n_3}(2;0;-1)$.

3. المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي :

ج1 : $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2 : $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3 : $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

* * *

الموضوع التاسع

التمرين الأول :

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $AB = a$.

1. أنشئ النقطة D المعرّفة بالعلاقة: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{CB}$.
2. أنشئ النقطة I صورة D بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$.
3. بيّن أنّ: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB}$ واستنتج طبيعة الرباعي $AIBC$.
4. احسب $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BA}$، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABD.
5. بيّن أنّ $CD = a\sqrt{7}$ ثمّ عيّن $\cos \widehat{CDB}$.
6. ليكن k عدد حقيقي. نعتبر المجموعة (E_k) للنقط M من المستوي حيث: $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2$.
   - أ. بيّن أنّ النقطة D هي مرجح للجملة $\{(A;1),(B;2),(C;-2)\}$.
   - ب. ناقش حسب قيم k طبيعة المجموعة (E_k).
   - ج. نفرض $k = -1$. تحقق أنّ $B \in (E_{-1})$ وبيّن أنّ (E_{-1}) دائرة مماسية للمستقيم (AB).

* * *

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1. أ. احسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1
   - ب. اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n
   - ج. احسب S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ بدلالة n ، ثمّ عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = 728$
2. (v_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$
   - أ. احسب v_2 و v_3
   - ب. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$. بيّن أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
   - ج. اكتب w_n بدلالة n ، ثمّ استنتج v_n بدلالة n.

* * *

التمرين الثالث :

نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(0;2;1)$ ، $C(2;1;3)$.

1. (P) مستو معادلته : $x - z + 1 = 0$
   - أ. بيّن أنّ المستوي (P) هو المستوي (ABC).
   - ب. ما طبيعة المثلث ABC ؟
2. تحقق أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى (ABC).
3. ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟
4. أحسب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC).
5. أحسب حجم الرباعي $ABCD$.

* * *

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

من أجل كل عدد حقيقي m نعرّف التحويل النقطي f_m الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$ حيث: $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - m + 1 \\ y' = \frac{1}{3}y + 2m - 2 \end{cases}$.

1. برهن أنّ f_m تحاكي يُطلب تعيين مركزه ω_m ونسبته k.
2. عيّن مجموعة المراكز ω_m عندما يمسح m المجموعة $\mathbb{R}$.
3. $(\mathcal{C})$ دائرة مركزها $A(-2;3)$ ونصف قطرها $r = 4$. اكتب معادلة $(\mathcal{C}')$ صورة $(\mathcal{C})$ بالتحويل f_m.

* * *

التمرين الثاني :

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n - \frac{2a+4}{3}$ ، حيث a وسيط حقيقي.

1. عيّن قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة
2. نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية، ثمّ احسب عندئذ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية
3. عيّن قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية، ثمّ عيّن في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها.

* * *

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة $14x + 16y + 13z - 47 = 0$ والنقط $A(1;-2;5)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-1;3;1)$

1. أ. تحقّق أنّ النقط A ، B ، C ليست في استقامية
   ب. بيّن أنّ المستوي (ABC) هو (P)
2. جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)
3. أ. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$

ب. تحقّق أنّ النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q)

ج. احسب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB)

* * *

الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول :

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ النقطتين $A(2;1)$ ، $B(0;7)$ ، ولتكن (C_m) مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث:

$$x^2+y^2+4mx-6my+7m-14=0$$

1. أ. بيّن أنّ (C_m) دائرة يُطلب تعيين مركزها w_m ونصف قطرها r_m.
   ب. أنشئ الدوائر (C_0) , (C_1) , (C_2).
   ج. عيّن مجموعة النقط w_m عندما يتغيّر m في $\mathbb{R}$.
2. اكتب معادلة المماس (Δ) للدائرة (C_1) في النقطة A.
3. عيّن تقاطع الدائرة (C_1) مع حامل محور التراتيب.
4. بيّن أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة $x+2y-14=0$ مماس للدائرة (C_1).
5. ليكن h التحاكي الذي مركزه B ونسبته $k=-2$.
   أ. اكتب العبارة التحليلية للتحاكي h.
   ب. اكتب معادلة المستقيم (T') صورة المستقيم (T) بالتحاكي h. ماذا تستنتج؟
   ج. احسب طول ومساحة الدائرة (C'_1) صورة الدائرة (C_1) بالتحاكي h.

* * *

التمرين الثاني :

1. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية:

$$15\left(\frac{1}{\alpha^2}+\alpha^2\right)=41\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)\text{. (ضع : }x=\frac{1}{\alpha}+\alpha\text{)}$$

2. باستعمال نتيجة السؤال الأول ، جد الحدود الحقيقية u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 الموجبة تماما لمتتالية هندسية متزايدة علما أنّ:

$$u_0+u_4=\frac{164}{3} \quad \text{و} \quad u_1+u_3=20$$

* * *

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ ، $D(1;1;1)$

1. أ. تحقّق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا
   ب. بيّن أنّ $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)
   ج. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2. لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$

أ. احسب إحداثيات G

ب. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقّق :

$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=2\|\overrightarrow{MD}\|$$

بيّن أنّ (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$

ج. اثبت أنّ معادلة (Γ) هي : $6x-4y+2z+3=0$

* * *

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول:

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. $A(2;-1)$ و $\Omega(-2;3)$ نقطتان من المستوي، (Γ) دائرة مركزها Ω ونصف قطرها $2\sqrt{2}$.

1. بيّن أنّ النقطة B منتصف القطعة $[A\Omega]$ تنتمي إلى الدائرة (Γ).
2. تحقق أنّ: $x-y+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) مماس الدائرة (Γ) عند النقطة B.
3. λ عدد حقيقي. نعتبر $(\mathcal{C}_\lambda)$ مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي حيث: $x^2+y^2-4x+2y+\lambda=0$.
   - أ. عيّن قيم λ حتى تكون $(\mathcal{C}_\lambda)$ دائرة يُطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها بدلالة λ.
   - ب. عيّن قيم λ حيث: $(\Gamma)\cap(\mathcal{C}_\lambda)=\emptyset$.
   - ج. جد قيمة λ التي من أجلها تكون الدائرتان $(\mathcal{C}_\lambda)$ و (Γ) متماستان خارجيا. ماذا يمثل المستقيم (Δ) بالنسبة إلى القطعة $[A\Omega]$؟
4. اكتب معادلة للدائرة (Γ') صورة الدائرة (Γ) بالتحاكي h الذي مركزه B ونسبته 3.
5. جد جميع المستقيمات التي تمسّ الدائرة (Γ) وتوازي المستقيم (D) الذي معادلته: $x-y-2=0$.

* * *

التمرين الثاني:

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0=6 \\ v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n+1 \end{cases}$$

1. احسب الحدّين u_1 و v_1
2. اكتب $u_{n+2}-u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1}-u_n$.
3. نعتبر المتتالية (w_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n=u_n-v_n$.
   برهن أنّ المتتالية (w_n) هندسية يُطلب تعيين حدّها الأول w_0 ، ثمّ عبّر عن w_n بدلالة n.

* * *

التمرين الثالث:

في الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط :

$A(2\,;4\,;1)$ ، $B(0\,;4\,;-3)$ ، $C(3\,;1\,;-3)$ و $D(1\,;0\,;-2)$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات الآتية :

1. النقط A ، B و C ليست في استقامية.
2. $2x+2y-z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).
3. النقطة $E(3;2;-1)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).
4. المستقيان (AB) و (CD) من نفس المستوي.
5. $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t-1 \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-t-1 \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (CD).
6. يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$.

* * *

سئل الخوارزمي عالم الرياضيات عن الإنسان فأجاب :

إذا كان الإنسان ذا أخلاق فهو = 1

وإذا كان ذا جمال فأضف إلى الواحد صفرا = 10

وإذا كان ذا مال أيضا فأضف صفرا آخر = 100

وإذا كان ذا حسب ونسب فأضف صفرا آخر = 1000

فإذا ذهب العدد واحد وهو الأخلاق

ذهبت قيمة الإنسان وبقيت الأصفار

حول
اعتبارات
الفصل
الأول

بالعلم والعقل لا بالمال والذهب
يزداد رفع الفتى قدرا بلا طلب
كم يرفع العلم أشخاصا إلى رتب
ويخفض الجهل أشرافا بلا أدب

الموضوع الأول

التمرين الأول :

I- لتكن f دالة كثير حدود معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^8 - 10x^4 + 9$

1. بيان أنّ $f = goh$

$$goh(x) = g[h(x)] = [h(x)]^2 + a[h(x)] + b$$
$$= (x^4-4)^2 + a(x^4-4) + b = x^8 - 8x^4 + 16 + ax^4 - 4a + b$$
$$= x^8 + (a-8)x^4 + 16 - 4a + b \Rightarrow \begin{cases} a-8=-10 \\ 16-4a+b=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-15 \end{cases}$$

2. حل المتراجحة $h(x) < 0$

$$h(x) < 0 \Rightarrow x^4 - 4 < 0 \Rightarrow (x^2-2)(x^2+2) < 0 \Rightarrow x^2 - 2 < 0$$
$$\Rightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) < 0 \Rightarrow \boxed{S = \left]-\sqrt{2};\sqrt{2}\right[}$$

II- نضع: $a = -2$ و $b = -15$

1. بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $g(x) = (x-1)^2 - 16$

$$g(x) = (x-1)^2 - 16 = x^2 - 2x + 1 - 16 = \boxed{x^2 - 2x - 15}$$

2. كتابة g على شكل مركّب دالتين u و v يطلب تعيينهما

$$x \xrightarrow{u(x)=x-1} x-1 \xrightarrow{v(x)=x^2-16} (x-1)^2 - 16 \Rightarrow \boxed{g(x) = vou(x)}$$

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة g على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[1;+\infty[$

إذا كان $x \in]-\infty;1]$ فإنّ $u(x) \in]-\infty;0]$: في هذه الحالة تكون الدالة u **متزايدة** على المجال $]-\infty;1]$ والدالة v **متناقصة** على المجال $]-\infty;0]$ ، ومنه نستنتج أنّ الدالة g **متناقصة** على المجال $]-\infty;1]$.

إذا كان $x \in [1;+\infty[$ فإنّ $u(x) \in [0;+\infty[$: في هذه الحالة تكون الدالة u **متزايدة** على المجال $[1;+\infty[$ والدالة v **متزايدة** على المجال $]-\infty;0]$ ، ومنه نستنتج أنّ الدالة g **متزايدة** على المجال $[1;+\infty[$.

4. جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	-16	↗

5. كتابة g على شكل جداء دالتين تآلفيتين واستنتاج إشارتها

$$g(x) = (x-1)^2 - 16 = (x-1-4)(x-1+4) = \boxed{(x-5)(x+3)}$$

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

6. إثبات أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_g)

طريقة ①: استعمال دساتير تغيير المعلم

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$$

$$y = (x-1)^2 - 16 \Rightarrow Y = (X+1-1)^2 - 16 \Rightarrow \boxed{Y = X^2 - 16}$$

بما أنّ الدالة $X^2 - 16$ زوجية، نستنتج أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_g).

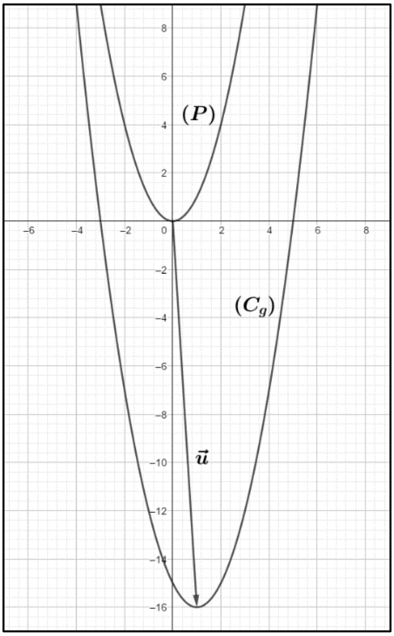
طريقة ②: استعمال القاعدة $\boxed{\boldsymbol{x = a \Rightarrow g(2a - x) = g(x)} \text{ محور تناظر}}$

$$g(2-x) = (2-x-1)^2 - 16 = (-x+1)^2 - 16 = (x-1)^2 - 16$$

$g(2-x) = g(x) \Rightarrow$ المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_g)

7. رسم (P) منحنى الدالة مربّع واستنتاج رسم المنحنى (C_g) في نفس المعلم

بما أنّ $g(x) = (x-1)^2 - 16$، نستنتج أنّ المنحنى (C_g) صورة المنحنى (P) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1; -16)$.



III- $S(x) = g(|x|)$ و $K(x) = |g(x)|$

.1 كتابة كلا من K و S دون رمز القيمة المطلقة

$$x \geq 0 : |x| = x \Rightarrow \boxed{S(x) = g(x)}\ ;\ x \leq 0 : |x| = -x \Rightarrow \boxed{S(x) = g(-x)}$$

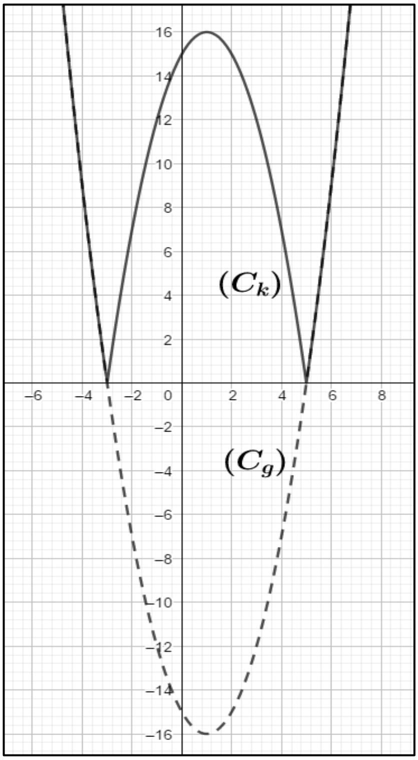
$$x \in]-\infty;-3] \cup [5;+\infty[: g(x) \geq 0 \Rightarrow |g(x)| = g(x) \Rightarrow \boxed{K(x) = g(x)}$$

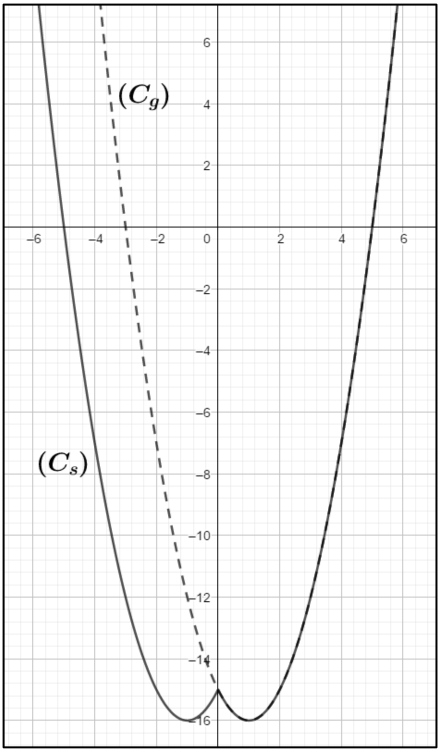
$$x \in [-3;5] : g(x) \leq 0 \Rightarrow |g(x)| = -g(x) \Rightarrow \boxed{K(x) = -g(x)}$$

.2 بيان كيف يمكن إنشاء المنحنيين (C_k) و (C_s) اعتمادا على المنحنى (C_g)، ورسمهما في نفس المعلم

بما أنّ $S(-x) = g(|-x|) = g(|x|) = S(x)$ و D_S متناظر بالنسبة إلى 0، نستنتج أنّ الدالة S زوجية، وبالتالي فإنّ من أجل $x \geq 0$ تكون $S(x) = g(x)$ ومنه ينطبق (C_S) على (C_g)، أمّا من أجل $x \leq 0$ نتمم رسم (C_S) بالتناظر المحوري بالنسبة لمحور التراتيب باعتبارها دالة زوجية.

أمّا بالنسبة للدالة K فمن أجل $x \in]-\infty;-3] \cup [5;+\infty[$ تكون $K(x) = g(x)$ ومنه ينطبق (C_K) على (C_g)، أمّا من أجل $x \in [-3;5]$ تكون $K(x) = -g(x)$ ويكون (C_K) نظيرا لـ (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل.





التمرين الثاني :

$$P_m(x) = \left(m^2 - 4\right)x^4 + (m+1)x^3 - (2+m)x^2 - \frac{5}{2}mx + 2$$

1. تعيين قيم m حتى يكون $P_m(x)$ من الدرجة الثالثة

$m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \boxed{m \in \{-2; 2\}}$

2. التحقق أنّ العدد 2 هو جذر لـ $P_2(x)$

$P_2(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$; $P_2(2) = 26 - 26 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{2 جذر لـ } P_2(x)}$

3. بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي x: $P_2(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$

① باستعمال المطابقة:

$$P_2(x) = (x-2)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$
$$= ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b - 2a = -4 \\ c - 2b = -5 \\ -2c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_2(x) = (x-2)(3x^2 + 2x - 1)}$$

② باستعمال القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 & x - 2 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 6x^2 \quad\quad\quad\quad & 3x^2 + 2x - 1 \\ 2x^2 - 5x + 2 & \\ -2x^2 + 4x \quad\quad & \\ -x + 2 & \\ x - 2 & \\ 0 & \end{array}$$

③ باستعمال خوارزمية هورنر:

	3	−4	−5	2
2				
	$\underbrace{3}_{a}$	$\underbrace{2}_{b}$	$\underbrace{-1}_{c}$	0

$$\boxed{P_2(x) = (x-2)(3x^2 + 2x - 1)}$$

4. حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة $P_2(x)=0$

$$P_2(x)=0 \Rightarrow (x-2)(3x^2+2x-1)=0$$

$$\Delta=4+12=16\,;x_1=-1\,;x_2=\frac{1}{3}\Rightarrow \boxed{S=\left\{-1;\frac{1}{3};2\right\}}$$

تنبيه: بملاحظة أنّ $a+c=b$ يمكننا استنتاج الحلين $x_1=-1$ و $x_2=-\frac{c}{a}$

5. دراسة إشارة $P_2(x)$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2+2x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P_2(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

استنتاج في $\mathbb{R}$ حلول المتراجحة $3x^3+2\leq 4x^2+5x$

$$3x^3+2\leq 4x^2+5x \Rightarrow 3x^3-4x^2-5x+2\leq 0 \Rightarrow P_2(x)\leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[\frac{1}{3};2\right]}$$

6. استنتاج حلول المعادلة : $3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+2\left(x-\frac{2}{3}\right)=1$

نضع: $X=x-\frac{2}{3}$

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+2\left(x-\frac{2}{3}\right)=1\Rightarrow 3X^2+2X-1=0\Rightarrow X=-1 \text{ أو } X=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x-\frac{2}{3}=-1 \text{ أو } x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow \boxed{x_1=-\frac{1}{3}\,;x_2=1}$$

* * *

التمرين الثالث :

I-

1. تعيين وإنشاء النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$

$$G\{(A,2);(B,1);(C,1)\}\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}}$$

2. بيان أنّ G منتصف $[AD]$

$$\underbrace{D\{(B,1);(C,1)\}}_{D\text{ منتصف } [BC]}\Rightarrow \underbrace{G\{(A,2);(D,2)\}}_{\text{خاصية التجميع}}\Rightarrow \boxed{G\text{ منتصف }[AD]}$$

3. $(\boldsymbol{E_1}) : \left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

a. **بيان أنّ النقطة A تنتمي إلى (E_1)**

$$\left\|2\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| \Rightarrow \boxed{A \in (E_1)}\,;(\overrightarrow{AA}=\vec{0})$$

b. **بيان أنّ الشعاع $\vec{v} = -2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن M**

$$\vec{v} = -2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MA}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$$

c. **تعيين و إنشاء المجموعة (E_1)**

$$M \in (E_1) \Rightarrow \left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

$$\Rightarrow \left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\| \Rightarrow 4\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{AD}\right\| \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}$$

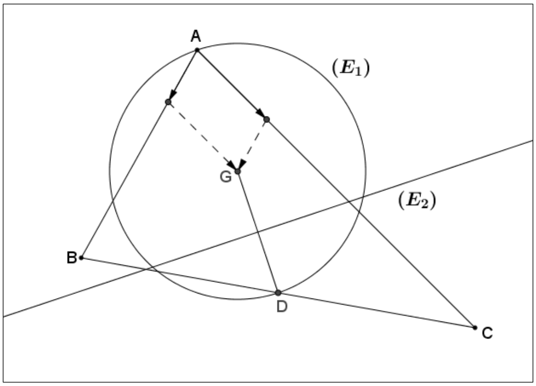
منه نستنتج أنّ المجموعة (E_1) هي الدائرة التي مركزها G وطول قطرها $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|$.

4. **تعيين و إنشاء (E_2)**

$$M \in (E_2) \Rightarrow \left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

$$\Rightarrow \left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = 2\left\|2\overrightarrow{MD}\right\| \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{MD}\right\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E_2) هي محور القطعة $[GD]$.



II- $\boldsymbol{A(2;1)}$ ، $\boldsymbol{B(2;4)}$ و $\boldsymbol{C(6;0)}$

1. **إيجاد إحداثيات النقطة G**

$$G\{(A,2);(B,1);(C,1)\} \Rightarrow G\left(\frac{2(2)+2+6}{4};\frac{2(1)+4+0}{4}\right) \Rightarrow \boxed{G\left(3;\frac{3}{2}\right)}$$

2. تعيين العددين الحقيقيين $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ بحيث تكون $\boldsymbol{A}$ مرجح الجملة $\{(\boldsymbol{B},\boldsymbol{\alpha});(\boldsymbol{F},\boldsymbol{\beta})\}$

$$F\{(A,2);(B,1)\} \Rightarrow 2\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AF}=\vec{0} \Rightarrow A\{(B,1);(F,-3)\} \Rightarrow \boxed{\alpha=1\ ;\ \beta=-3}$$

* * *

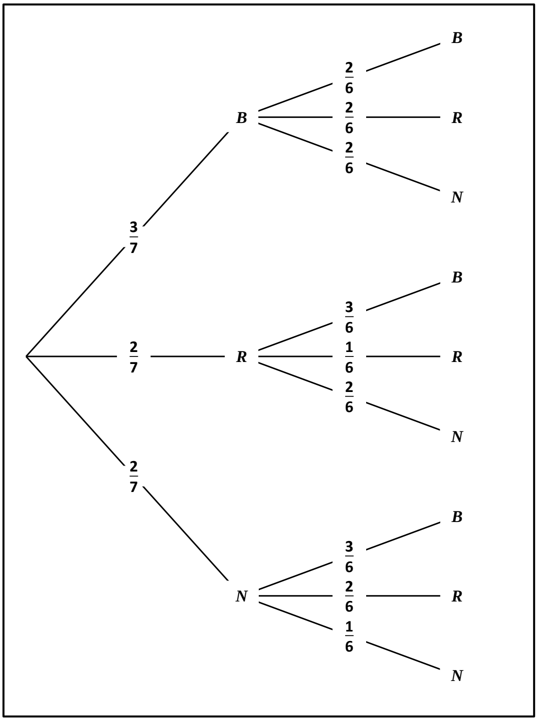
التمرين الرابع :

1. تعيين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

$X \in \{0;1;2\}$

2. تعيين قانون احتمال المتغير X

نرمز إلى الحوادث: "سحب كرة بيضاء" ، "سحب كرة حمراء" و"سحب كرة سوداء" بـ: B ، R وN على الترتيب، ونستعين بشجرة الامكانيات التالية:



$$P(X=0)=P(RR)+P(RN)+P(NR)+P(NN)$$

$$=\left(\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{2}{7}\times\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{2}{7}\times\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{12}{42}=\boxed{\frac{2}{7}}$$

$$P(X=1)=P(BR)+P(BN)+P(RB)+P(NB)$$

$$=\left(\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\right)+\left(\frac{2}{7}\times\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{2}{7}\times\frac{3}{6}\right)=\frac{24}{42}=\boxed{\frac{4}{7}}$$

$$P(X=2)=P(BB)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{7}}$$

X_i	0	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

3. حساب الأمل الرياضياتي والتباين للمتغير X

$$E(X)=\sum X_i.P_i=0\left(\frac{2}{7}\right)+1\left(\frac{4}{7}\right)+2\left(\frac{1}{7}\right)=\boxed{\frac{6}{7}}$$

$$V(X)=\sum X_i^2.P_i-[E(X)]^2=0^2\left(\frac{2}{7}\right)+1^2\left(\frac{4}{7}\right)+2^2\left(\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\boxed{\frac{20}{49}}$$

* * *

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1. $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، $D_g = [0; +\infty[$

أ. حساب $fog(1)$ **و** $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$

$$fog(1) = f[g(1)] = f(1) = \boxed{-2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{0}{\sqrt{3}} = \boxed{0}$$

ب. تعيين D_{gof}

$$D_{gof} = \left\{x; \underbrace{x \in D_f}_{\text{الشرط الأول}} \text{ و } \underbrace{f(x) \in D_g}_{\text{الشرط الثاني}}\right\}$$

$x \in D_f \Rightarrow x \in \mathbb{R} \ldots$ ①

$f(x) \in D_g \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow -x^2 + 5x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \in [2; 3] \ldots$ ②

② و ① $\Rightarrow D_{gof} = \mathbb{R} \cap [2; 3] = \boxed{[2; 3]}$

تعيين عبارة $gof(x)$

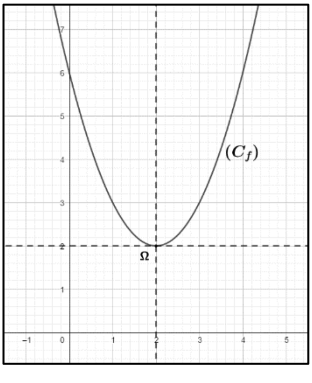
$$gof(x) = g[f(x)] = \sqrt{f(x)} = \boxed{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}$$

2. $f(x) = x^2 - 4x + 6$ **و** $\Omega(2; 2)$

أ. كتابة معادلة (C_f) **منحنى الدالة** f **في المعلم** $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ **ورسمه**

$$\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 2 \end{cases}$$

$$y = x^2 - 4x + 6 \Rightarrow Y + 2 = (X + 2)^2 - 4(X + 2) + 6 \Rightarrow \boxed{Y = X^2}$$



ب. بيان أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

بما أنّ معادلة المنحنى (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ هي $Y = X^2$ وهي زوجية، نستنتج أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_g).

3. (P) كثير حدود معرّف بالعبارة: $P(x) = 2x^3 + x^2 + 1$

أ. حساب $P(-1)$

$P(-1) = 0$. نستنتج أنّ $P(x)$ يقبل القسمة على $(x + 1)$

ب. تعيين الأعداد الحقيقية c, b, a

① باستعمال المطابقة:

$$P(x) = (x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 1 \\ b + c = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(x) = (x+1)(2x^2 - x + 1)}$$

② باستعمال القسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{c|c} 2x^3 + x^2 + 1 & x + 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 2x^2 & 2x^2 - x + 1 \\ -x^2 + 1 & \\ x^2 + x & \\ x + 1 & \\ -x - 1 & \\ 0 & \end{array}$$

③ باستعمال خوارزمية هورنر:

	2	1	0	1
-1				
	2	-1	1	0

$$\boxed{P(x) = (x+1)(2x^2 - x + 1)}$$

4. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية: $\frac{x^2+1}{1-x} > 1$

$$\frac{x^2+1}{1-x} > 1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{1-x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x^2+1-1+x}{1-x} > 0 \Rightarrow \frac{x^2+x}{1-x} > 0$$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,; x_2 = -1$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2+x		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x^2+x}{1-x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

$$\boxed{S =]-\infty; -1[\cup]0; 1[}$$

5. رسم منحنى الدالتين: $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$.

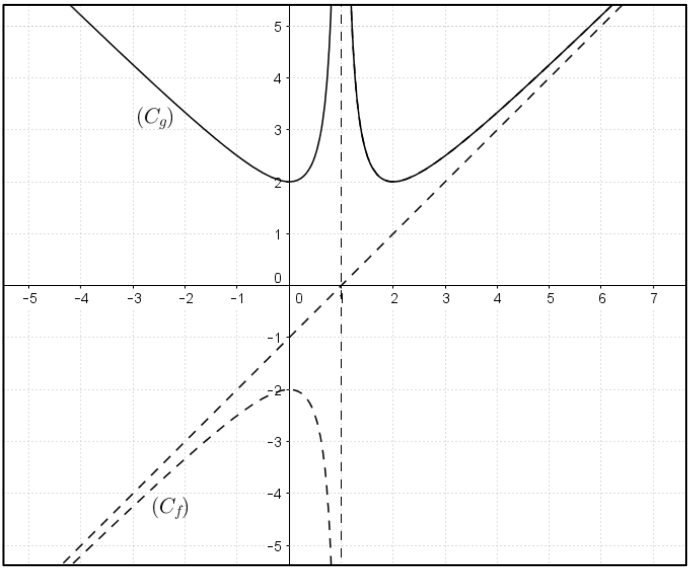
من أجل $x > 1$: $f(x) > 0$ ومنه $g(x) = f(x)$ أي (C_g) منطبق على (C_f)

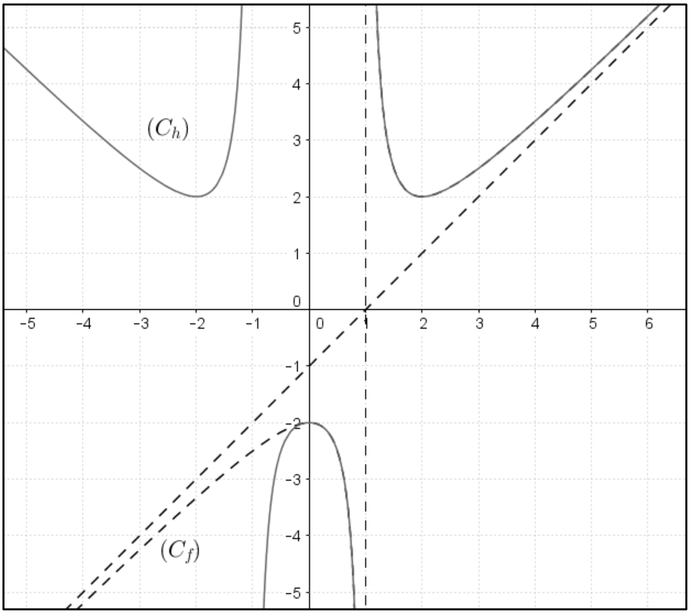
من أجل $x < 1$: $f(x) < 0$ ومنه $g(x) = -f(x)$ أي (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

الدالة h زوجية لأنّ $h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$

من أجل $x > 0$: $|x| = x$ ومنه $g(x) = f(x)$ أي (C_g) منطبق على (C_f)

من أجل $x < 0$: نرسم المنحنى (C_g) بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.





التمرين الثاني :

$$(\boldsymbol{E}): (\boldsymbol{m}-\mathbf{1})\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}(\boldsymbol{m}+\mathbf{3})\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{m}-\mathbf{5}=\mathbf{0}$$

تعيين مجموعة قيم m في كل حالة من الحالات التالية:

1. **المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا يُطلب تعيينه**

$$m-1=0 \Rightarrow \boxed{m=1}\ ;\ -8x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{3}{8}}$$

2. **المعادلة (E) من الدرجة الثانية**

$$m-1\neq 0 \Rightarrow \boxed{m\in\mathbb{R}-\{1\}}$$

3. **العدد (-1) حل للمعادلة (E)، ثمّ تعيين الحل الثاني**

$$(m-1)(-1)^2-2(m+3)(-1)+2m-5=0 \Rightarrow 5m=0 \Rightarrow \boxed{m=0}$$

$$(E): -x^2-6x-5=0\ ; x_1=-1 \Rightarrow \boxed{x_2=-\frac{c}{a}=-5}$$

4. **المعادلة (E) تقبل حلين أحدهما مقلوب الآخر**

$$x_1=\frac{1}{x_2} \Rightarrow P=x_1.x_2=1 \Rightarrow \frac{c}{a}=1 \Rightarrow \frac{2m-5}{m-1}=1 \Rightarrow 2m-5=m-1$$

$$\Rightarrow \boxed{m=4}$$

5. المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين في الإشارة

$$x_1.x_2<0 \Rightarrow \frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{2m-5}{m-1}<0 \Rightarrow \boxed{m\in \left]1;\frac{5}{2}\right[}$$

* * *

التمرين الثالث :

$A(-2;0)$ ، $B(4;-2)$ ، $C(2;3)$ ، $G_\alpha\{(A,\alpha);(B,\alpha^2+1);(C,4\alpha-1)\}$

1. بيان أنّ النقطة H هي مرجح النقطتين A و B

$$-\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{BH}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}=\vec{0}\Rightarrow \boxed{H\{(A,1);(B,2)\}}$$

2. تعليم النقط A ، B و C، ثمّ إنشاء النقطة H (انظر الشكل في نهاية التمرين)

3. تعيين إحداثيي النقطة K حتى تكون النقطة H مركز ثقل المثلث AKC

$$H\{(A,1);(B,2)\}\Rightarrow H\left(\frac{-2+2(4)}{3};\frac{0+2(-2)}{3}\right)\Rightarrow \boxed{H\left(2;-\frac{4}{3}\right)}$$

$$\underbrace{H\{(A,1);(K,1);(C,1)\}}_{H\text{ مركز ثقل المثلث }AKC}\Rightarrow \begin{cases} x_H=\dfrac{x_A+x_K+x_C}{3}\\ y_H=\dfrac{y_A+y_K+y_C}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_K=3x_H-x_A-x_C\\ y_K=3y_H-y_A-y_C\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x_K=6+2-2\\ y_K=-4-0-3\end{cases}\Rightarrow \boxed{K(6;-7)}$$

4. تعيين قيم α التي من أجلها تكون G_α موجودة، ثمّ إنشاء G_1

$$G_\alpha\text{ موجودة}\Rightarrow \alpha+\alpha^2+1+4\alpha-1\neq 0\Rightarrow \alpha^2+5\alpha\neq 0\Rightarrow \alpha(\alpha+5)\neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha\in\mathbb{R}-\{-5;0\}}$$

لإنشاء النقطة G_1 نستعمل إحدى الطريقتين:

$$G_1\{(A,1);(B,2);(C,3)\}\Rightarrow G_1\left(\frac{-2+8+6}{6};\frac{0-4+9}{6}\right)\Rightarrow \boxed{G_1\left(2;\frac{5}{6}\right)} ①$$

$$G_1\{(A,1);(B,2);(C,3)\}\Rightarrow \overrightarrow{AG_1}=\frac{2}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{6}\overrightarrow{AC}\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}} ②$$

5. بيان أنّ النقط C ، H و G_1 على استقامة واحدة

$$\underbrace{G_1\{(A,1);(B,2);(C,3)\}}_{H\{(A,1);(B,2)\}}\Rightarrow \underbrace{G_1\{(H,3);(C,3)\}}_{G_1\text{ منتصف }[HC]}\Rightarrow \boxed{C\text{ ، }H\text{ و }G_1\text{ في استقامية}}$$

6. تعيين وإنشاء المجموعتين (E_1) و (E_2)

$$M\in(E_1)\Rightarrow \left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}}_{6\overrightarrow{MG_1}}\right\|=3\left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}}_{M\text{ مستقل عن }}\right\|$$

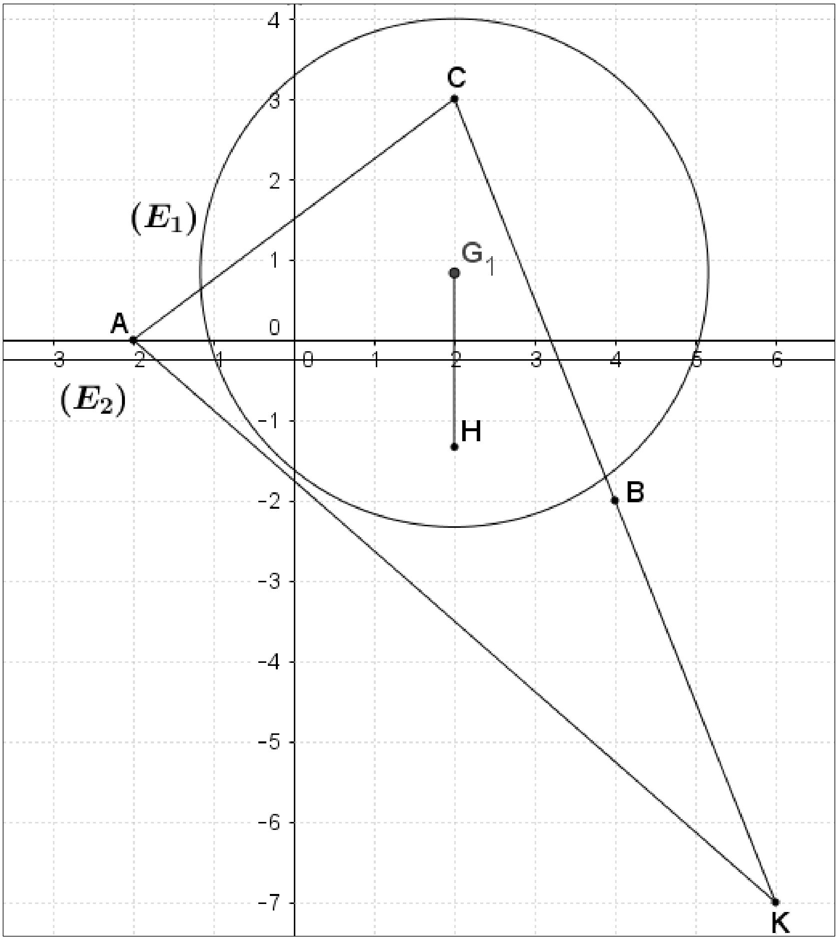
$$\Rightarrow 6\|\overrightarrow{MG_1}\| = 3\|-\overrightarrow{AB}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MG_1}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MG_1}\| = \sqrt{10}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E_1) هي الدائرة التي مركزها G_1 ونصف قطرها $\sqrt{10}$.

$$M \in (E_2) \Rightarrow \left\|\underbrace{\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}}_{6\overrightarrow{MG_1}}\right\| = 2\left\|\underbrace{\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}}_{3\overrightarrow{MH}}\right\|$$

$$\Rightarrow 6\|\overrightarrow{MG_1}\| = 6\|\overrightarrow{MH}\| \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{MH}\|}$$

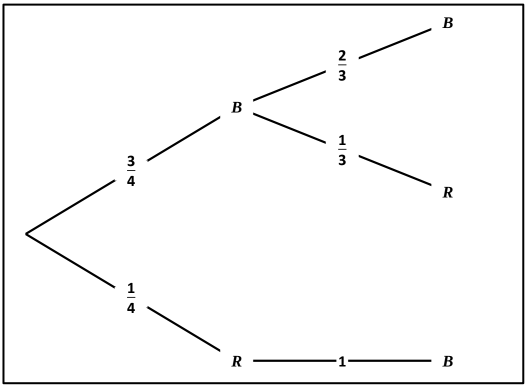
منه نستنتج أنّ المجموعة (E_2) هي محور القطعة $[G_1H]$.



* * *

التمرين الرابع :

1. تعيين شجرة الإمكانيات



2. حساب احتمال الحوادث A ، C ، D و E:

$$P(A) = P(BB) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P(C) = P(BR) + P(RB) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P(D) = P(BR) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$P(E) = P(RR) = \boxed{0}$$

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المحصّل عليهما

أ. تعيين قيم المتغير العشوائي X

$$\Omega = \left\{ \underbrace{BB}_{+\text{①}+\text{①}} \; ; \; \underbrace{BR}_{+\text{①}-\text{①}} \; ; \; \underbrace{RB}_{-\text{①}+\text{①}} \right\} \Rightarrow \boxed{X \in \{0; 2\}}$$

ب. تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$P(X = 0) = P(BR) + P(RB) = \boxed{\frac{1}{2}} \; ; P(X = 2) = P(BB) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

X_i	0	2
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ج. حساب الأمل الرياضياتي والتباين للمتغير العشوائي X

$$E(X) = \sum X_i . P_i = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{1}$$

$$V(X) = \sum X_i^2 . P_i - [E(X)]^2 = 0^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2^2\left(\frac{1}{2}\right) - (1)^2 = \boxed{1}$$

* * *

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 7x - 6$

1. تحقق أنّ العدد (-2) جذر للدالة f.

$$f(-2) = (-2)^3 - 7(-2) - 6 = -14 + 14 = \boxed{0}$$

2. إثبات أنّ: $f(x) = (x+2)g(x)$ حيث $g(x)$ دالة كثير حدود يطلب تعيينها.

$$f(-2) = 0 \Rightarrow f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$$

	1	0	-7	-6
-2				
	1	-2	-3	0

$$f(x) = (x+2)(x^2 - 2x - 3) \Rightarrow \boxed{g(x) = x^2 - 2x - 3}$$

3. بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $g(x) = (x-1)^2 - 4$

$$g(x) = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 - 4 = \boxed{x^2 - 2x - 3}$$

استنتاج أنّه يمكن كتابة $g(x)$ على الشكل $hok(x)$

$$g(x) = (x-1)^2 - 4\,;\, x \xrightarrow{k(x)=x-1} x - 1 \xrightarrow{h(x)=x^2-4} (x-1)^2 - 4$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = hok(x)}$$

4. بيان أنّ: $g(x) - g(1) \geq 0$ واستنتاج أصغر قيمة ممكنة للدالة g.

$$g(x) - g(1) = (x-1)^2 - 4 + 4 = (x-1)^2 \Rightarrow \boxed{g(x) - g(1) \geq 0}$$

$$g(x) - g(1) \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(1) \Rightarrow \boxed{g(x) \geq -4}$$

5. دراسة اتجاه تغير الدالة g على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[1;+\infty[$

إذا كان $x \in]-\infty;1]$ فإنّ $k(x) \in]-\infty;0]$: في هذه الحالة تكون الدالة k متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ والدالة h متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ ، ومنه نستنتج أنّ الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

إذا كان $x \in [1;+\infty[$ فإنّ $k(x) \in [0;+\infty[$: في هذه الحالة تكون الدالة k متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ والدالة h متزايدة على المجال $[0;+\infty[$، ومنه نستنتج أنّ الدالة g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		↘	-4	↗	

6. إثبات أنّ المنحنى (C_g) يقطع محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يُطلب تعيينهما.

$$g(x)=0 \Rightarrow (x-1)^2-2^2=0 \Rightarrow (x-1+2)(x-1-2)=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-3)=0 \Rightarrow \boxed{x_1=-1\,;x_2=3}$$

منه نستنتج أنّ المنحنى (C_g) يقطع محور الفواصل في النقطتين $A(-1;0)$ ، $B(3;0)$

7. دراسة إشارة الدالة g

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من جدول الإشارة نستنتج أنّ الدالة g موجبة على المجال $]-\infty;-1] \cup [3;+\infty[$

وسالبة على المجال $]-1;3[$.

استنتاج إشارة الدالة f.

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

من جدول الإشارة نستنتج أنّ الدالة f موجبة على المجال $[-2;-1] \cup [3;+\infty[$

وسالبة على المجال $]-\infty;-2[\cup]-1;3[$.

8. استنتاج حلول المعادلتين: $x^4-2x^2-3=0$ و $x\sqrt{x}-7\sqrt{x}-6=0$

الدالة g تنعدم من أجل $x\in\{-1;3\}$، ومنه حلول المعادلة $x^2-2x-3=0$

هي $\boxed{S_1=\{-1;3\}}$.

لحل المعادلة $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$، نضع $X = x^2$ ونحصل على المعادلة الأولى

ومنه نستنتج أنّ $X = 3$ أي $x^2 = 3$ ومنه: $\boxed{S_2 = \{-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\}}$

(لاحظ أنّ القيمة -1 مرفوضة لأنّ $X \geq 0$).

لحل المعادلة $x\sqrt{x} - 7\sqrt{x} - 6 = 0$، نضع $X = \sqrt{x}$ ونحصل على المعادلة

$X^3 - 7X - 6 = 0$ أي $f(X) = 0$ ومنه نستنتج أنّ $X = 3$ أي $\sqrt{x} = 3$

ومنه: $\boxed{S_3 = \{9\}}$ (لاحظ أنّ القيمتين -1 و -2 مرفوضتان لأنّ $X \geq 0$).

حل المتراجحة: $f(x) \leq 0$.

من جدول إشارة الدالة f نستنتج أنّ حلول المتراجحة هي $]-\infty;-2[\;\cup\;]-1;3[$.

9. إثبات أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_g).

طريقة ①: باستعمال دساتير تغيير المعلم

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases} ; y = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow Y = (X + 1 - 1)^2 - 4 \Rightarrow Y = X^2 - 4$$

بما أنّ الدالة $X^2 - 4$ زوجية، فإنّ منحناها البياني يقبل محور تناظر معادلته $X = 0$

ومنه نستنتج أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_g).

طريقة ②: باستعمال المبرهنة التالية:

المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر للمنحنى (C_g) معناه من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_g$ فإنّ: $(2a - x) \in D_g$ و $g(2a - x) = g(x)$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \in D_g$ فإنّ: $(2 - x) \in D_g$

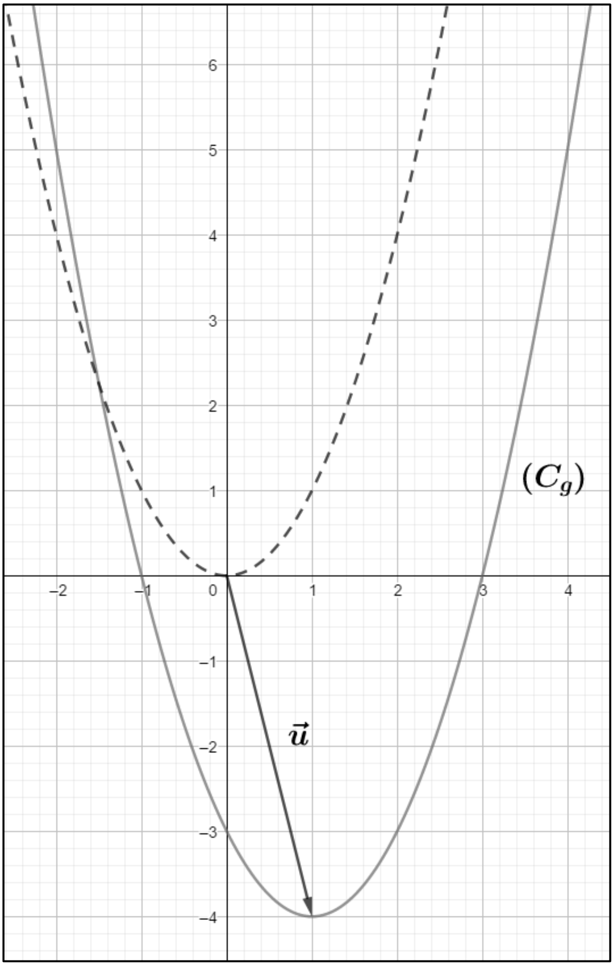
$$g(2 - x) = (2 - x - 1)^2 - 4 = (1 - x)^2 - 4 = (x - 1)^2 - 4 = g(x)$$

ومنه نستنتج أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_g).

10. شرح كيف يمكن استنتاج رسم المنحنى (C_g).

لدينا: $g(x) = (x-1)^2 - 4$، ومنه نستنتج أنّ المنحنى (C_g) هو صورة منحنى الدالة مربّع بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1;-4)$.

رسم المنحنى (C_g).



* * *

التمرين الثاني :

$$f(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$$

1. حساب $f(-1)$ و $f(2)$، ثمّ تحليل $f(x)$

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (x+1)(x-2)(ax^2 + bx + c)$$

① باستعمال المطابقة:

$$f(x) = (x+1)(x-2)(ax^2 + bx + c) = (x^2 - x - 2)(ax^2 + bx + c)$$
$$= ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax^3 - bx^2 - cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$
$$= ax^4 + (b-a)x^3 + (c - b - 2a)x^2 + (-2b - c)x - 2c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 \\ c - b - 2a = -11 \\ -2b - c = 9 \\ -2c = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x) = (x+1)(x-2)(x^2-9)}$$

② **باستعمال خوارزمية هورنر:**

	1	-1	-11	9	18
-1					
	1	-2	-9	18	0
2					
	$\underbrace{1}_{a}$	$\underbrace{0}_{b}$	$\underbrace{-9}_{c}$	0	0

$$\boxed{f(x) = (x+1)(x-2)(x^2-9)}$$

2. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $f(x) \geq 0$

$f(x) \geq 0 \Rightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 - 9) \geq 0$

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1\,; x_2 = 2\,; x_2 - 9 = 0 \Rightarrow x_3 = -3; x_4 = 3$

x	$-\infty$		-3		-1		2		3		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \in \,]-\infty; -3] \cup [-1; 2] \cup [3; +\infty[}$$

3. تعيين $P(x)$ حيث من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x+1) - P(x) = x$

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(x+1) - P(x) = x \Rightarrow a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = x$

$$\Rightarrow 2ax + a + b = x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x}$$

ملاحظة: يمكننا إعطاء أي قيمة للعدد c بدلا من 0.

4. استنتاج المجموع: $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$

$$S = \underbrace{P(2)-P(1)}_{1} + \underbrace{P(3)-P(2)}_{2} + \underbrace{P(4)-P(3)}_{3} + \cdots + \underbrace{P(n+1)-P(n)}_{n}$$

$$S = P(n+1) - P(1) = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) = \boxed{\frac{1}{2}(n^2+n)}$$

التمرين الثالث :

1. تعيين قيم m بحيث تكون G_m مرجحا للجملة $\{(A,m-1);(B,2m-3)\}$

$$m-1+2m-3 \neq 0 \Rightarrow 3m-4 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{m \in \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}}$$

2. أ. التعبير عن الشعاع $\overrightarrow{AG_m}$ بدلالة كلا من $\overrightarrow{AB}$ و m

$$G_m\{(A,m-1);(B,2m-3)\} \xRightarrow[G\{(A,\alpha);(B,\beta)\}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}]{} \boxed{\overrightarrow{AG_m} = \frac{2m-3}{3m-4}\overrightarrow{AB}}$$

ب. تعيين قيم m بحيث تكون النقطة G_m منطبقة على I

$$G_m = I \Rightarrow \overrightarrow{AG_m} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \frac{2m-3}{3m-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4m-6 = 3m-4 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

طريقة ② ... $G_m = I \Rightarrow$ G_m منتصف $[AB]$ $\Rightarrow m-1 = 2m-3 \Rightarrow \boxed{m=2}$

ج. تعيين قيم m بحيث تكون النقطة G_m منطبقة على J

$$G_m = J \Rightarrow \overrightarrow{AG_m} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \frac{2m-3}{3m-4} = \frac{3}{2} \Rightarrow 4m-6 = 9m-12 \Rightarrow \boxed{m = \frac{6}{5}}$$

د. تعيين قيم m بحيث تقع النقطة G_m داخل القطعة $[AB]$

$$G_m \in [AB] \Rightarrow 0 < \frac{2m-3}{3m-4} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2m-3}{3m-4} > 0 \\ \dfrac{2m-3}{3m-4} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2m-3}{3m-4} > 0 \\ \dfrac{-m+1}{3m-4} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \in \left]-\infty;\frac{4}{3}\right[\cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[\\ m \in \left]-\infty;1\right[\cup \left]\frac{4}{3};+\infty\right[\end{cases} \Rightarrow \boxed{m \in \left]-\infty;1\right[\cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[}$$

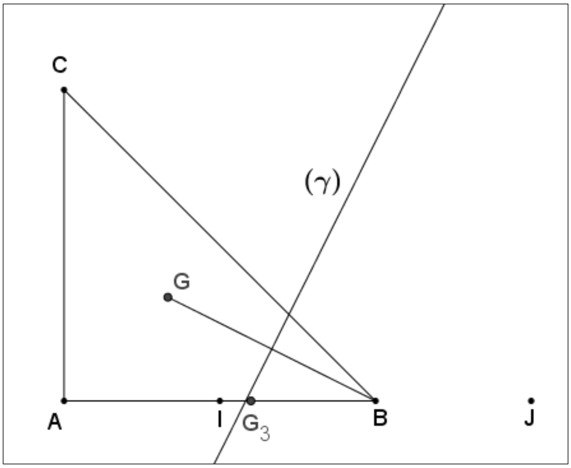
3. تعيين وإنشاء المجموعة (γ)

لتكن G مركز ثقل المثلث ABC أي $G\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$، وبما أنّ J نظيرة I بالنسبة إلى B فإنّ B هي منتصف $[IJ]$ أي $B\{(I,1);(J,1)\}$، ومنه:

$$M \in (\gamma) \Rightarrow \left\| \underbrace{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}} \right\| = \frac{3}{2} \left\| \underbrace{\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}}_{2\overrightarrow{MB}} \right\| \Rightarrow 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MB}\right\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}\right\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (γ) هي محور القطعة $[GB]$.



4. **مناقشة طبيعة المجموعة $(\boldsymbol{\delta})$**

لتكن G_3 مرجح الجملة $\{(A,2);(B,3)\}$، ومنه:

$$M \in (\delta) \Rightarrow \left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 5(1-k)^2 \Rightarrow 5\left\|\overrightarrow{MG_3}\right\| = 5(1-k)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MG_3}\right\| = (1-k)^2}$$

- $k = 1: \left\|\overrightarrow{MG_3}\right\| = 0 \Rightarrow (\delta) = \{G_3\}$
- $k \neq 1: \left\|\overrightarrow{MG_3}\right\| = (1-k)^2$

المجموعة (δ) هي الدائرة التي مركزها G_3 ونصف قطرها $(1-k)^2$.

* * *

التمرين الرابع :

1. **اكمال الجدول**

المكعّب / الرباعي	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24

2. تعريف قانون الاحتمال لرقم آحاد جداء الرقمين الناتجين وحساب أمله الرياضياتي

$$X \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$$

$$P(X=0)=\frac{2}{24}=\boxed{\frac{1}{12}}\ ;\ P(X=1)=\boxed{\frac{1}{24}}\ ;\ P(X=2)=\boxed{\frac{5}{24}}$$

$$P(X=3)=\frac{2}{24}=\boxed{\frac{1}{12}}\ ;\ P(X=4)=\frac{4}{24}=\boxed{\frac{1}{6}}\ ;\ P(X=5)=\frac{2}{24}=\boxed{\frac{1}{12}}$$

$$P(X=6)=\frac{4}{24}=\boxed{\frac{1}{6}}\ ;\ P(X=8)=\frac{3}{24}=\boxed{\frac{1}{8}}\ ;\ P(X=9)=\boxed{\frac{1}{24}}$$

X_i	0	1	2	3	4	5	6	8	9
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$

$$E(X)=\sum X_i.P_i=0\left(\frac{1}{12}\right)+1\left(\frac{1}{24}\right)+2\left(\frac{5}{24}\right)+3\left(\frac{1}{12}\right)+4\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$+5\left(\frac{1}{24}\right)+6\left(\frac{1}{6}\right)+8\left(\frac{1}{8}\right)+9\left(\frac{1}{24}\right)=\boxed{\frac{95}{24}}$$

* * *

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

1. **بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$.**

$f(2)=0 \Rightarrow f(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$

	1	-1	-3	2
2				
	1	1	-1	0

$$\boxed{f(x)=(x-2)(x^2+x-1)}$$

2. **دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل.**

$$f(x)=0 \Rightarrow (x-2)(x^2+x-1)=0 \Rightarrow \boxed{S=\left\{2;\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$$

- من أجل $x \in \left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2};2\right[$: $f(x)<0$، ومنه يكون (C_f) تحت محور الفواصل.
- من أجل $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [2;+\infty[$: $f(x)\geq 0$، ومنه يكون (C_f) فوق محور الفواصل.

3. **انشاء المنحنيات $(C_1),(C_2),(C_3)$ التمثيلات البيانية للدوال f_1,f_2,f_3:**

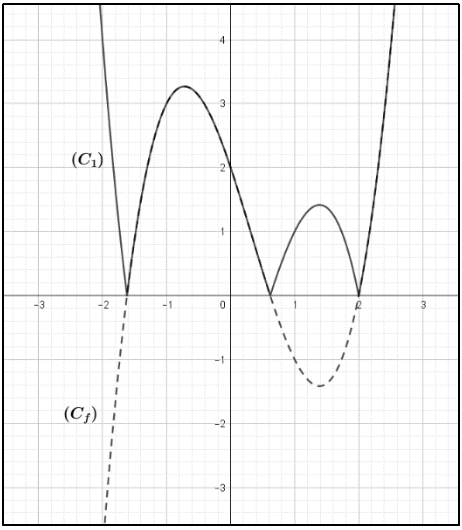
$\boldsymbol{f_1(x)=\left|x^3-x^2-3x+2\right|} \quad ; \quad \boldsymbol{f_2(x)=x^2|x|-x^2-3|x|+2}$

$\boldsymbol{f_3(x)=(x-1)^3-(x-1)^2-3x+5}$

$$① \; f_1(x)=|f(x)|=\begin{cases}-f(x), & f(x)<0\\ f(x), & f(x)\geq 0\end{cases}$$

- من أجل $x \in \left]-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2};2\right[$: $f(x)<0$، أي $f_1(x)=-f(x)$، ومنه يكون (C_1) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.
- من أجل $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [2;+\infty[$: $f(x)\geq 0$، أي $f_1(x)=f(x)$، ومنه ينطبق (C_1) على (C_f).

باختصار: لرسم منحنى الدالة $|f(x)|$، نطابق الجزء من (C_f) المرسوم فوق محور الفواصل، ونناظر الجزء من (C_f) المرسوم تحت محور الفواصل.

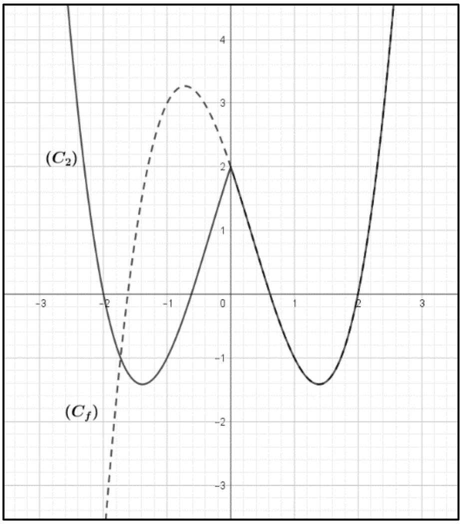


② $f_2(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(-x), & x < 0 \\ f(x), & x \geq 0 \end{cases}$

الدالة f_2 زوجية لأنّ $D_{f_2} = \mathbb{R}$ (متناظر بالنسبة إلى الصفر) ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

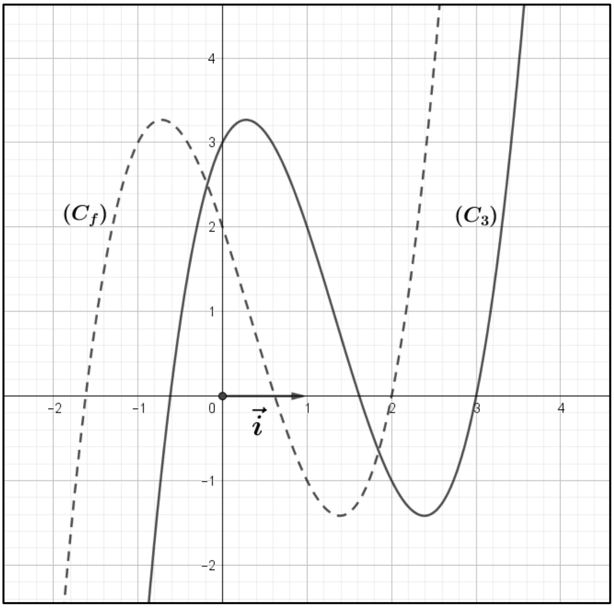
$$f_2(-x) = (-x)^2|-x| - (-x)^2 - 3|-x| + 2$$
$$= x^2|x| - x^2 - 3|x| + 2 = f_2(x)$$

- من أجل $x \in [0;+\infty[$: $|x| = x$، أي $f_2(x) = f(x)$، ومنه ينطبق (C_2) على (C_f).
- من أجل $x \in]-\infty;0[$: نرسم (C_2) بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.



③ $f(x-1) = (x-1)^3 - (x-1)^2 - 3(x-1) + 2 = f_3(x)$

منه نستنتج أنّ (C_3) صورة (C_1) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{i}(1;0)$.



.4 $\boldsymbol{g(x) = x^2}$; $\boldsymbol{h(x) = (x^3 - x^2 - 3x + 2)^2}$

أ. بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x) = gof(x)$.

$D_{gof} = \{x; x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\} = \mathbb{R} = D_h$

$gof(x) = g[f(x)] = [f(x)]^2 = (x^3 - x^2 - 3x + 2)^2 = h(x)$

منه نستنتج أنّ من أجل كل عدد حقيقي x: $h(x) = gof(x)$.

ب. استنتاج اتجاه تغير الدالة h على كل من المجالين $\left[0;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ و $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$.

من أجل $x \in \left[0;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$، $f(x) \in [0;2]$.

لدينا f متناقصة على المجال $\left[0;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ و g متزايدة على المجال $[0;2]$،

منه نستنتج أنّ h متناقصة على المجال $\left[0;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

من أجل $x \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$، $f(x) \in [-1;0]$.

لدينا f متناقصة على المجال $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$ و g متناقصة على المجال $[-1;0]$،

منه نستنتج أنّ h متزايدة على المجال $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};1\right]$.

* * *

التمرين الثاني :

1. **مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية:**

$$mx^2 - 2x + m = 0 \ldots ①$$

$① : m = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$ (حل وحيد)

$② : m \neq 0; \Delta = 4 - 4m^2 = 4(1 - m^2)\ ; P = \frac{c}{a} = 1\ ; S = -\frac{b}{a} = \frac{2}{m}$

$\Delta \geq 0 \Rightarrow 1 - m^2 \geq 0 \Rightarrow m \in [-1; 0[\cup]0; 1]$

m	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
P		▨		$+$	‖	$+$		▨	
S		▨		$-$	‖	$+$		▨	

من الجدول نستنتج أنّ:

- من أجل $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$: لا تقبل المعادلة حلولا $(\Delta < 0)$
- من أجل $m \in \{-1; 1\}$: تقبل المعادلة حلا مضاعفا $(\Delta = 0)$
- من أجل $m \in]-1; 0[\cup]0; 1[$: تقبل المعادلة حلين متمايزين $(\Delta > 0)$

2. **تعيين قيم m التي تقبل من أجلها المعادلة ① حلين موجبين تماما**

تقبل المعادلة حلين موجبين من أجل $m \in]0; 1[$. $(\Delta > 0; P > 0; S > 0)$

* * *

التمرين الثالث :

ABC **مثلث حيث** $BC = 8cm, AC = 12cm, AB = 10cm$

$I\{(A,1);(B,3)\}$، $J\{(B,3);(C,-1)\}$ ، $G\{(A,1);(B,3);(C,-1)\}$

1. **إنشاء النقطتين I و J**

$I\{(A,1);(B,3)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}}\ ; J\{(B,3);(C,-1)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

2. **بيان أنّ النقط I، C و G في استقامية**

$$\begin{cases} I\{(A,1);(B,3)\} \\ G\{(A,1);(B,3);(C,-1)\} \end{cases} \Rightarrow G\{(I,4);(C,-1)\} \Rightarrow \overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{النقط } I\text{، } C \text{ و } G \text{ في استقامية}}$

3. **بيان أنّ النقط J، A و G في استقامية**

$$\begin{cases} J\{(B,3);(C,-1)\} \\ G\{(A,1);(B,3);(C,-1)\} \end{cases} \Rightarrow G\{(A,1);(J,2)\} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

$\Rightarrow$ النقط J، A و G في استقامية

4. إنشاء النقطة G

$$\begin{cases} G \in (CI) \\ G \in (AJ) \end{cases} \Rightarrow \boxed{G \in (CI) \cap (AJ)}$$

5. تعيين وإنشاء المجموعة (Δ)

$$M \in (\Delta) \Rightarrow \left\| \underbrace{\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}}_{4\overrightarrow{MI}} \right\| = 2 \left\| \underbrace{3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}_{2\overrightarrow{MJ}} \right\| \Rightarrow 4\|\overrightarrow{MI}\| = 4\|\overrightarrow{MJ}\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MJ}\|}$$

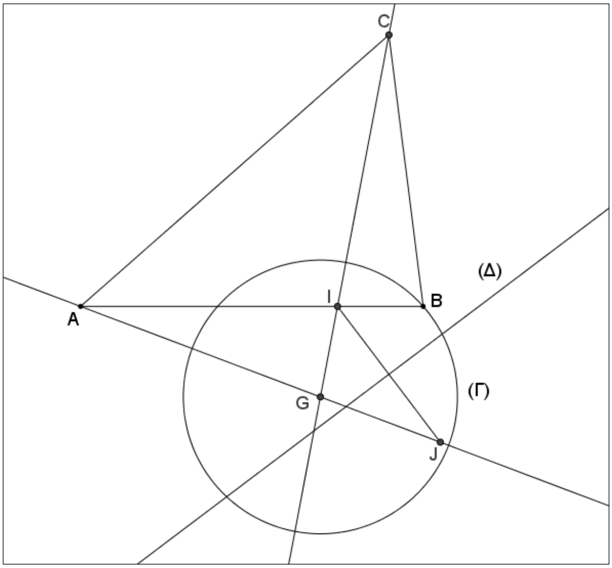
منه نستنتج أنّ المجموعة (Δ) هي محور القطعة $[IJ]$.

6. تعيين وإنشاء المجموعة (Γ)

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow \left\| \underbrace{\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}} \right\| = \left\| \underbrace{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}}_{\text{مستقل عن } M} \right\| \Rightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\| = \|-\overrightarrow{AC}\|$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \frac{1}{3}\|\overrightarrow{AC}\| \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MG}\| = 4}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 4.



* * *

التمرين الرابع :

1. **حساب احتمال الحوادث A ، B و C**

$X+Y$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(A)=\frac{4}{36}=\boxed{\frac{1}{9}}$$

$X.Y$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$$P(B)=\frac{10}{36}=\boxed{\frac{5}{18}}$$

$$P(C)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{36}+\frac{10}{36}-\frac{2}{36}=\boxed{\frac{4}{9}}$$

2. **ليكن Z المتغير العشوائي المعرف كما يلي : $Z=|X-Y|$**

أ. تعيين قيم المتغير العشوائي Z

$\|X-Y\|$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$Z\in\{0;1;2;3;4;5\}$$

ب. تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي Z

$$P(Z=0)=\frac{6}{36}=\boxed{\frac{1}{6}}\ ;\ P(Z=1)=\frac{10}{36}=\boxed{\frac{5}{18}}\ ;\ P(Z=2)=\frac{8}{36}=\boxed{\frac{2}{9}}$$

$$P(Z=3)=\frac{6}{36}=\boxed{\frac{1}{6}}\ ;\ P(Z=4)=\frac{4}{36}=\boxed{\frac{1}{9}}\ ;\ P(Z=5)=\frac{2}{36}=\boxed{\frac{1}{18}}$$

Z_i	0	1	2	3	4	5
$P(Z=Z_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

ج. حساب الأمل الرياضياتي ، التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي Z

$$E(Z)=\sum Z_i.P_i=1\left(\frac{5}{18}\right)+2\left(\frac{2}{9}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)+4\left(\frac{1}{9}\right)+5\left(\frac{1}{18}\right)=\boxed{\frac{35}{18}}$$

$$V(Z)=\sum Z_i^2.P_i-[E(Z)]^2$$

$$=1^2\left(\frac{5}{18}\right)+2^2\left(\frac{2}{9}\right)+3^2\left(\frac{1}{6}\right)+4^2\left(\frac{1}{9}\right)+5^2\left(\frac{1}{18}\right)-\left(\frac{35}{18}\right)^2=\boxed{\frac{665}{324}}$$

$$\sigma(Z)=\sqrt{V(Z)}=\sqrt{\frac{665}{324}}=\boxed{\frac{\sqrt{665}}{18}}$$

* * *

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \quad ; \quad g(x) = \frac{x}{x-1}$$

1. تعيين D_f و D_g مجموعتي تعريف كل من الدالتين f و g.

$D_f = \mathbb{R} \, ; D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

2. أ. تعيين العددين الحقيقين a و b بحيث: $f(x) = (x+a)^2 + b$.

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 - 1 + 2 = \boxed{(x-1)^2 + 1}$

ب. تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين u و v يُطلب تعيينهما.

$x \xrightarrow{u(x)=x-1} x - 1 \xrightarrow{v(x)=x^2+1} (x-1)^2 + 1 \Rightarrow \boxed{f(x) = vou(x)}$

ج. تحديد اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty; 1]$ و $[1; +\infty[$

من أجل $x \in]-\infty; 1]$، $u(x) \in]-\infty; 0]$.

الدالة u متزايدة على المجال $]-\infty; 1]$ والدالة v متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$، منه نستنتج أنّ الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; 1]$.

من أجل $x \in [1; +\infty[$، $u(x) \in [0; +\infty[$.

الدالة u متزايدة على المجال $[1; +\infty[$ والدالة v متزايدة على المجال $[0; +\infty[$، منه نستنتج أنّ الدالة f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

د. تحديد طريقة رسم المنحنى (C_f) انطلاقا من التمثيل البياني للدالة مربّع

بما أنّ $f(x) = (x-1)^2 + 1$، نستنتج أنّ المنحنى (C_f) هو صورة منحنى الدالة مربّع بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1; 1)$.

ه. إنشاء المنحنى (C_f).

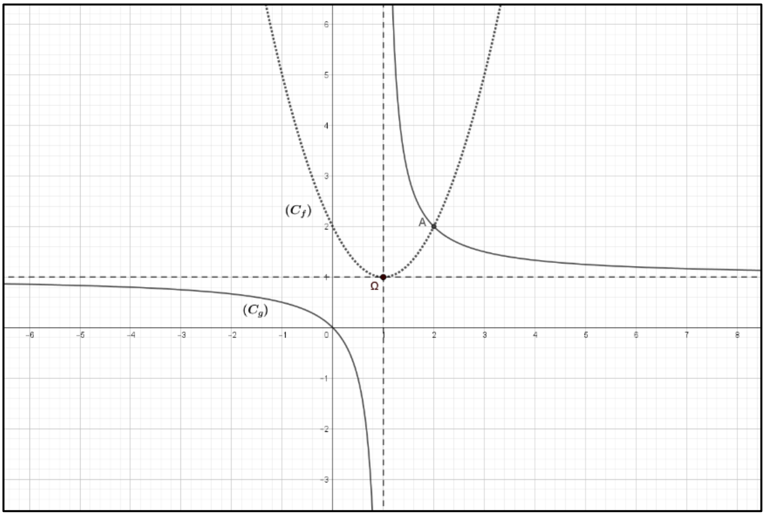
3. أ. التحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ لدينا: $g(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$

$$1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1} = g(x)$$

ب. كتابة معادلة المنحنى (C_g) في المعلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\Omega(1;1)$.

$$\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y+1 \end{cases}; y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow Y+1 = \frac{X+1}{X+1-1} \Rightarrow Y = \frac{X+1}{X} - 1 = \boxed{\frac{1}{X}}$$

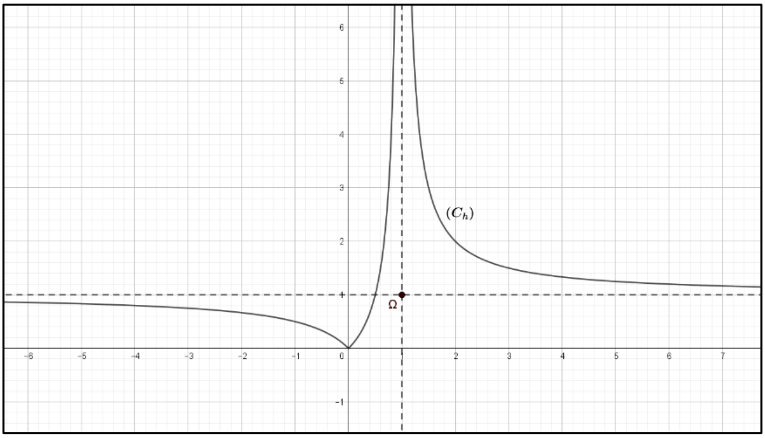
ج. رسم المنحنى (C_g).



4. رسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة $h(x) = |g(x)|$ انطلاقا من المنحنى (C_g)

$$h(x) = |g(x)| = \begin{cases} -g(x), & g(x) < 0 \\ g(x), & g(x) \geq 0 \end{cases}$$

- من أجل $x \in]0;1[$: $g(x) < 0$، أي $h(x) = -g(x)$، ومنه يكون (C_h) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل.
- من أجل $x \in]-\infty;0] \cup]1;+\infty[$: $g(x) \geq 0$، أي $h(x) = g(x)$، ومنه ينطبق (C_h) على (C_g).



5. **تعيين بيانيا حلول المعادلة $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$.**

يتقاطع المنحنيان (C_f) و(C_g) عند النقطة A ذات الفاصلة 2، منه نستنتج أنّ حل المعادلة $f(x) = g(x)$ هو $x = 2$.

6. $\boldsymbol{(E): x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0}$

أ. **بيان أنّ المعادلة $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ تكافئ $\boldsymbol{(E)}$**

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = \frac{x}{x-1} \Rightarrow (x^2 - 2x + 2)(x - 1) = x$$
$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + 2x - x^2 + 2x - 2 - x = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0}$$

ب. **تعيين الأعداد الحقيقية $\boldsymbol{c, b, a}$ حيث:**

$$\boldsymbol{x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)}$$

	1	−3	3	−2
2				
	1	−1	1	0

$$\boxed{x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x - 2)(x^2 - x + 1)}$$

ج. **استنتاج حلول المعادلة $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$.**

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^2 - x + 1) = 0$$

$x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$x^2 - x + 1 = 0\ ;\ \Delta = -3 \Rightarrow$ المعادلة لا تقبل حلولا

منه نستنتج أنّ المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل حلا وحيدا $(x = 2)$.

* * *

التمرين الثاني :

1. **حل في المجموعة $\boldsymbol{\mathbb{R}}$ المعادلة $\boldsymbol{3x^2 - 5x - 2 = 0}$**

$$\Delta = 25 + 24 = 49\ ; x_1 = -\frac{1}{3} ; x_2 = 2 \Rightarrow \boxed{S = \left\{-\frac{1}{3} ; 2\right\}}$$

2. $\boldsymbol{P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}$

أ. **التحقق أنّ $\boldsymbol{x_0 = 2}$ جذر لكثير الحدود $\boldsymbol{P(x)}$**

$$P(2) = 3(2)^3 - 11(2)^2 + 8(2) + 4 = 44 - 44 = \boxed{0}$$

ب. **استنتاج تحليل لـ $\boldsymbol{P(x)}$**

$$P(2) = 0 \Rightarrow P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

① **باستعمال المطابقة:**

$$P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$
$$= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b - 2a = -11 \\ c - 2b = 8 \\ -2c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(x) = (x-2)(3x^2 - 5x - 2)}$$

② باستعمال خوارزمية هورنر:

	3	-11	8	4
2				
	$\underbrace{3}_{a}$	$\underbrace{-5}_{b}$	$\underbrace{-2}_{c}$	0

$$\boxed{P(x) = (x-2)(3x^2 - 5x - 2)}$$

3. حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(3x^2 - 5x - 2) = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0$ أو $3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{S = \left\{-\frac{1}{3}; 2\right\}}$

استنتاج حلول المتراجحة $P(x) \leq 0$

طريقة ① :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x^2-5x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$$P(x) \leq 0 \Rightarrow \boxed{S = \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \{2\}}$$

طريقة ② :

بما أنّ العدد 2 حل مضاعف للمعادلة $P(x) = 0$ فيمكن كتابة $P(x)$ على الشكل:

$$P(x) = (x-2)^2(3x+1)$$

$P(x) \leq 0 \Rightarrow 3x + 1 \leq 0$ أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{3}$ أو $x = 2$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \{2\}}$$

4. كتابة عبارة $P(y^2)$ واستنتاج حلول المعادلة $y^2 = \frac{11y^4 - 4}{3y^4 + 8}$

$$P(y^2)=3(y^2)^3-11(y^2)^2+8(y^2)+4=3y^6-11y^4+8y^2+4$$

$$y^2=\frac{11y^4-4}{3y^4+8}\Rightarrow 3y^6+8y^2=11y^4-4\Rightarrow 3y^6-11y^4+8y^2+4=0$$

$$\Rightarrow P(y^2)=0\xrightarrow[\text{حسب السؤال 3}]{}y^2=2\Rightarrow\boxed{y\in\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}}$$

ملاحظة: الحل $-\frac{1}{3}$ مرفوض لأنّ $y^2\geq 0$.

التمرين الثالث :

$A(-2;1)$ ، $B(1;4)$ ، $C(1;-2)$ ، $D(4;1)$ ، $G\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$

1. **تعليم النقط A, B, C و D**
2. **تعيين إحداثيتي النقطة G**

$$G\{(A,1);(B,1);(C,1)\}\Rightarrow G\left(\frac{-2+1+1}{3};\frac{1+4-2}{3}\right)\Rightarrow\boxed{G(0;1)}$$

3. **بيان أنّ $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$**

$$-\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}}$$

$$-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Rightarrow\boxed{D\{(A,-1);(B,1);(C,1)\}}$$

4. **بيان أنّ النقط A ، G و D في استقامية**

$$①G\{(A,1);(B,1);(C,1)\}\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{GA}\underbrace{-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{\overrightarrow{GD}}=\vec{0}\Rightarrow 2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GD}=-2\overrightarrow{GA}$$

$$\Rightarrow\boxed{\text{النقط } A \text{ ، } G \text{ و } D \text{ في استقامية}}$$

$$②y_A=y_D=y_G=1\Rightarrow\{A,D,G\}\in(\Delta):y=1\Rightarrow\boxed{\text{النقط } A \text{ ، } G \text{ و } D \text{ في استقامية}}$$

5. **تعيين وإنشاء المجموعتين (E_1) و (E_2)**

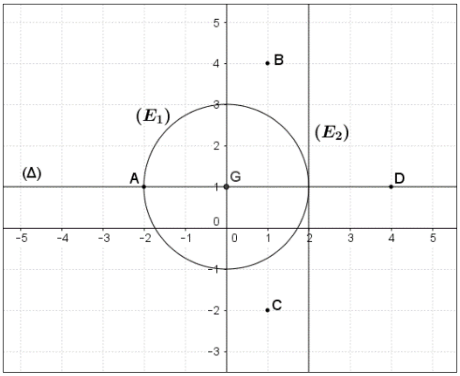
$$M\in(E_1)\Rightarrow\left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}}\right\|=6\Rightarrow 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=6\Rightarrow\boxed{\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=2}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E_1) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 2.

$$M\in(E_2)\Rightarrow\left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{\overrightarrow{MG}}\right\|=3\left\|\underbrace{-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{\overrightarrow{MD}}\right\|$$

$$\Rightarrow 3\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MD}\right\|\Rightarrow\boxed{\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{MD}\right\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E_2) هي محور القطعة $[GD]$.



* * *

التمرين الرابع :

س1 / س2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1. **تعيين عدد عناصر المجموعة الشاملة Ω**
لدينا 6 خيارات في السحب الأول و6 خيارات في السحب الثاني، فيكون عدد عناصر المجموعة Ω هو: $6 \times 6 = 36$
2. **ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لقريصتين مجموع رقميهما**
   - **أ. اكمال الجدول**

ب. استنتاج قيم المتغير العشوائي X

$X \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

ج. تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي X و حساب أمله الرياضياتي.

$$P(X=2)=\frac{1}{36}\ ;\ P(X=3)=\frac{2}{36}\ ;\ P(X=4)=\frac{3}{36}\ ;\ P(X=5)=\frac{4}{36}$$

$$P(X=6)=\frac{5}{36}\ ;\ P(X=7)=\frac{6}{36}\ ;\ P(X=8)=\frac{5}{36}\ ;\ P(X=9)=\frac{4}{36}$$

$$P(X=10)=\frac{3}{36}\ ;\ P(X=11)=\frac{2}{36}\ ;\ P(X=12)=\frac{1}{36}$$

X_i	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X)=\frac{1+4+9+16+25+36+40+36+30+22+12}{36}=\boxed{\frac{77}{12}}$$

* * *

الموضوع السادس

التمرين الأول :

I- $f(x)=\frac{-x}{1-x}$

1. تعيين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

$$D_f=\{x;1-x\neq 0\}\Rightarrow \boxed{D_f=\mathbb{R}-\{1\}}$$

2. بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$: $f(2-x)+f(x)=2$

$$f(2-x)+f(x)=\frac{-(2-x)}{1-(2-x)}+\frac{-x}{1-x}=\frac{-(2-x)}{-(1-x)}+\frac{-x}{1-x}=\frac{2-2x}{1-x}$$
$$=\frac{2(1-x)}{1-x}=\boxed{2}$$

استنتاج أنّ الدالة f فردية في المعلم $(A;\vec{i};\vec{j})$ حيث A نقطة يُطلب تعيينها.

$f(2-x)+f(x)=2$، يعني أنّ النقطة $A(1;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)،

ومنه نستنتج أنّ الدالة f فردية في المعلم $(A;\vec{i};\vec{j})$.

3. بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$: $f(1-x)=\frac{1}{f(x)}$

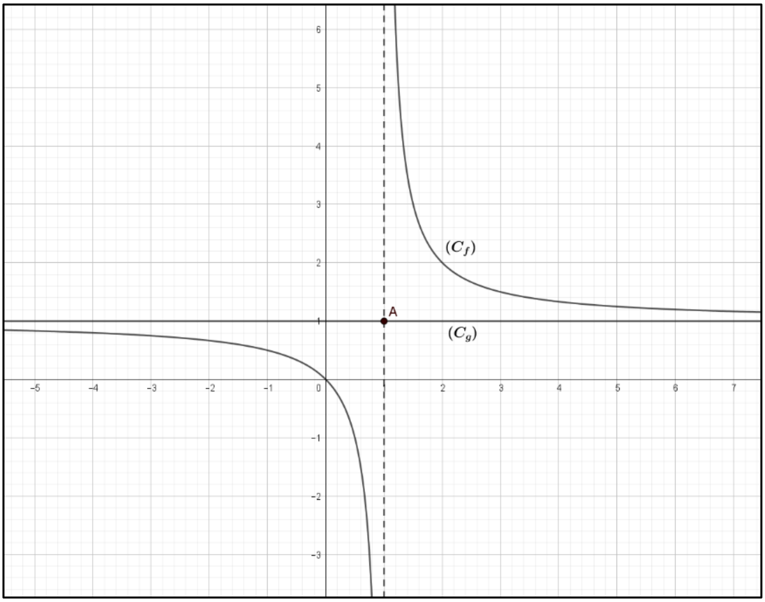
$$f(1-x)=\frac{-(1-x)}{1-(1-x)}=\frac{-(1-x)}{-(-x)}=\frac{1-x}{-x}=\boxed{\frac{1}{f(x)}}$$

II- $g(x)=f(1-x).f(x)$

1. بيان أنّ: $g(2020)=g(2019)=g(2)=g(x)$

$$g(x)=f(1-x).f(x)=\frac{1}{f(x)}.f(x)=1\Rightarrow \boxed{\text{الدالة } g \text{ ثابتة}}$$

2. رسم المنحنيين (C_f) و$\left(C_g\right)$ في المعلم $(A;\vec{i};\vec{j})$.



* * *

التمرين الثاني :

$$x^2 + mx + m + 3 = 0 \ ... ①$$

1. **بيان أنّ $\Delta = (m-6)(m+2)$ ودراسة إشارته**

$\Delta = m^2 - 4(m+3) = m^2 - 4m - 12\ ; \Delta_m = 16 + 48 = 64\ ;$

$m_1 = 6\ ; m_2 = -2\ ;$ $\boxed{\Delta = (m-6)(m+2)}$

- $m \in]-\infty; -2[\cup]6; +\infty[\ : \Delta > 0$
- $m \in]-2; 6[\ : \Delta < 0$
- $m \in \{-2; 6\} : \Delta = 0$

2. **تعيين قيم m التي تقبل من أجلها المعادلة ① حلين مختلفين في الإشارة**

$$x_1 . x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow m + 3 < 0 \Rightarrow m < -3 \Rightarrow \boxed{m \in]-\infty; -3[}$$

3. **تعيين قيم m التي تقبل من أجلها المعادلة ① حلين سالبين تماما**

$$\begin{cases} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-6)(m+2) > 0 \\ m + 3 > 0 \\ -m < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \in]-\infty; -2[\cup]6; +\infty[\\ m \in]-3; +\infty[\\ m \in]0; +\infty[\end{cases} \Rightarrow \boxed{m \in]6; +\infty[}$$

* * *

التمرين الثالث :

$\boldsymbol{G\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,6)\}}$

1. **إنشاء I مرجح الجملة $\{(A,1);(C,3)\}$ و J مرجح الجملة $\{(B,2);(D,6)\}$**

$$I\{(A,1);(C,3)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}}\ ;J\{(B,2);(D,6)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}}$$

2. **بيان أنّ النقطة G هي مرجح النقطتين I و J وإنشائها**

$$G\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,6)\} \Rightarrow G\{(A,1);(C,3);(B,2);(D,6)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{G\{(I,4);(J,8)\}} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{IG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}}$$

3. **تعيين وإنشاء المجموعة (E)**

$$M\in(E) \Rightarrow \left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}+6\overrightarrow{MD}}_{12\overrightarrow{MG}}\right\| = 6\left\|\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}}_{2\overrightarrow{MO}}\right\|$$

$$\Rightarrow 12\|\overrightarrow{MG}\| = 12\|\overrightarrow{MO}\| \Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{MO}\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E) هي محور القطعة $[OG]$.

4. **المستوي منسوب إلى المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$**

أ. حساب إحداثيي النقطة G في هذا المعلم

$$G\{(A,1);(B,2);(C,3);(D,6)\} \Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{12}\overrightarrow{AC}+\frac{6}{12}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \boxed{G\left(\frac{5}{12};\frac{3}{4}\right)}$$

ب. حساب إحداثيي النقطة G' مرجح الجملة $\{(A,3);(B,6);(C,1);(D,2)\}$

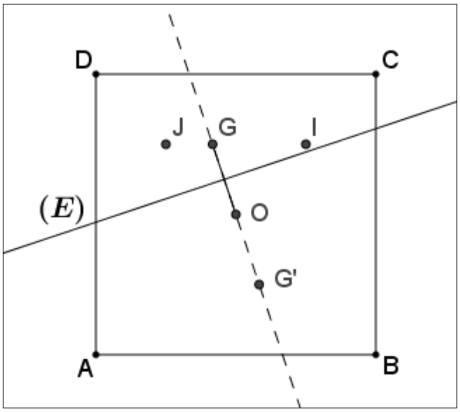
$$G'\{(A,3);(B,6);(C,1);(D,2)\} \Rightarrow \overrightarrow{AG'}=\frac{6}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{12}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}=\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \boxed{G'\left(\frac{7}{12};\frac{1}{4}\right)}$$

ج. استنتج أنّ النقط O ، G و G' في استقامية

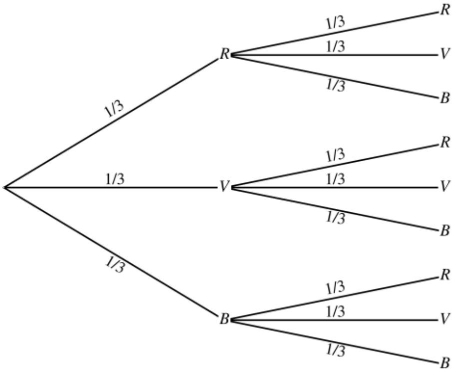
$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \boxed{O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

$\overrightarrow{OG}\left(-\frac{1}{12};\frac{1}{4}\right)\ ;\ \overrightarrow{OG'}\left(\frac{1}{12};-\frac{1}{4}\right)\ ;\ \overrightarrow{OG}=-\overrightarrow{OG'} \Rightarrow$ النقط O ، G و G' في استقامية



* * *

التمرين الرابع :



1. **تعيين مجموعة الإمكانيات Ω**

$$\Omega = \{RR; VV; BB; RV; VR; RB; BR; VB; BV\}$$

2. **نفرض سحب كرة حمراء يعطي ربح نقطة وسحب كرة خضراء يعطي ربح نقطتين وسحب كرة زرقاء يعطي خسارة ثلاث نقاط**

أ. تعيين قيم المتغير العشوائي لهذه التجربة

$$\Omega = \left\{\underbrace{RR}_{2}; \underbrace{VV}_{4}; \underbrace{BB}_{-6}; \underbrace{RV; VR}_{3}; \underbrace{RB; BR}_{-2}; \underbrace{VB; BV}_{-1}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{X \in \{-1; -2; -6; 2; 3; 4\}}$$

ب. حساب احتمال أن يخسر اللاعب

$$P(X < 0) = P(X = -1) + P(X = -2) + P(X = -6) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

* * *

الموضوع السابع

التمرين الأول :

$f(x) = -2 + \sqrt{x-1}$ ، $D_f = [1; +\infty[$.

1. **التحقق أنّ الدالة f هي مركب دالتين u و v يُطلب تعيينهما.**

$$x \xrightarrow{u(x)=\sqrt{x-1}} \sqrt{x-1} \xrightarrow{v(x)=-2+x} -2+\sqrt{x-1} \Rightarrow \boxed{f(x) = vou(x)}$$

2. **استنتاج اتجاه تغير الدالة f اعتمادا على اتجاه تغير الدالتين u و v.**

من أجل $x \in [1; +\infty[$، $u(x) \in [0; +\infty[$.

لدينا u متزايدة على المجال $[1; +\infty[$ و v متزايدة على المجال $[0; +\infty[$،

منه نستنتج أنّ f متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

3. **حل المعادلة: $f(x) = 0$ في المجال $[1; +\infty[$.**

$$f(x) = 0 \Rightarrow -2 + \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x - 1 = 2^2 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

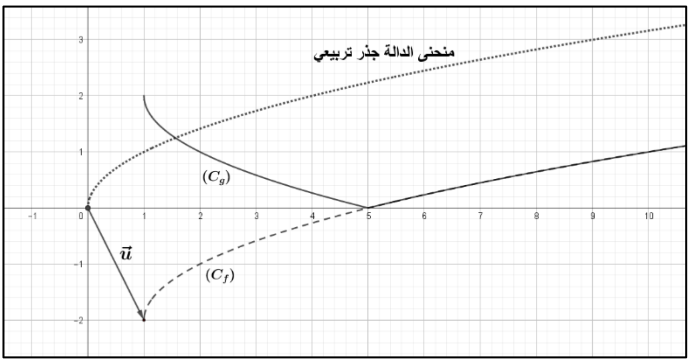
4. **شرح كيف يمكن رسم المنحنى (C_f) انطلاقا من التمثيل البياني للدالة جذر تربيعي**

بما أنّ $f(x) = -2 + \sqrt{x-1}$، فإنّ المنحنى (C_f) صورة التمثيل البياني للدالة جذر تربيعي بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1; -2)$.

5. **استنتاج رسم المنحنى (C_g) انطلاقا من (C_f) مع الشرح.**

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \\ f(x), & f(x) \geq 0 \end{cases}$$

- من أجل $x \in]-1; 5[$: $f(x) < 0$، أي $g(x) = -f(x)$، ومنه يكون (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.
- من أجل $x \in [5; +\infty[$: $f(x) \geq 0$، أي $g(x) = f(x)$، ومنه ينطبق (C_g) على (C_f).



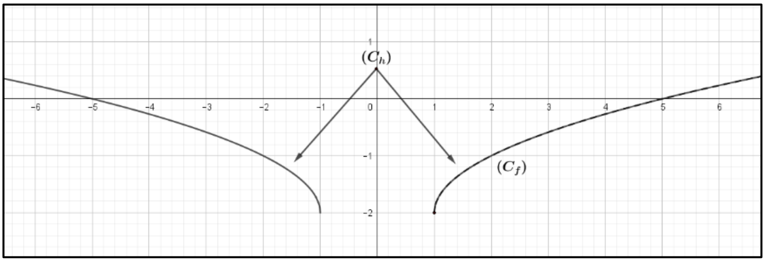
6. $\boldsymbol{h(x) = -2 + \sqrt{|x| - 1}}$ ، $\boldsymbol{D_h =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[}$

شرح كيفية رسم المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f).

الدالة h زوجية لأنّ D_h متناظر بالنسبة إلى الصفر ومن أجل كل $x \in D_h$:

$$h(-x) = -2 + \sqrt{|-x| - 1} = -2 + \sqrt{|x| - 1} = h(x)$$

- من أجل $x \in [1; +\infty[$: $|x| = x$، أي $h(x) = f(x)$، ومنه ينطبق (C_h) على (C_f).
- من أجل $x \in]-\infty; -1]$: نرسم (C_h) بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.



* * *

التمرين الثاني :

I- بيان أنّ المساواة التالية صحيحة: $\boldsymbol{5 + 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2}$

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\right) = \boxed{5 + 2\sqrt{6}}$$

II- $\boldsymbol{A_m(x) = x^2 + \left(-\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)mx - \sqrt{6}m^2}$

1. دراسة مميز المعادلة $\boldsymbol{A_m(x) = 0}$ بدلالة $\boldsymbol{m}$

$$\Delta = \left(-\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 m^2 + 4\sqrt{6}m^2 = \left(5 - 2\sqrt{6}\right)m^2 + 4\sqrt{6}m^2$$

$$\Delta = \left(5 + 2\sqrt{6}\right)m^2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 m^2 = \boxed{\left[\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)m\right]^2}$$

2. دراسة حسب قيم $\boldsymbol{m}$ عدد حلول المعادلة $\boldsymbol{A_m(x) = 0}$

من أجل $m = 0$: تقبل المعادلة $A_m(x) = 0$ حلا مضاعفا

من أجل $m \neq 0$: تقبل المعادلة $A_m(x) = 0$ حلين متمايزين

3. البحث عن قيم $\boldsymbol{m}$ التي تقبل من أجلها المعادلة $\boldsymbol{A_m(x) = 0}$ حلين سالبين تماما

بما أنّ $\frac{c}{a} = -\sqrt{6}m^2$ فإنّ $P < 0$ ومنه لا توجد قيم m التي تقبل من أجلها المعادلة $A_m(x) = 0$ حلين سالبين تماما.

4. تعيين حلول المتراجحة $\boldsymbol{A_m(x) \leq 0}$

$$m = 0 : \Delta = 0 ; x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{S = \{0\}}$$

$$m \neq 0 : \Delta > 0 ; x_1 = \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)m-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)m}{2} = -\sqrt{3}\, m$$

$$x_2 = \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)m+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)m}{2} = \sqrt{2}\, m$$

$$m < 0 : \boxed{S = \left[\sqrt{2}\, m ; -\sqrt{3}\, m\right]} \; ; \; m > 0 : \boxed{S = \left[-\sqrt{3}\, m ; \sqrt{2}\, m\right]}$$

* * *

التمرين الثالث :

$\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

1. **تمثيل النقط I ، J و K**
2. **بيان أنّ النقطة I هي مرجح النقطتين B و C بمعاملين يُطلب تعيينهما**

$$\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{IC} \Rightarrow -\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{I\{(B,-1);(C,2)\}}$$

3. **بيان أنّ كلا من النقطتين J و K هما مرجحين لرأسين للمثلث ABC**

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AJ} + \frac{2}{5}\overrightarrow{JC} \Rightarrow \frac{3}{5}\overrightarrow{JA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow \frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{J\{(A,3);(C,2)\}}$$

$$\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AK} - \frac{1}{2}\overrightarrow{KB} \Rightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{KA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{KB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB}\right) = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{K\{(A,3);(B,-1)\}}$$

4. **بيان أنّ المستقيمات (AI) ، (BJ) و (CK) تتقاطع في نقطة واحدة**

$$\left\{\begin{array}{l} G\{(A,3);(B,-1);(C,2)\} \\ \quad I\{(B,-1);(C,2)\} \end{array}\right. \Rightarrow G\{(A,3);(I,1)\} \Rightarrow \boxed{G \in (AI)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} G\{(A,3);(B,-1);(C,2)\} \\ \quad J\{(A,3);(C,2)\} \end{array}\right. \Rightarrow G\{(B,-1);(J,5)\} \Rightarrow \boxed{G \in (BJ)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} G\{(A,3);(B,-1);(C,2)\} \\ \quad K\{(A,3);(B,-1)\} \end{array}\right. \Rightarrow G\{(K,2);(C,2)\} \Rightarrow \boxed{G \in (CK)}$$

منه نستنتج أنّ المستقيمات (AI) ، (BJ) و (CK) تتقاطع في النقطة G.

5. **تعيين وإنشاء المجموعة (Δ)**

$$M \in (\Delta) \Rightarrow \left\| \underbrace{3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}}_{2\overrightarrow{MK}} \right\| = 2\left\| \underbrace{-\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}}_{\overrightarrow{MI}} \right\| \Rightarrow 2\left\|\overrightarrow{MK}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MI}\right\|$$

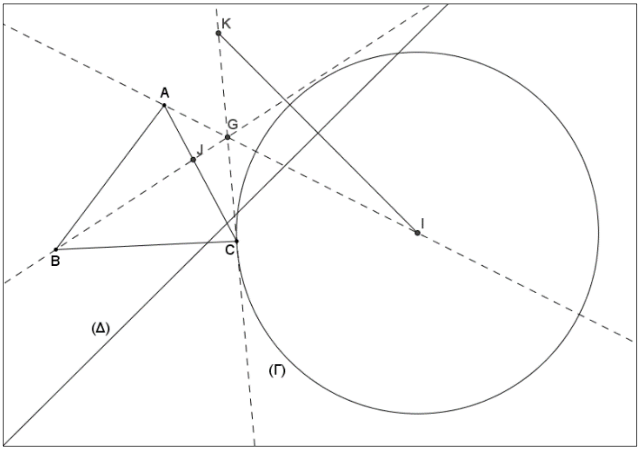
$$\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MK}\right\| = \left\|\overrightarrow{MI}\right\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Δ) هي محور القطعة $[IK]$.

6. تعيين وإنشاء المجموعة (Γ)

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow \left\| \underbrace{-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}}_{\overrightarrow{MI}} \right\| = \left\| \underbrace{\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}}_{\text{مستقل عن } M} \right\| \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MI}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها I وطول نصف قطرها BC.



* * *

التمرين الرابع :

1. مناقشة وجود النقطة G وتعيين إحداثييها

$$1+\beta+\delta \neq 0 \Rightarrow \boxed{\beta+\delta \neq -1}\ ;\ \boxed{G\left(\frac{\beta-\delta}{1+\beta+\delta};\frac{1}{1+\beta+\delta}\right)}$$

2. نرمي زهرة نرد مرتين وجوهها مرقّمة كما يلي : 3- ، 2- ، 1- ، 1 ، 2 ، 3. نسمي β العدد المحصّل عليه في الرمية الأولى ، و δ العدد المحصّل عليه في الرمية الثانية

أ. حساب الاحتمال حتى يكون مرجح الجملة (1) نقطة ترتيبها 1

$$y_G = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+\beta+\delta} = 1 \Rightarrow \beta+\delta = 0$$

$$P(A) = P(\beta+\delta=0) = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

δ \ β	-3	-2	-1	1	2	3
-3	-6	-5	-4	-2	-1	0
-2	-5	-4	-3	-1	0	1
-1	-4	-3	-2	0	1	2
1	-2	-1	0	2	3	4
2	-1	0	1	3	4	5
3	0	1	2	4	5	6

ب. حساب الاحتمال حتى يكون مرجح الجملة (1) نقطة فاصلتها 0

$x_G = 0 \Rightarrow \beta - \delta = 0 \Rightarrow \beta = \delta$

$P(B) = P(\beta = \delta) = \dfrac{6}{36} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$

β δ	-3	-2	-1	1	2	3
-3	▨					
-2		▨				
-1			▨			
1				▨		
2					▨	
3						▨

ج. حساب الاحتمال حتى يكون مرجح الجملة (1) ينتمي إلى المنصّف الأول

$x_G = y_G \Rightarrow \beta - \delta = 1$

$P(C) = P(\beta - \delta = 1) = \dfrac{4}{36} = \boxed{\dfrac{1}{9}}$

β δ	-3	-2	-1	1	2	3
-3	0	1	2	4	5	6
-2	-1	0	1	3	4	5
-1	-2	-1	0	2	3	4
1	-4	-3	-2	0	1	2
2	-5	-4	-3	-1	0	1
3	-6	-5	-4	-2	-1	0

* * *

الموضوع الثامن

التمرين الأول :

I- الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1. تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلين α و β على المجال $[-3;5]$. صحيح

تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلين α و β حيث $\underbrace{\alpha\in[-1;1]}_{f(-1)>0 \text{ و } f(1)<0}$ و $\underbrace{\beta\in[1;5]}_{f(1)<0 \text{ و } f(5)>0}$.

x	-3		-1		α		1		β		5
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0		$+$		
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	2	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	3

2. $f(0)<f(1)$. خطأ

لدينا: $1>0$ والدالة f متناقصة على المجال $[0;1]$، منه $f(0)>f(1)$

3. من أجل كل x من المجال $[-3;5]$: $f(x)>0$. خطأ

من أجل $x\in[\alpha;\beta]$: $f(x)\leq 0$.

II- $g(x)=|f(x)|$ ، $D_g=[-3;5]$.

1. تحديد إشارة الدالة f على المجال $[-3;5]$.

من أجل $x\in[\alpha;\beta]$: $f(x)\leq 0$، ومن أجل $x\in]-3;\alpha[\cup]\beta;5[$: $f(x)>0$.

2. اعطاء جدول تغيرات الدالة g على المجال $[-3;5]$.

x	-3		-1		α		1		β		5
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	2	↘	0	↗	1	↘	0	↗	3

III- $h(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-3$ ، $D_h=\mathbb{R}$

1. المماس للمنحنى (C_h) عند النقطة ذات الفاصلة 4 يمر بالنقطة $A(-3;5)$.

معادلة المماس للمنحنى (C_h) عند النقطة ذات الفاصلة 4 هي:

$$y=h'(4)(x-4)+h(4)$$

$$h'(x)=x-2\Rightarrow h'(4)=2\Rightarrow y=2(x-4)-3=2x-11$$

بتعويض x بـ (-3) نجد $y=-17$، ومنه نستنتج أنّ العبارة (1) خاطئة.

2. **توجد نقطة وحيدة من المنحنى (C_h) يكون معامل توجيه المماس عندها يساوي 1.**

$$h'(x) = 1 \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

منه نستنتج أنّ العبارة (2) صحيحة.

* * *

التمرين الثاني:

$$\boldsymbol{P(x) = x^3 + (\sqrt{2} - 1)x^2 + (2 - \sqrt{2})x + 2\sqrt{2}}$$

1. **حساب $\boldsymbol{P\left(-\sqrt{2}\right)}$**

$$P\left(-\sqrt{2}\right) = \left(-\sqrt{2}\right)^3 + \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{2}$$
$$= -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} = \boxed{0}$$

2. **تعيين العددين الحقيقين $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ حيث: $\boldsymbol{P(x) = \left(x + \sqrt{2}\right)(x^2 + \alpha x + \beta)}$**

① باستعمال المطابقة:

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x + \sqrt{2}\right)(x^2 + \alpha x + \beta) \\ &= x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}\alpha x + \sqrt{2}\beta \\ &= x^3 + \left(\alpha + \sqrt{2}\right)x^2 + \left(\sqrt{2}\alpha + \beta\right)x + \sqrt{2}\beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2}\alpha + \beta = 2 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\beta = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}}$$

② باستعمال خوارزمية هورنر:

	1	$\sqrt{2} - 1$	$2 - \sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$				
	1	-1	2	0

$$P(x) = \left(x + \sqrt{2}\right)(x^2 - x + 2)$$

3. **تعيين حسب قيم $\boldsymbol{x}$ إشارة $\boldsymbol{P(x)}$**

$$x^2 - x + 2 = 0\ ;\ \Delta = -7 \Rightarrow x^2 - x + 2 > 0$$

منه نستنتج أنّ إشارة $P(x)$ من إشارة $\left(x + \sqrt{2}\right)$

$$x \in \left]-\infty; -\sqrt{2}\right[: P(x) < 0\ ;\ x \in \left[-\sqrt{2}; +\infty\right[: P(x) \geq 0$$

4. **حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $xP(x) < 0$**

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x.P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{S = \left]-\sqrt{2}; 0\right[}$$

* * *

التمرين الثالث:

$.BC = 6cm, AC = 10cm, AB = 8cm$

1. **إنشاء المثلث ABC والنقطة G مرجح الجملة $\{(A,1); (B,2); (C,1)\}$**
2. **تعيين وإنشاء المجموعة (E_1)**

$$M \in (E_1) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = AC \Rightarrow 4\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 10 \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \frac{5}{2}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E_1) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\frac{5}{2}$.

3. **تعيين وإنشاء المجموعة (E_2)**

لتكن النقطة D المعرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ ، أي إنّ الرباعي $ABCD$ مستطيل، وبالتالي فإنّ القطرين $[AC]$ و $[BD]$متقايسان ومنه $BD = AC = 10$.

$$M \in (E_2) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right\| \Rightarrow 4\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{BD}\right\|$$

$$\Rightarrow 4\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 10 \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{(E_2) = (E_1)}$$

4. **تعيين وإنشاء المجموعة (E_3)**

لتكن النقطة G' مرجح الجملة $\{(A,1); (C,3)\}$.

$$M \in (E_3) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC}\right\| \Rightarrow 4\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 4\left\|\overrightarrow{MG'}\right\|$$

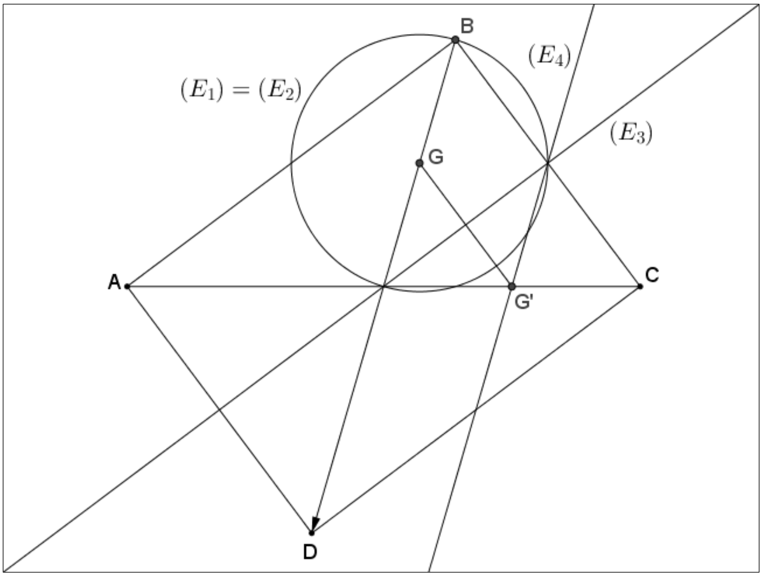
$$\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MG}\right\| \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MG'}\right\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E_3) هي محور القطعة $[GG']$.

5. **تعيين وإنشاء المجموعة (E_4)**

$$M \in (E_4) \Rightarrow \left(3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) \parallel \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) \Rightarrow 4\overrightarrow{MG'} \parallel \overrightarrow{BD} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MG'} \parallel \overrightarrow{BD}}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (E_4) هي المستقيم الذي يشمل النقطة G' ويوازي $\overrightarrow{BD}$.



* * *

التمرين الرابع:

1. **تعيين كل الإحداثيات الممكنة للنقطة M**

$$(x;y)\in\{(0;0);(0;1);(1;0);(0;2);(2;0);(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$$

2. **حساب احتمال الحوادث A , B , C:**

$$P(A)=P(0;0)+P(1;0)+P(2;0)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

$$P(B)=P(0;0)=\boxed{\frac{1}{9}}$$

$$P(C)=P(0;1)+P(1;0)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\boxed{\frac{2}{9}}\ ;(M\in(\mathcal{C})\Rightarrow x^2+y^2=1)$$

3. **ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب العدد x^2+y^2**

أ. **تعيين قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X**

$$(x;y)\in\{(0;0);(0;1);(1;0);(0;2);(2;0);(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{X\in\{0;1;2;4;5;8\}}$$

$$P(X=0)=P(0;0)=\boxed{\frac{1}{9}}\ ;\ P(X=1)=P(0;1)+P(1;0)=\boxed{\frac{2}{9}}$$

$$P(X=2)=P(1;1)=\boxed{\frac{1}{9}}\ ;\ P(X=4)=P(0;2)+P(2;0)=\boxed{\frac{2}{9}}$$

$$P(X=5)=P(1;2)+P(2;1)=\boxed{\frac{2}{9}}\ ;\ P(X=8)=P(2;2)=\boxed{\frac{1}{9}}$$

X_i	0	1	2	4	5	8
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

ب. حساب الأمل الرياضياتي للمتغيّر العشوائي *X*

$$E(X)=\sum X_i.P_i=1\left(\frac{2}{9}\right)+2\left(\frac{1}{9}\right)+4\left(\frac{2}{9}\right)+5\left(\frac{2}{9}\right)+8\left(\frac{1}{9}\right)=\boxed{\frac{10}{3}}$$

* * *

الموضوع التاسع

التمرين الأول :

1. تعيين إشارة الدالة u.

من أجل $x \in [-2;0] \cup [2;3]$: $u(x) \geq 0$، ومن أجل $x \in]0;2[$: $u(x) < 0$.

2. $\boldsymbol{k = \sqrt{u}\,, h = \frac{1}{u}\,, g = u^3\,, f = u^2}$

أ. تعيين مجموعة تعريف لكل دالة من الدوال k, h, g, f.

$$D_f = D_g = \{x; x \in D_u\} = [-2;3]$$

$$D_h = \{x; x \in D_u \text{ و } u(x) \neq 0\} = [-2;0[\cup]0;2[\cup]2;3]$$

$$D_k = \{x; x \in D_u \text{ و } u(x) \geq 0\} = [-2;0] \cup [2;3]$$

ب. التعبير عن $k'(x), h'(x), g'(x), f'(x)$ بدلالة $u(x)$ و $u'(x)$.

$$f'(x) = 2u(x).u'(x)\ ;\ g'(x) = 3u^2(x).u'(x)\ ;\ h'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

$$k'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

ج. استنتاج جدول تغيرات لكل دالة من الدوال k, h, g, f.

بما أنّ $f'(x) = 2u(x).u'(x)$، فإنّ إشارة f' من إشارة u و u'.

$f(-2) = 2^2 = 4\,; f(-1) = 3^2 = 9\,; f(1) = (-1)^2 = 1$

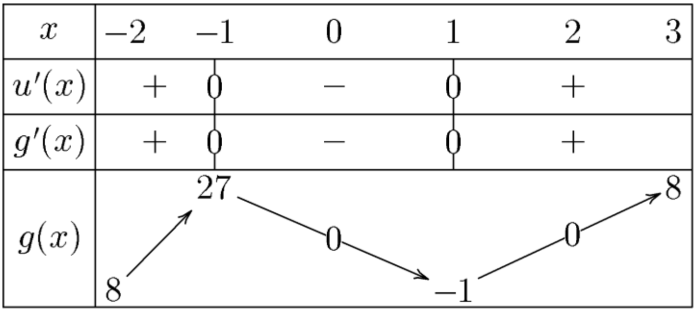
$f(3) = 2^2 = 4\,; f(0) = f(2) = 0.$

x	-2		-1		0		1		2		3
$u'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$u(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↗	9	↘	0	↗	1	↘	0	↗	4

بما أنّ $g'(x) = 3u^2(x).u'(x)$، فإنّ إشارة g' من إشارة u'.

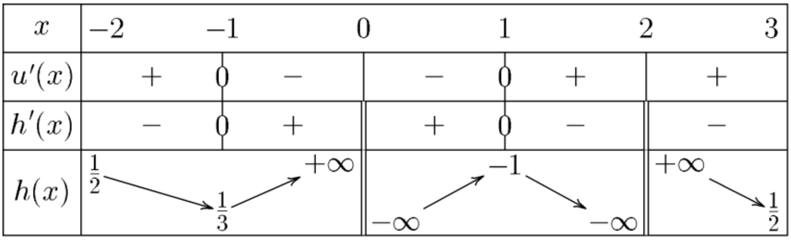
$g(-2) = 2^3 = 8\,; g(-1) = 3^3 = 27\,; g(1) = (-1)^3 = -1$

$g(3) = 2^3 = 8\,; g(0) = g(2) = 0.$



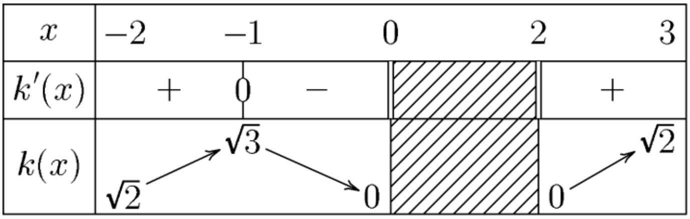
بما أنّ $h'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$، فإنّ إشارة h' عكس إشارة u'.

$$h(-2) = \frac{1}{2}\ ; h(-1) = \frac{1}{3}\ ; h(1) = -1\ ; h(3) = \frac{1}{2}.$$



بما أنّ $k'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ ، فإنّ إشارة k' من إشارة u'.

$$k(-2) = \sqrt{2}\ ; k(-1) = \sqrt{3}\ ; k(3) = \sqrt{2}\ ; k(0) = k(2) = 0.$$



* * *

التمرين الثاني :

1. $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 42x - 40$

أ. حساب $P(-2)$ واستنتاج تحليل لـ $P(x)$

$P(-2) = 3(-2)^3 - 5(-2)^2 - 42(-2) - 40 = \boxed{0}$

$P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$

	3	-5	-42	-40
-2				
	3	-11	-20	0

$$\boxed{P(x)=(x+2)(3x^2-11x-20)}$$

ب. دراسة إشارة $P(x)$

$$3x^2-11x-20=0\ ;\ \Delta=121+240=361=19^2; x_1=-\frac{4}{3}\ ; x_2=5$$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3x^2-11x-20$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-\frac{4}{3};5\right[: P(x)<0$$

$$x\in\left[-2;-\frac{4}{3}\right]\cup\left[5;+\infty\right[: P(x)\geq 0$$

2. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\sqrt{x-1}-2x-1<0$

$$\sqrt{x-1}-2x-1<0\Rightarrow\sqrt{x-1}<2x+1\Rightarrow\begin{cases}x-1<(2x+1)^2\\ x-1\geq 0\\ 2x+1\geq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\underbrace{4x^2+3x+2}_{\Delta<0\ \text{و}\ a>0\Rightarrow x\in\mathbb{R}}>0\\ x-1\geq 0\\ 2x+1\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\geq 1\\ x\geq-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{S=[1;+\infty[}$$

3. $(E): x^2+mx+m=0$

تعيين قيم m التي من أجلها لا تقبل المعادلة (E) حلا في $\mathbb{R}$

$$\Delta=m^2-4m=m(m-4)$$

$$S=\emptyset\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow m(m-4)<0\Rightarrow\boxed{m\in]0;4[}$$

* * *

التمرين الثالث :

1. إنشاء المرجح F للجملة $\{(C,1);(D,3)\}$

$$F\{(C,1);(D,3)\}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{CF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}}$$

2. بيان أنّ M منتصف $[GD]$ هي مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,3)\}$

$$\begin{cases} M\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,3)\} \\ G\{(A,1);(B,1);(C,1)\} \end{cases} \Rightarrow M\{(G,3);(D,3)\} \Rightarrow \boxed{M \text{ منتصف } [GD]}$$

3. بيان أنّ النقطة M تنتمي إلى المستقيم (IF)

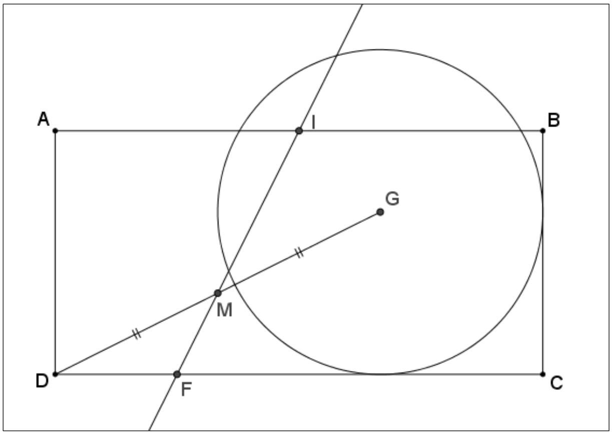
$$M\left\{\underbrace{(A,1);(B,1)}_{(I,2)};\underbrace{(C,1);(D,3)}_{(F,4)}\right\} \Rightarrow M\{(I,2);(F,4)\} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IF}$$

$$\Rightarrow \boxed{M \in (IF)}$$

4. تعيين مجموعة النقط N من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\| = 6$

$$\left\|\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\| = 6 \Rightarrow 3\left\|\overrightarrow{NG}\right\| = 6 \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{NG}\right\| = 2}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط N هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 2.



* * *

التمرين الرابع :

1. إنشاء المخطط

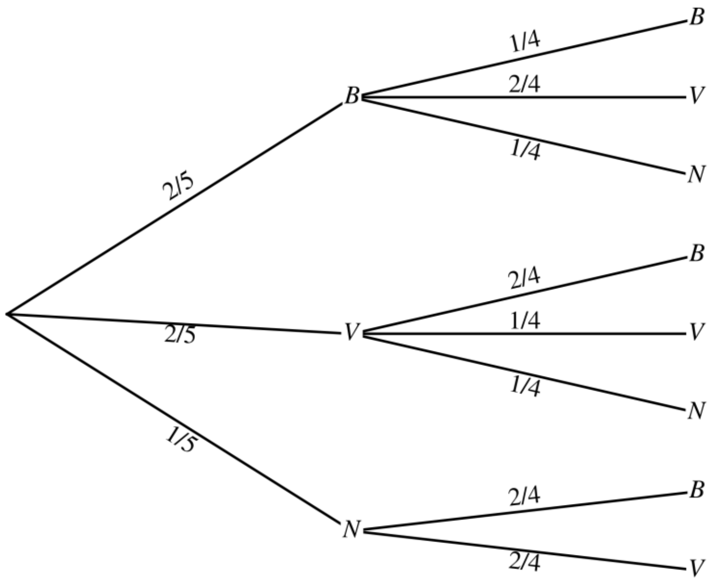
2. حساب احتمال الحوادث A , B , C:

$$P(A) = P(B;B) + P(V;V) = \left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$$P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$P(C) = P(V;V) + P(V;B) + P(V;N) = \left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\right)$$

$$P(C) = \boxed{\frac{2}{5}}$$



3. يربح اللاعب $2x$ عند سحب كرية سوداء و x عند سحب كرية بيضاء و $1-$ عند سحب كرية خضراء حيث x عدد طبيعي غير معدوم، وليكن Y المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء الربح المحصل عليه

أ. تعيين جميع القيم الممكنة للربح G بدلالة x

$$\Omega = \left\{\underbrace{BB}_{x^2}\,;\underbrace{BV;VB}_{-x}\,;\underbrace{BN;NB}_{2x^2}\,;\underbrace{VV}_{1}\,;\underbrace{VN;NV}_{-2x}\right\} \Rightarrow \boxed{G \in \{1;-x;-2x;x^2;2x^2\}}$$

ب. تعيين قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي Y

$$P(Y=1) = P(V;V) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

$$P(Y=x^2) = P(B;B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

$$P(Y=-x) = P(B;V) + P(V;B) = 2\left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{4}\right) = \boxed{\frac{2}{5}}$$

$$P(Y=-2x) = P(V;N) + P(N;V) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$$P(Y=2x^2) = P(B;N) + P(N;B) = \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{2}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{5}}$$

Y_i	1	$-x$	$-2x$	x^2	$2x^2$
$P(Y=Y_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

ج. تعيين قيم x حتى تكون اللعبة مربحة

$$E(Y)>0 \Rightarrow \frac{1}{10}-\frac{2x}{5}-\frac{2x}{5}+\frac{x^2}{10}+\frac{2x^2}{5}>0 \Rightarrow 5x^2-8x+1>0$$

$$\Rightarrow x>\frac{4+\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \boxed{x\geq 2}$$

* * *

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

.1

أ. جدول التغيرات الدالة f.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-5	↗ 0 ↗	2	↘ 0 ↘	-3	↗ 0 ↗	2

ب. حل المعادلة $f(x) = 0$ وتفسير النتيجة بيانيا.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-2; 0; 2\}$$

نستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل عند الفواصل $-2; 0; 2$.

ج. استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال I.

- $x \in [-3; -2[\cup]0; 2[: f(x) < 0$
- $x \in [-2; 0] \cup [2; 3]: f(x) \geq 0$

د. إثبات أنّ منحنى الدالة f يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل.

بما أنّ $f'(-1) = f'(1) = 0$، فإنّ منحنى الدالة f يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل أحدهما عند النقطة $(-1; 2)$ معادلته: $y = 2$ والآخر عند النقطة $(1; -3)$ معادلته: $y = -3$.

.2 $g(x) = [f(x)]^2$**.**

أ. كتابة $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.

$$g'(x) = 2f(x).f'(x)$$

ب. جدول تغيرات الدالة g.

x	-3		-2		-1		0		1		2		3
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	25	↘	0	↗	4	↘	0	↗	9	↘	0	↗	4

ج. تعيين القيم الحدّية المحلية للدالة g على I

تقبل الدالة g قيمة حدّية محلية صغرى تساوي 0 وقيمة حدّية محلية كبرى تساوي 25.

تعيين حصرا للدالة g على I.

$$\boxed{0 \leq g(x) \leq 25}$$

* * *

التمرين الثاني :

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$$

1. حساب $P(0)$

$P(0) = 1 \Rightarrow$ 0 ليس جذرا لـ $P(x)$

2. برهان أنّ المعادلة $P(x) = 0$ تكافئ المعادلة:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0 \ldots ①$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{2}{x} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 + 2x^2 + 1 + 2x^3 + 2x - 3x^2}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{P(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow \boxed{P(x) = 0}$$

3. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $u^2 + 2u = 3 \ldots ②$

$$u^2 + 2u = 3 \Rightarrow u^2 + 2u - 3 = 0 \xRightarrow[a+b+c=0\Rightarrow u_1=1;u_2=\frac{c}{a}]{} \boxed{S_{②} = \{1\,;-3\}}$$

4. استنتاج حلول المعادلة ①

$X = x + \dfrac{1}{x};\ ① \Rightarrow X^2 + 2X - 3 = 0 \Rightarrow X = 1$ أو $X = -3$

$x + \frac{1}{x} = 1$ أو $x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x} = 0$ أو $\frac{x^2+3x+1}{x} = 0\ (x \neq 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x^2 - x + 1 = 0}_{\Delta<0\Rightarrow S=\emptyset}$ أو $\underbrace{x^2 + 3x + 1 = 0}_{\Delta=5\Rightarrow S=\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2};\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}}$

$$\Rightarrow \boxed{S_{①} = \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\,;\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}}$$

5. استنتاج حلول المتراجحة : $P(x) \leq 0$

بما أنّ $x^2 - x + 1 > 0$ فإنّ إشارة $P(x)$ من إشارة $x^2 + 3x + 1$

$$P(x) \leq 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 \leq 0 \Rightarrow \boxed{x \in \left[\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\,;\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right]}$$

6. تعيين إشارة $P(2020) \times P(1441) \times P(-\pi)$ دون حساب

$$\begin{cases} \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \approx -2{,}618 \\ \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}382 \end{cases} \xrightarrow[\text{سالب على المجال } [-2{,}618;-0{,}382] \; P(x)]{} \begin{cases} P(2020) > 0 \\ P(1441) > 0 \\ P(-\pi) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(2020) \times P(1441) \times P(-\pi) > 0}$$

* * *

التمرين الثالث :

$\boldsymbol{G_m\{(A,2m);(B,1-m);(C,2-m)\}}$

1. إنشاء النقطة G_1

$$G_1\{(A,2);(C,1)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$$

2. كتابة $\overrightarrow{AG_m}$ بدلالة m ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$

$$G_m\{(A,2m);(B,1-m);(C,2-m)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AG_m} = \frac{1-m}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2-m}{3}\overrightarrow{AC}}$$

3. استنتج أنّ : $\overrightarrow{G_1G_m} = \frac{1-m}{3}\overrightarrow{AD}$

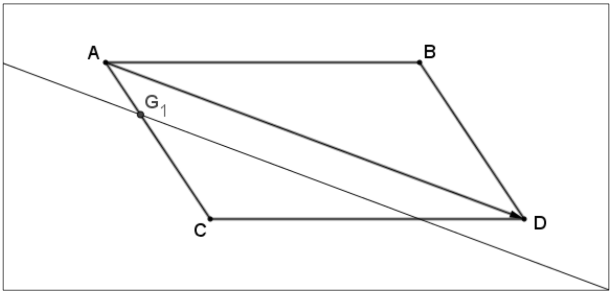
$$\overrightarrow{G_1G_m} = \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AG_m} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1-m}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2-m}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1-m}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1-m}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1-m}{3}\left(\overrightarrow{AB} + AC\right) = \frac{1-m}{3}\overrightarrow{AD}$$

4. تعيين مجموعة النقط G_m لمّا يمسح m مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

$$\overrightarrow{G_1G_m} = \frac{1-m}{3}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{G_1G_m} \parallel \overrightarrow{AD}}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط G_m لمّا يمسح m مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي المستقيم الذي يشمل النقطة G_1 ويوازي $\overrightarrow{AD}$.



* * *

التمرين الرابع :

1. **تعيين قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X.**

$X = \{10; 20; 30\}$

نسمي $\mathcal{A}$ مساحة القرص و $\mathcal{A}_R$ ، $\mathcal{A}_B$ و $\mathcal{A}_V$ مساحة الدوائر الحمراء، البيضاء والخضراء على الترتيب.

$$\mathcal{A} = \pi \times 30^2 = 900\pi\ cm^2\ ;\ \mathcal{A}_R = \pi \times 10^2 = 100\pi\ cm^2\ ;$$

$$\mathcal{A}_B = \pi(20^2 - 10^2) = 300\pi\ cm^2\ ;\ \mathcal{A}_V = \pi(30^2 - 20^2) = 500\pi\ cm^2$$

$$P(X = 10) = \frac{\mathcal{A}_R}{\mathcal{A}} = \boxed{\frac{1}{9}}; P(X = 20) = \frac{\mathcal{A}_B}{\mathcal{A}} = \boxed{\frac{3}{9}}; P(X = 30) = \frac{\mathcal{A}_V}{\mathcal{A}} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

X_i	10	20	30
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$

2. **حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$ والتباين $V(X)$.**

$$E(X) = 10\left(\frac{1}{9}\right) + 20\left(\frac{3}{9}\right) + 30\left(\frac{5}{9}\right) = \boxed{\frac{220}{9}}$$

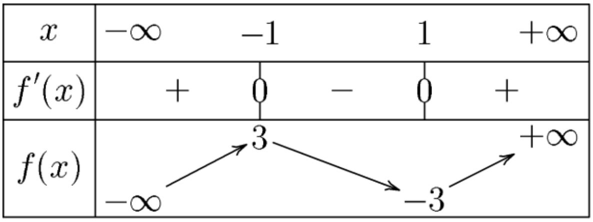
$$V(X) = 10^2\left(\frac{1}{9}\right) + 20^2\left(\frac{3}{9}\right) + 30^2\left(\frac{5}{9}\right) - \left(\frac{220}{9}\right)^2 = \boxed{\frac{3800}{81}}$$

* * *

الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول :

1. جدول تغيرات الدالة f.



x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-3	↗	$+\infty$

2. تعيين إشارة الدالة f.

من أجل $x \in]-\infty; 2[\cup]0; 2[$: $f(x) < 0$

من أجل $x \in]-2; 0[\cup]2; +\infty[$: $f(x) > 0$

من أجل $x \in \{-2; 0; 2\}$: $f(x) = 0$

3. شرح كيفية إنشاء منحنيات الدوال g ; h ; k ; l انطلاقا من المنحنى (C_f).

أ. $g(x) = f(x+1)$.

المنحنى (C_g) هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-1; 0)$

ب. $h(x) = f(x) - 1$.

المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0; -1)$

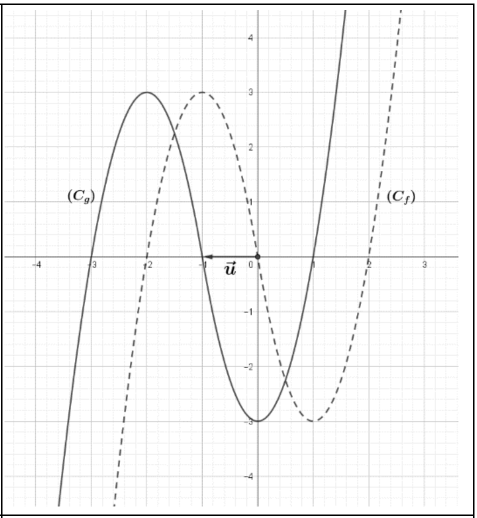
ج. $k(x) = f(|x|)$.

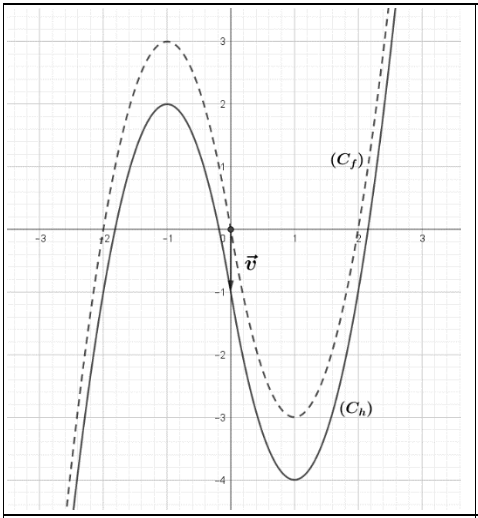
الدالة k زوجية $[k(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = k(x)]$ ومن أجل $x \geq 0$ لدينا: $k(x) = f(x)$ ، ومنه نستنتج أنّ المنحنى (C_k) ينطبق على المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$ وبالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-1; 0)$

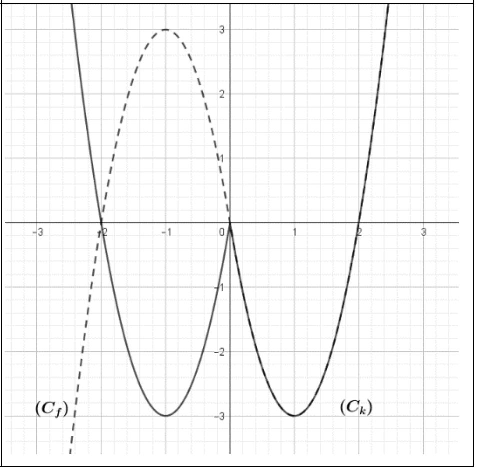
د. $l(x) = |f(x)|$.

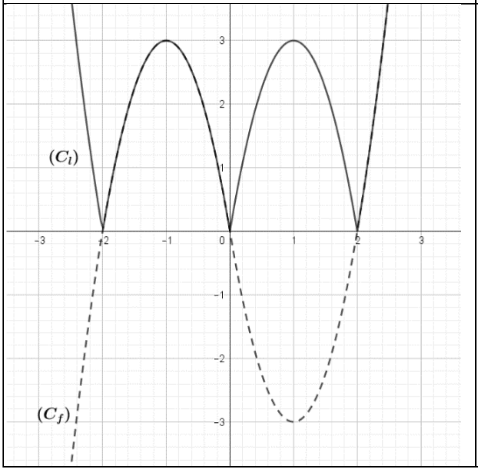
من أجل $x \in]-\infty; 2[\cup]0; 2[$: $f(x) < 0$، أي $l(x) = -f(x)$ ومنه نستنتج أنّ المنحنى (C_l) يناظر المنحنى (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

من أجل $x \in [-2; 0] \cup [2; +\infty[$: $f(x) \geq 0$، أي $l(x) = f(x)$ ومنه نستنتج أنّ المنحنى (C_l) ينطبق على المنحنى (C_f).









* * *

التمرين الثاني :

$$(m+1)x^2-(2m+3)x+m-1=0\ ...\ (E_m)$$

1. **تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون 0 حلا للمعادلة (E_m)**

0 حل للمعادلة $(E_m) \Rightarrow m-1=0 \Rightarrow \boxed{m=1}$

2. **تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تكون (E_m) معادلة من الدرجة الثانية**

المعادلة (E_m) من الدرجة الثانية $\Rightarrow m+1\neq 0 \Rightarrow m\neq -1 \Rightarrow \boxed{m\in\mathbb{R}-\{-1\}}$

3. **مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E_m)**

① $m=-1: (E_{-1}) \Rightarrow -x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$

② $m \neq -1$:

$\Delta = (2m+3)^2 - 4(m+1)(m-1) = \boxed{12m+13}$

$P = \frac{c}{a} = \boxed{\frac{m-1}{m+1}}\ ; S = -\frac{b}{a} = \boxed{\frac{2m+3}{m+1}}$

$\Delta > 0 \Rightarrow m > -\frac{13}{12}; P > 0 \Rightarrow m \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$

$S > 0 \Rightarrow m \in \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup \left]-1;+\infty\right[$

m	$-\infty$ $\quad -\frac{3}{2}$	$-\frac{13}{12}$	-1	1	$+\infty$
Δ	$-$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
P	▨	▨	$+$	$-$ 0	$+$
S	▨	▨	$-$	$+$	$+$

خلاصة:

من أجل $m \in \left]-\infty;-\frac{13}{12}\right[$: ليس للمعادلة حل ($\Delta < 0$)

من أجل $m = -\frac{13}{12}$: تقبل المعادلة حلا مضاعفا سالبا ($\Delta = 0$ و $S < 0$)

من أجل $m \in \left]-\frac{13}{12};-1\right[$: تقبل المعادلة حلين سالبين ($\Delta > 0$ ، $P > 0$ و $S < 0$)

من أجل $m = -1$: تقبل المعادلة حلا وحيدا سالبا ($x = -2$)

من أجل $m \in \left]-1;1\right[$: تقبل المعادلة حلين مختلفين في الإشارة ($P < 0$)

من أجل $m = 1$: تقبل المعادلة حلين أحدهما معدوم والآخر موجب($\Delta > 0$ ، $P = 0$ و $S > 0$)

من أجل $m \in \left]1;+\infty\right[$: تقبل المعادلة حلين موجبين ($\Delta > 0$ ، $P > 0$ و $S > 0$)

4. **استنتاج إشارة حلول المعادلة $2020x^2 - 4041x + 2018 = 0$**

هذه المعادلة هي (E_{2019}) وبالتالي فهي تقبل حلين موجبين ($m \in \left]1;+\infty\right[$)

5. **تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون $x_1 = -x_2 + 1$**

$$x_1 = -x_2 + 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{2m+3}{m+1} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 2m+3 = m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in \left]-\frac{13}{12};-1\right[\cup \left]-1;+\infty\right[\\ m = -2 \end{cases}$$

بما أنّ $-\frac{13}{12} > -2$ ، نستنتج أنّه لا توجد قيم لـ m حتى يكون $x_1 = -x_2 + 1$.

* * *

التمرين الثالث :

$G\{(A,3);(B,-2);(C,1)\}$. I منتصف $[AC]$، J منتصف $[BC]$

1. **تعيين وإنشاء النقطة K مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(C,1)\}$**

$$K\{(A,3);(C,1)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}}$$

إنشاء النقطة G

$$G\{(A,3);(B,-2);(C,1)\} \Rightarrow G\{(K,4);(B,-2)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{KG}=-\overrightarrow{KB}}$$

2. **بيان أنّ G مرجح الجملة المثقلة $\{(I,3);(J,-2)\}$.**

$$①G\{(A,3);(B,-2);(C,1)\} \Rightarrow 3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow 3\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}\right)-2\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0} \Rightarrow 6\overrightarrow{GI}-4\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{GI}-2\overrightarrow{GJ}=\vec{0} \Rightarrow \boxed{G\{(I,3);(J,-2)\}}$$

$$②G\{(A,3);(B,-2);(C,1)\} \Rightarrow G\{(A,3);(C,3);(B,-2);(C,-2)\}$$
$$\Rightarrow G\{(I,6);(J,-4)\} \Rightarrow \boxed{G\{(I,3);(J,-2)\}}$$

استنتاج أنّ G هي نقطة تقاطع المستقيمين (IJ) و (BK)

$$\begin{cases} G\{(K,4);(B,-2)\} \\ G\{(I,3);(J,-2)\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G\in(BK) \\ G\in(IJ) \end{cases} \Rightarrow \boxed{G\in(BK)\cap(IJ)}$$

تعيين طبيعة الرباعي $ABIG$

لدينا I منتصف $[AC]$ وJ منتصف $[BC]$، إذن $(IJ)\parallel(AB)$ أي $(IG)\parallel(AB)$ وبما أنّ القطرين $[AI]$ و $[BJ]$ يتناصفان في النقطة K، نستنتج أنّ الرباعي $ABIG$ متوازي أضلاع.

3. **M نقطة كيفية من المستوي**

أ. بيان أنّ الشعاع $\vec{V}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ هو شعاع ثابت

بما أنّ مجموع المعاملات معدوم $(1-2+1=0)$ نستنتج أنّ الشعاع $\vec{V}$ مستقل عن M وبالتالي فهو شعاع ثابت.

بيان أنّ $\vec{V}=2\,\overrightarrow{BI}$

$$\vec{V}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{MI}-2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}$$
$$=2\overrightarrow{BI}+\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}=\boxed{2\overrightarrow{BI}}$$

ب. تعيين و إنشاء المجموعة (Γ)

$$M\in(\Gamma) \Rightarrow \left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$
$$\Rightarrow 2\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=2\left\|\overrightarrow{BI}\right\| \Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{BI}\right\|}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها G وطول نصف قطرها $\left\|\overrightarrow{BI}\right\|$.

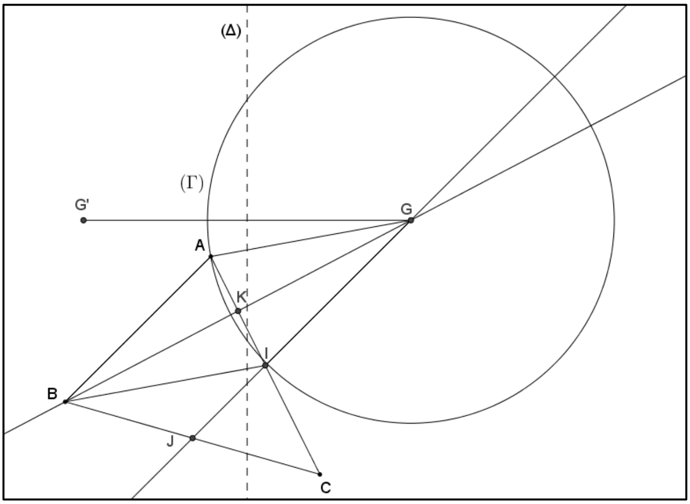
ج. تعيين المجموعة (Δ)

لتكن النقطة G' مرجح الجملة $\{(A,-2);(B,-1);(C,1)\}$

$$M \in (\Delta) \Rightarrow \left\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

$$\Rightarrow 2\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MG'}\right\| \Rightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG'}\right\|$$

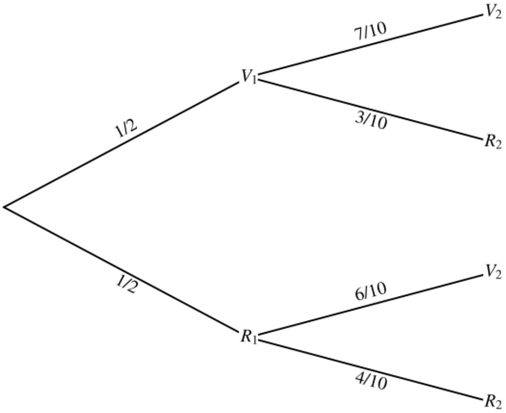
منه نستنتج أنّ المجموعة (Δ) هي محور القطعة $[GG']$.



* * *

التمرين الرابع :

1. إنشاء شجرة الاحتمال



التحقق أنّ احتمال الحصول على كرتين خضراوين هو $\frac{7}{20}$.

$$P(V_1V_2) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} = \boxed{\frac{7}{20}}$$

2. حساب احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون.

$$P(V_1V_2)+P(R_1R_2)=\frac{7}{20}+\frac{4}{20}=\boxed{\frac{11}{20}}$$

3. $V(+\alpha)$ ، $R(-\alpha)$.

أ. تعيين قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X وحساب أمله الرياضياتي $E(X)$.

$$X=\{-2\alpha;0;2\alpha\}$$

$$P(X=-2\alpha)=P(R_1R_2)=\boxed{\frac{4}{20}}$$

$$P(X=0)=P(V_1R_2)+P(R_1V_2)=\frac{3}{20}+\frac{6}{20}=\boxed{\frac{9}{20}}$$

$$P(X=2\alpha)=P(V_1V_2)=\boxed{\frac{7}{20}}$$

X_i	-2α	0	2α
$P(X=X_i)$	$\frac{4}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{7}{20}$

$$E(X)=-2\alpha\left(\frac{4}{20}\right)+2\alpha\left(\frac{7}{20}\right)=\boxed{\frac{3\alpha}{10}}$$

ب. تعيين قيم العدد الحقيقي α حتى يكون $E(X)=1$.

$$E(X)=1\Rightarrow\frac{3\alpha}{10}=1\Rightarrow 3\alpha=10\Rightarrow\boxed{\alpha=\frac{10}{3}}$$

4. نضيف إلى الصندوق (B) $n-3$ كرة حمراء ونعيد عملية السحب المبينة أعلاه.

أ. حساب احتمال الحصول على كرتين خضراوين.

$$P(V_1V_2)=\frac{1}{2}\times\frac{6}{n+6}=\boxed{\frac{3}{n+6}}$$

ب. تعيين عدد الكرات الحمراء التي ينبغي إضافتها إلى الصندوق (B) حتى يكون احتمال سحب كرتين خضراوين هو $0,25$.

$$P(V_1V_2)=0,25\Rightarrow\frac{3}{n+6}=0,25\Rightarrow n+6=12\Rightarrow\boxed{n=6}$$

* * *

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول :

1. **بقراءة بيانية:**

أ. تعيين: $\boldsymbol{foh(0)}$، $\boldsymbol{goh(7)}$، $\boldsymbol{gog(1)}$، $\boldsymbol{hof(2)}$.

$$foh(0) = f[h(0)] = f(2) = \boxed{3}$$
$$goh(7) = g[h(7)] = g(5) = \boxed{3}$$
$$gog(1) = g[g(1)] = g(1) = \boxed{1}$$
$$hof(2) = h[f(2)] = h(3) = \boxed{1}$$

ب. حل المتراجحات التالية:

$$f(x) \leq 3 \Rightarrow \boxed{x \in [-2; 2]}$$
$$g(x) > h(x) \Rightarrow \boxed{x \in \left[\frac{1}{2}; 5\right[}$$
$$h(x) \leq f(x) \Rightarrow \boxed{x \in]-\infty; +\infty[}$$

ج. تعيين المجال التي تكون فيه الدالة $\boldsymbol{f}$ متناقصة تماما.

تكون الدالة f متناقصة تماما من أجل $x \in]-\infty; 0[$.

2. $\boldsymbol{u(x) = x^2 - 1}$; $\boldsymbol{v(x) = \sqrt{2x-1}}$; $\boldsymbol{w(x) = x - 2}$

أ. تعيين $\boldsymbol{D_{vow}}$ و $\boldsymbol{D_{vou}}$.

$$D_{vow} = \left\{x; x \in D_w \text{ و } w(x) \in D_v\right\}$$
$$x \in D_w \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$
$$w(x) \in D_v \Rightarrow w(x) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x - 2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{D_{vow} = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[}$$

$$D_{vou} = \left\{x; x \in D_u \text{ و } u(x) \in D_v\right\}$$
$$x \in D_u \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$
$$u(x) \in D_v \Rightarrow u(x) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 1 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2} \geq 0$$
$$\Rightarrow \left(x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow \boxed{D_{vou} = \left]-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2}; +\infty\right[}$$

تعيين عبارتي vou و vow.

$$vou(x)=v[u(x)]=\sqrt{2[u(x)]-1}=\sqrt{2(x^2-1)-1}=\boxed{\sqrt{2x^2-3}}$$

$$vow(x)=v[w(x)]=\sqrt{2[w(x)]-1}=\sqrt{2(x-2)-1}=\boxed{\sqrt{2x-5}}$$

ب. تعيين مجموعة تعريف الدالة T المعرفة بـ: $T(x)=\frac{v(x)}{w(x)}$.

$$D_T=\left\{x;x\in D_v \text{ و } x\in D_w \text{ و } w(x)\neq 0\right\}$$

$$\begin{cases} x\in D_v\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\\ x\in D_w\Rightarrow x\in\mathbb{R} \\ w(x)\neq 0\Rightarrow x\neq 2\end{cases}\Rightarrow D_T=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[-\{2\}=\boxed{\left[\frac{1}{2};2\right[\cup\,]2;+\infty[}$$

* * *

التمرين الثاني :

1. **حساب $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ و $(\sqrt{3}-1)^2$**

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=\boxed{5-2\sqrt{6}}\ ;\ (\sqrt{3}-1)^2=\boxed{4-2\sqrt{3}}$$

2. **حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلتين:**

$$x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x=-\sqrt{6} \text{ و } 4x^2-2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$$

$$①: x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x=-\sqrt{6}\Rightarrow x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$$

$$\Delta=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-4\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$x_1=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}=\sqrt{2};x_2=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2}=\sqrt{3}$$

$$\boxed{S_{①}=\{\sqrt{2};\sqrt{3}\}}$$

$$②: 4x^2-2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$$

$$\Delta=4(1+\sqrt{3})^2-16\sqrt{3}=16-8\sqrt{3}=4(4-2\sqrt{3})=[2(\sqrt{3}-1)]^2$$

$$x_1=\frac{2(1+\sqrt{3})-2(\sqrt{3}-1)}{8}=\frac{1}{2};x_2=\frac{2(1+\sqrt{3})+2(\sqrt{3}-1)}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{S_{②}=\left\{\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

3. **استنتاج حلول المعادلتين التاليتين:**

$$x-(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{x}+\sqrt{6}=0 \text{ و } \frac{100}{x^2}-\frac{10(1+\sqrt{3})}{x}+\sqrt{3}=0$$

$③: x-(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{x}+\sqrt{6}=0$

$X=\sqrt{x}: ③ \Rightarrow X^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})X+\sqrt{6}=0 \underset{X\in S_①}{\Longrightarrow} X=\sqrt{2}$ أو $X=\sqrt{3}$

$\Rightarrow x=2$ أو $x=3 \Rightarrow \boxed{S_③=\{2;3\}}$

$④: \frac{100}{x^2}-\frac{10(1+\sqrt{3})}{x}+\sqrt{3}=0 \Rightarrow 4\left(\frac{5}{x}\right)^2-2(1+\sqrt{3})\left(\frac{5}{x}\right)+\sqrt{3}=0$

$X=\frac{5}{x}: ④ \Rightarrow 4X^2-2(1+\sqrt{3})X+\sqrt{3}=0 \underset{X\in S_②}{\Longrightarrow} X=\frac{1}{2}$ أو $X=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{5}{x}=\frac{1}{2}$ أو $\frac{5}{x}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=10$ أو $x=\frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{S_④=\left\{10;\frac{10\sqrt{3}}{3}\right\}}$

4. استنتاج حلول الجملة التالية: $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha+\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}}\\ \boldsymbol{\alpha\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}}\end{cases}$ **حيث** $\boldsymbol{\alpha<\beta}$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}=S\\ \alpha\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}=P\end{cases} \underset{x^2-Sx+P=0}{\Longrightarrow} x^2-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)x+\frac{\sqrt{3}}{4}=0$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2-2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}}{4}=0$$

$$\Rightarrow 4x^2-2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0 \underset{x\in S_②}{\Longrightarrow} \boxed{\alpha=\frac{1}{2};\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

* * *

التمرين الثالث :

1. **تعيين الأعداد الحقيقية** $\boldsymbol{\alpha}$ **،** $\boldsymbol{\beta}$ **و** $\boldsymbol{\gamma}$

$\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{GC} \Rightarrow 3\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Rightarrow G\{(A,3);(B,-3);(C,1)\} \Rightarrow \boxed{\alpha=3;\beta=-3;\gamma=1}$

2. $\boldsymbol{ABC}$ **مثلث قائم في** $\boldsymbol{A}$ **ومتساوي الساقين حيث** $\boldsymbol{AB=4cm}$

أ. إنشاء النقطة $\boldsymbol{G}$ **مرجح الجملة** $\{(\boldsymbol{A},\boldsymbol{3});(\boldsymbol{B},-\boldsymbol{3});(\boldsymbol{C},\boldsymbol{1})\}$

$G\{(A,3);(B,-3);(C,1)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AG}=-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$

ب. بيان أنّ: $3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$

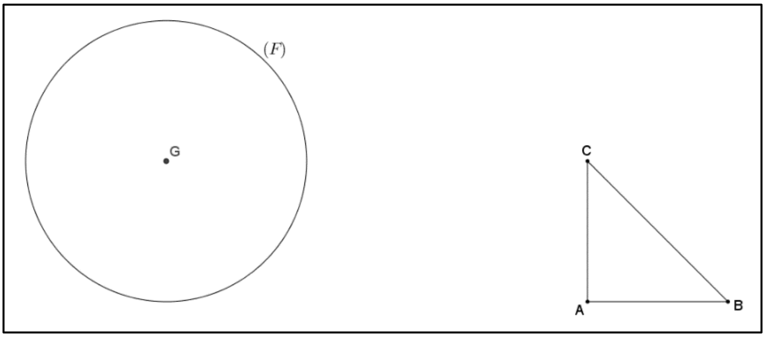
$$3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{MG}-3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}$$

$$=\overrightarrow{MG}+\underbrace{3\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}=\boxed{\overrightarrow{MG}}$$

ج. تعيين المجموعة (F)

$$M\in(F)\Rightarrow\left\|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\Rightarrow\boxed{\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=4}$$

منه نستنتج أنّ المجموعة (F) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 4.



التمرين الرابع :

I) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد $\sin(\alpha+\beta)$

1. تعيين القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي X

$\beta \backslash \alpha$	0	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$
0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
0	0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	-1	-1
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$$\boxed{X \in \left\{-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right\}}$$

.2 تعيين قانون احتمال المتغيّر العشوائي X

X_i	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

.3 حساب الأمل الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغيّر العشوائي X

$$E(X) = -1\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{9}\right) + 1\left(\frac{2}{9}\right) = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$V(X) = 1\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{9}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right) + 1\left(\frac{2}{9}\right) - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$\sigma(X) = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

* * *

كيفية استعمال الآلة الحاسبة

CASIO FX-991 ES PLUS

1. حل معادلة من الدرجة الثانية $x^2+3x-4=0$

$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{5}\,(\text{EQN})\ \boxed{3}\,(ax^2+bx+c=0)\ \boxed{1}\ \boxed{=}\,(a)\ \boxed{3}\ \boxed{=}\,(b)$
$\boxed{-}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\,(c)\ \boxed{=}\ (1)\ \boxed{=}\ (-4)$

2. حل معادلة من الدرجة الثالثة $x^3+x^2+x+1=0$

$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{5}\,(\text{EQN})\ \boxed{4}\,(ax^3+bx^2+cx+d=0)\ \boxed{=}\,(a)\ \boxed{-}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\,(b)$
$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\,(c)\ \boxed{-}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\,(d)\ \boxed{=}\,(1)\ \boxed{=}\,(2)\ \boxed{=}\,(3)$

3. حل جملة معادلتين $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 7x-4y=-1 \end{cases}$

$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{5}\,(\text{EQN})\ \boxed{1}\,(a_nx+b_ny=c_n)$
$\boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{8}\ \boxed{=}\ \boxed{7}\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\quad \boxed{=}\,(1)\ \boxed{=}\ (2)$

4. تعيين نقاط مساعدة لرسم منحنى بياني $f(x)=\frac{x}{x-1}$ على المجال $[-5;5]$

$\boxed{\text{MODE}}\ \boxed{7}\,(\text{TABLE})\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{)}\ (\text{X})\ \ \boxed{\frac{\square}{\square}}\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{)}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$
(Start ?بداية المجال) $\boxed{5}\ \boxed{=}$ (End ?نهاية المجال) $\boxed{1}\ \boxed{=}$ (Step ? الخطوة)

5. حساب العدد المشتق

$f(x)=x^2-2x+2\ ;\ x_0=2:$

$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\int\!\frac{\square}{\square}}\left(\frac{d}{dx}\right)\boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{)}\ \boxed{x^2}\ \boxed{-}\ \boxed{2}\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{)}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{\blacktriangleright}\ \boxed{2}\,(x_0)\ \boxed{=}\,(2)$

6. حساب حدود متتالية عددية

$u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}};u_0=1:$

$\boxed{\frac{\square}{\square}}\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{)}\ \boxed{\blacktriangledown}\ \boxed{\sqrt{\blacksquare}}\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{)}\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{\text{CALC}}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\left(u_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\boxed{\text{CALC}}\ \boxed{\text{Ans}}\ \boxed{=}\left(u_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\boxed{\text{CALC}}\ \boxed{\text{Ans}}\ \boxed{=}\left(u_3=\frac{1}{2}\right)\ \dots$

7. لإيجاد القيم المقرّبة لكسر أو جذر

$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{23}{20}=1{,}15:$

$\boxed{\frac{\square}{\square}}\ \boxed{2}\ \boxed{\blacktriangledown}\ \boxed{5}\ \boxed{\blacktriangleright}\ \boxed{+}\ \boxed{\frac{\square}{\square}}\ \boxed{3}\ \boxed{\blacktriangledown}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\left(\frac{23}{20}\right)\boxed{\text{S}\Leftrightarrow\text{D}}\,(1{,}15)$

$\sqrt{2}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}:\ \boxed{\sqrt{\blacksquare}}\ \boxed{2}\ \boxed{\blacktriangleright}\ \boxed{+}\ \boxed{\sqrt{\blacksquare}}\ \boxed{8}\ \boxed{=}$

$\sqrt{2}+\sqrt{8}\approx 4{,}24:\ \boxed{\sqrt{\blacksquare}}\ \boxed{2}\ \boxed{\blacktriangleright}\ \boxed{+}\ \boxed{\sqrt{\blacksquare}}\ \boxed{8}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{=}$

حلول
الاختبارات
الفصل
الثاني

استراحة

1) **ما هي قيمة كل شكل؟**

❍ + ❍ = 10

❍ × ❑ + ❑ = 12

❍ × ❑ − ◆ × ❍ = ❍

❍ = ? ❑ = ? ◆ = ?

2) **أكمل السطر الأخير**

2	8	6	**رقم واحد صحيح وفي مكانه**
5	4	6	**رقم واحد صحيح وليس في مكانه**
6	0	2	**رقمان صحيحان وليسا في مكانهما**
8	3	7	**لا يوجد أي رقم صحيح**
0	8	7	**رقم واحد صحيح وليس في مكانه**
X	X	X	**كل الأرقام صحيحة وفي مكانها**

3) **اعط النتيجة الأخيرة**

$$1 \oplus 4 = 5$$

$$2 \oplus 5 = 12$$

$$3 \oplus 6 = 21$$

$$8 \oplus 11 = ?$$

الموضوع الأول

التمرين الأول :

$$f(x) = 6x^2 + 3x - 5$$

1. **دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة x_0 الكيفية من $\mathbb{R}$**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{6(x_0+h)^2+3(x_0+h)-5-6x_0^2-3x_0+5}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{6x_0^2+12x_0h+6h^2+3x_0+3h-5-6x_0^2-3x_0+5}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{12x_0h+6h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0} 12x_0+6h+3 = \boxed{12x_0+3}$$

منه نستنتج أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق عند القيمة x_0 الكيفية من $\mathbb{R}$.

2. **استنتاج عبارة $f'(x)$**

لدينا $f'(x_0) = 12x_0 + 3$ ومنه نستنتج أنّ $\boxed{f'(x) = 12x + 3}$

3. **حساب قيمة مقرّبة للعدد $f(1,001)$**

التقريب التآلفي المماسي عند 1 هي معادلة المماس لـ (C_f) عند الفاصلة 1

$$f(x) \approx f'(1)(x-1) + f(1) \approx 15(x-1) + 4 \approx 15x - 11$$
$$f(1{,}001) \approx 15(1{,}001) - 11 \approx \boxed{4{,}015}$$

* * *

التمرين الثاني :

1. **حساب $\sin x$ و $\cos x$ علما أنّ : $3\sin x + 4\cos x = 5$**

$$3\sin x + 4\cos x = 5 \Rightarrow \sin x = \frac{5-4\cos x}{3}$$
$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{9}(16\cos^2 x - 40\cos x + 25)$$
$$\Rightarrow 1-\cos^2 x = \frac{1}{9}(16\cos^2 x - 40\cos x + 25)$$
$$\Rightarrow 9 - 9\cos^2 x = 16\cos^2 x - 40\cos x + 25$$

$$\Rightarrow 25\cos^2 x - 40\cos x + 16 = 0 \Rightarrow \boxed{\cos x = \frac{4}{5}}$$

$$\sin x = \frac{5 - 4\left(\frac{4}{5}\right)}{3} = \frac{9}{15} \Rightarrow \boxed{\sin x = \frac{3}{5}}$$

2. تبسيط العبارتين A و B

$$A = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{7\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x$$

$$= \sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\cos x \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

$$B = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{7\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x$$

$$= \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\sin x \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

3. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x : $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = -1$

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = -1 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x\,.\cos\frac{\pi}{3} + \sin 2x\,.\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,; -\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}}$$

4. حلّ المتراجحة $2\sin 3x + \sqrt{3} \geq 0$ في المجال $[0\,; 2\pi[$ وتمثيل صور الحلول على الدائرة المثلثية

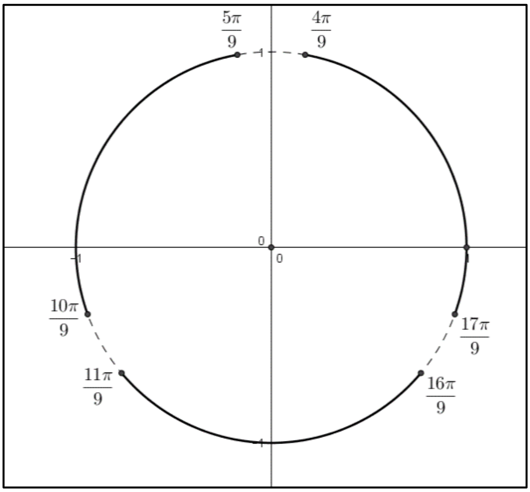
$$2\sin 3x + \sqrt{3} \geq 0 \Rightarrow \sin 3x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$$

- $k = 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{4\pi}{9} \Rightarrow x \in \left[0; \frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{9}; 2\pi\right[$
- $k = 1 \Rightarrow \frac{5\pi}{9} \leq x \leq \frac{10\pi}{9} \Rightarrow x \in \left[\frac{5\pi}{9}; \frac{10\pi}{9}\right]$

- $k = 2 \Rightarrow \frac{11\pi}{9} \leq x \leq \frac{16\pi}{9} \Rightarrow x \in \left[\frac{11\pi}{9}; \frac{16\pi}{9}\right]$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left[0; \frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{9}; \frac{10\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{9}; \frac{16\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{9}; 2\pi\right[}$$



* * *

التمرين الثالث :

$(\boldsymbol{T}): \boldsymbol{y = x - 2}$ ، $\boldsymbol{B(3; 0)}$ ، $\boldsymbol{A(2; 2)}$

1. **كتابة معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) محور القطعة $[\boldsymbol{OA}]$.**

I منتصف $[OA] \Rightarrow I(1; 1)$; $M(x; y) \in (\Delta) \Rightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{OA} = 0$

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OA}\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow 2(x-1) + 2(y-1) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta): x + y - 2 = 0}$$

2. **كتابة معادلة ديكارتية للدائرة $(\boldsymbol{C})$ التي قطرها $[\boldsymbol{OA}]$.**

$M(x; y) \in (C) \Rightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \overrightarrow{AM}\ \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM} = 0 \Rightarrow x(x-2) + y(y-2) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0}$$

3. **بيان أنّ المستقيم $(\boldsymbol{T})$ مماس للدائرة $(\boldsymbol{C})$ في نقطة $\boldsymbol{E}$ يُطلب تعيينها.**

$$d[I; (T)] = \frac{|1(1) - 1(1) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}; OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

بما أنّ $d[I; (T)] = r$ نستنتج أنّ المستقيم (T) مماس للدائرة (C) في النقطة E حيث:

$$E=(C)\cap(T)\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y=0\\ y=x-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+(x-2)^2-2x-2(x-2)=0\Rightarrow 2x^2-8x+8=0$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow x=2\Rightarrow\boxed{E(2;0)}$$

4. بيان أنّ النقطة B تقع خارج الدائرة (C).

$$IB=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}\,;IB>r\Rightarrow\boxed{\text{النقطة } B \text{ تقع خارج الدائرة } (C)}$$

5. بيان أنّ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=6$

$$\overrightarrow{OA}\binom{2}{2};\overrightarrow{OB}\binom{3}{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=2\times3=\boxed{6}$$

استنتاج قيس للزاوية $\widehat{AOB}$.

$$\underbrace{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}_{6}=\underbrace{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}_{2\sqrt{2}}.\underbrace{\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}_{3}.\cos\widehat{AOB}\Rightarrow\cos\widehat{AOB}=\frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|.\left\|\overrightarrow{OB}\right\|}=\frac{6}{6\sqrt{2}}$$

$$\cos\widehat{AOB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\boxed{\widehat{AOB}=\frac{\pi}{4}}$$

6. حساب مساحة المثلث AOB.

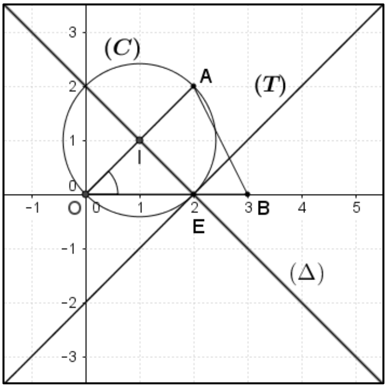
$$S=\frac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB}=\frac{6\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\boxed{3\ cm^2}$$

7. تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MO^2+MA^2=8$.

$$MO^2+MA^2=8\Rightarrow 2MI^2+\frac{1}{2}OA^2=8\Rightarrow 2MI^2+\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$$

$$\Rightarrow\boxed{MI^2=2}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MO^2+MA^2=8$ هي الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{2}$ أي إنّها الدائرة (C).



* * *

الموضوع الثاني

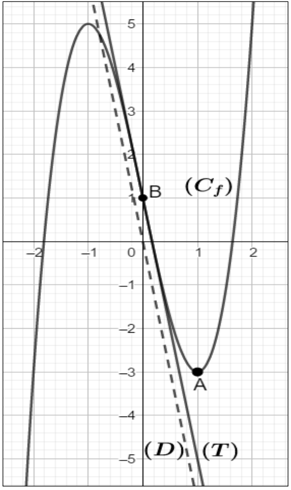
التمرين الأول :

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

تعيين الأعداد الحقيقية c, b, a بحيث يشمل المنحنى (C_f) النقطة $A(1;-3)$ ويقبل عند النقطة $B(0;1)$ مماسا موازيا للمستقيم (D) ذي المعادلة: $y = -6x$

ملاحظة:

1. يشمل (C_f) النقطة $A(x_0;y_0)$ معناه: $f(x_0) = y_0$
2. يقبل (C_f) عند النقطة $A(x_0;y_0)$ مماسا ميله a (أو يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = ax$) معناه: $f(x_0) = y_0$ و $f'(x_0) = a$
3. يقبل (C_f) عند النقطة $A(x_0;y_0)$ مماسا يوازي محور الفواصل معناه: $f(x_0) = y_0$ و $f'(x_0) = 0$



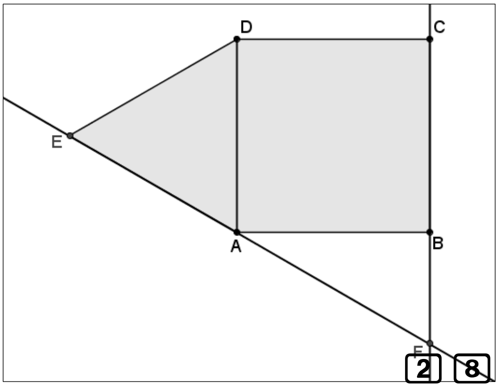
$$f(x) = ax^3 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$\begin{cases} f(1) = -3 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = -3 \\ c = 1 \\ b = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = 2x^3 - 6x + 1}$$

* * *



التمرين الثاني :

1. **إنشاء الشكل**

حساب أقياس الزوايا الموجهة: $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{DC}\right)$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)=\left(-\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)+\pi=-\frac{\pi}{2}+\pi=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AE}\right)-\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right)=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{\frac{\pi}{6}}$$

$$\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\boxed{-\frac{5\pi}{6}}$$

2. تعيين العدد الحقيقي $\boldsymbol{x}$ حيث : $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AD}};\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}\right)=\boldsymbol{x}$

$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\boxed{x=\frac{\pi}{3}}$$

حساب : $\boldsymbol{\cos x}$ ، $\boldsymbol{\sin x}$ ، $\boldsymbol{\cos(\pi+x)}$ ، $\boldsymbol{\cos\left(x-\frac{39\pi}{2}\right)}$

$$\cos\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{1}{2}}\ ;\ \sin\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{39\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

3. لتكن العبارتين التاليتين :

$$\boldsymbol{A(x)=\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{45\pi}{2}-x\right)-3\sin(x-7\pi)+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)}$$

$$\boldsymbol{B(x)=\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{2012\pi}{2}+x\right)-\sin(11\pi+x)-\cos\left(x+\frac{1433\pi}{2}\right)}$$

أ. بيان أنّ : $\boldsymbol{A(x)=B(x)}$

$$A(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-3\sin(x-\pi)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3\sin(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$=\cos x-2\sin x+3\sin x-\cos x\Rightarrow\boxed{A(x)=\sin x}$$

$$B(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(x)-\sin(\pi+x)-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\sin x+\sin x+\sin x\Rightarrow\boxed{B(x)=\sin x}$$

ب. حل في المجال $[0;2\pi]$ المعادلة : $A\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=B\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

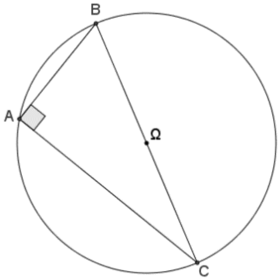
$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow\begin{cases}2x-\frac{\pi}{3}=x+\frac{\pi}{6}+2k\pi\\2x-\frac{\pi}{3}=\pi-x-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\3x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\x=\frac{7\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{18};\frac{19\pi}{18};\frac{31\pi}{18}\right\}}$$

* * *

التمرين الثالث :

-I



1. حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}=0$ ($\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CA}$ لأنّ المثلث ABC قائم في A)

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|.\underbrace{\cos\widehat{ABC}}_{\frac{\|\overrightarrow{BA}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}}=-\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|.\frac{\|\overrightarrow{BA}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\|\overrightarrow{BA}\|^2=-\left(2\sqrt{2}\right)^2=\boxed{-8}$$

2. اثبات أنّ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B\Omega}=14$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B\Omega}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{B\Omega}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{B\Omega}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{B\Omega}=\frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}}_{-8}+\underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{B\Omega}}_{\|\overrightarrow{BC}\|.\|\overrightarrow{B\Omega}\|}$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B\Omega}=-\frac{8}{2}+6\times3=-4+18=\boxed{14}$$

استنتاج أنّ $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega C}=-5$

$$\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega C}=\left(\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{\Omega B}^2+\overrightarrow{\Omega B}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$$

$$=\Omega B^2-\|\overrightarrow{\Omega B}\|.\|\overrightarrow{BC}\|-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$$

$$=\Omega B^2-\|\overrightarrow{\Omega B}\|.\|\overrightarrow{BC}\|+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=9-18+4=\boxed{-5}$$

II- $(\boldsymbol{E}): \boldsymbol{x^2+y^2-2x-4y-5=0}$

1. بيان أنّ $(\boldsymbol{E})$ دائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

$$x^2+y^2-2x-4y-5=0\Rightarrow(x-1)^2-1+(y-2)^2-4-5=0$$

$$\Rightarrow\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2=10}$$

منه نستنتج أنّ (E) دائرة مركزها $w(1;2)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{10}$

2. $(\boldsymbol{D})$ مستقيم شعاع ناظمه $\vec{\boldsymbol{n}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $\boldsymbol{A(4;3)}$.

أ. تعيين معادلة المستقيم $(\boldsymbol{D})$.

$$M(x;y)\in(D)\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0\Rightarrow x-4+y-3=0\Rightarrow\boxed{y=-x+7}$$

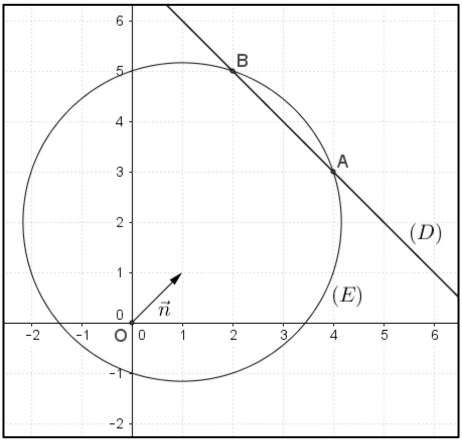
ب. بيان أنّ المستقيم $(\boldsymbol{D})$ يقطع الدائرة $(\boldsymbol{E})$ في نقطتين يُطلب تعيينهما.

$$M(x;y)\in(D)\cap(E)\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y-5=0\\ y=-x+7\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+(-x+7)^2-2x-4(-x+7)-5=0$$

$$\Rightarrow 2x^2-12x+16=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\y_1=5\end{cases};\begin{cases}x_2=4\\y_2=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{(D)\cap(E)=\{A(4;3);B(2;5)\}}$$



* * *

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 9$$

1. تعيين f' مشتقة الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنّها دالة كثير حدود، ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f'(x) = 6x^2 + 10x + 6}$$

2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 10x + 6 = 0\ ;\ \Delta = -44$$

بما أنّ $\Delta < 0$ و$a = 6$ فإنّ $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. تعيين مماسات للمنحنى (C_f) موازية للمستقيم ذي المعادلة: $y = 6x - 3$

نفرض (T) مماس للمنحنى (C_f) عند الفاصلة x_0 موازي للمستقيم ذي المعادلة: $y = 6x - 3$، هذا يعني أنّ ميل المماس (T) هو 6، أي:

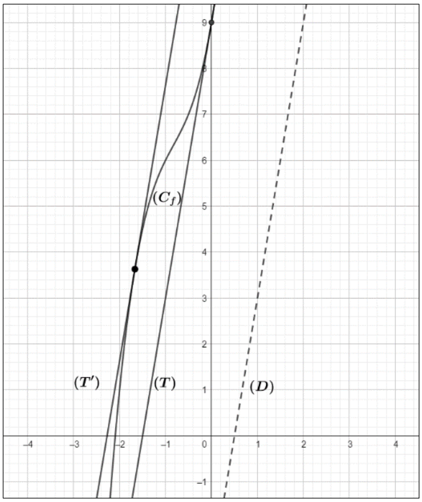
$$f'(x_0) = 6 \Rightarrow 6{x_0}^2 + 10x_0 + 6 = 6 \Rightarrow 6{x_0}^2 + 10x_0 = 0$$

$$\Rightarrow 2x_0(3x_0 + 5) = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 0 \text{ أو } x_0 = -\frac{5}{3}}$$

منه نستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين ميلهما 6، الأول (T) عند الفاصلة 0 والثاني (T') عند الفاصلة $-\frac{5}{3}$.

$$(T): y = f'(0)x + f(0) = \boxed{6x + 9}$$

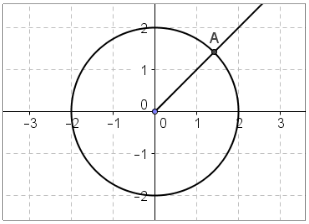
$$(T'): y = f'\left(-\frac{5}{3}\right)\left(x + \frac{5}{3}\right) + f\left(-\frac{5}{3}\right) = 6\left(x + \frac{5}{3}\right) + \frac{98}{27} = \boxed{6x + \frac{368}{27}}$$



* * *

التمرين الثاني :

1. **تمثيل النقطة A**



2. **تعيين الإحداثيات القطبية للنقطة $B(-\sqrt{2};1)$**

$$r = 2\,;\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}\,;\ \theta = \frac{5\pi}{6}\,;\boxed{B\left(2;\frac{5\pi}{6}\right)}$$

3. **حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$.**

طريقة ①

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\\ x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi\\ x=-\dfrac{11\pi}{12}+2k\pi\end{cases}}$$

طريقة ②

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

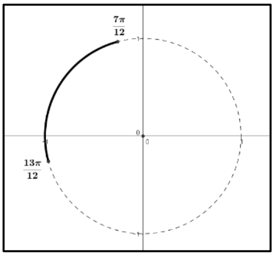
$$\Rightarrow\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ x-\dfrac{\pi}{3}=\pi-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi\\ x=\dfrac{13\pi}{12}+2k\pi\end{cases}}\left(\frac{13\pi}{12}=-\frac{11\pi}{12}\right)$$

4. حل في المجال $[0\,;2\pi[$ المتراجحة : $\sin x-\sqrt{3}\cos x>\sqrt{2}$ وتمثيل صور حلولها على الدائرة المثلثية.

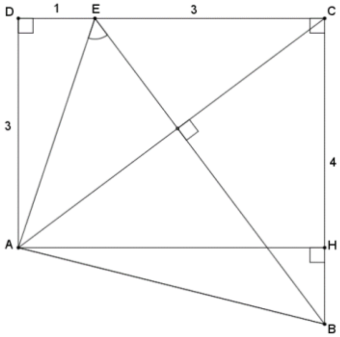
$$\sin x-\sqrt{3}\cos x>\sqrt{2}\Rightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{4}<x-\frac{\pi}{3}<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\frac{7\pi}{12}<x<\frac{13\pi}{12}\Rightarrow\boxed{S=\left]\frac{7\pi}{12};\frac{13\pi}{12}\right[}$$



* * *

التمرين الثالث :



1. أ. بيان أنّ: $\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right).\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$

$$\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right).\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}+\underbrace{\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{CB}}_{=0(\overrightarrow{ED}\perp\overrightarrow{CB})}+\underbrace{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EC}}_{=0(\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{EC})}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$$

$$=\boxed{\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}}$$

ب. استنتاج قيمة $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$

$$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right).\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=-\left\|\overrightarrow{ED}\right\|.\left\|\overrightarrow{EC}\right\|+\left\|\overrightarrow{DA}\right\|.\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=-3+12=\boxed{9}$$

جـ. حساب EA و EB ، ثمّ استنتاج $\cos\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EB}\right)$

$$EA^2=ED^2+DA^2=1+9=10\Rightarrow\boxed{EA=\sqrt{10}}$$

$$EB^2=EC^2+CB^2=9+16=25\Rightarrow\boxed{EB=5}$$

$$\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=\left\|\overrightarrow{EA}\right\|.\left\|\overrightarrow{EB}\right\|.\cos\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EB}\right)$$

$$\cos\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EB}\right)=\frac{\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}}{\left\|\overrightarrow{EA}\right\|.\left\|\overrightarrow{EB}\right\|}=\frac{9}{5\sqrt{10}}=\boxed{\frac{9\sqrt{10}}{50}}$$

2. لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على $[BC]$

أ. بيان أنّ $AB=\sqrt{17}$

$$AB^2=AH^2+HB^2=16+1=17\Rightarrow\boxed{AB=\sqrt{17}}$$

ب. حساب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}=\left\|\overrightarrow{CH}\right\|.\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=3\times4=\boxed{12}$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}=\left\|\overrightarrow{CD}\right\|.\left\|\overrightarrow{CE}\right\|=4\times3=\boxed{12}$$

استنتاج أنّ (CA) عمودي على (BE)

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CA}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}\right)=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}=0$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{BE}\Rightarrow\boxed{(CA)\perp(BE)}$$

* * *

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

1. **حساب $f(1)$ ، $f'(1)$ و $f'(2)$**

$f(1)=0$; $f'(1)=-2$ (ميل المماس عند النقطة A) ; $f'(2)=0$ (مماس أفقي)

2. **تعيين الأعداد الحقيقية c, b, a**

$$f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b$$

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=-2 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \ldots ① \\ 2a+b=-2 \ldots ② \\ 4a+b=0 \ldots ③ \end{cases} ;\ ③-②: 2a=2 \Rightarrow a=1$$

$$② : b=-2a-2=-4; ① : c=-a-b=3 \Rightarrow \boxed{f(x)=x^2-4x+3}$$

* * *

التمرين الثاني :

نعتبر المعادلة : ① ... $\sin 3x = -\sin 2x$

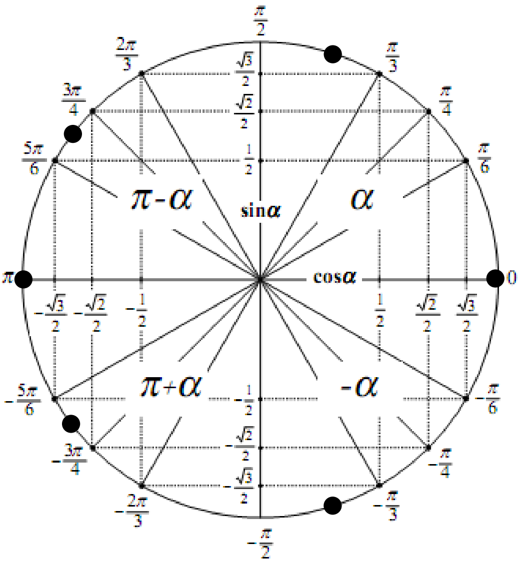
1. **حل المعادلة ① وتمثيل صور الحلول على الدائرة المثلثية**

$$\sin 3x=-\sin 2x \Rightarrow \sin 3x=\sin(-2x) \Rightarrow \begin{cases} 3x=-2x+2k\pi \\ 3x=\pi+2x+2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x=2k\pi \\ x=(2k+1)\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2k\pi}{5} \\ x=(2k+1)\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{S=\left\{\frac{2k\pi}{5};(2k+1)\pi\right\}}$$

$$-\pi \le \frac{2k\pi}{5} \le \pi \Rightarrow -1 \le \frac{2k}{5} \le 1 \Rightarrow -\frac{5}{2} \le k \le \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow k \in \{-2;-1;0;1;2\} \Rightarrow \boxed{S=\left\{-\frac{4\pi}{5};-\frac{2\pi}{5};0;\frac{2\pi}{5};\frac{4\pi}{5};-\pi;\pi\right\}}$$



2. تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$

$$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x \sin x$$
$$= 2\sin x\cos x\cos x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x$$
$$= 2\sin x\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x$$
$$= 2\sin x\,(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$$
$$= -4\sin^3 x + 3\sin x$$
$$\Rightarrow \boxed{4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x}$$

3. اثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $\sin 3x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$

$$4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = \sin x\,(3 - 4\sin^2 x)$$
$$= \sin x\,[3 - 4(1 - \cos^2 x)] = \boxed{\sin x\,(4\cos^2 x - 1)}$$

4. استنتاج أنّ حلول المعادلة ① هي حلول المعادلة:

$$\mathbf{\sin x\,(4\cos^2 x - 1 + 2\cos x) = 0}$$

$$\sin 3x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 3x + \sin 2x = 0$$
$$\Rightarrow \sin x\,(4\cos^2 x - 1) + 2\sin x\cos x = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\sin x\,(4\cos^2 x - 1 + 2\cos x) = 0}$$

5. من بين حلول المعادلة ① ، تعيين تلك التي تحقق المعادلة:

$$\mathbf{4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0}$$

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 3x = -\sin 2x \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \boxed{x \in \left\{-\frac{4\pi}{5}; -\frac{2\pi}{5}; \frac{2\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}\right\}}$$

6. نضع : $X = \cos x$.

أ. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $4X^2 + 2X - 1 = 0$

$$4X^2 + 2X - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\ ;\ X_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}}$$

ب. استنتاج قيمة العددين : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ و $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{5} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{4\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0 \\ \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

* * *

التمرين الثالث :

1. حساب إحداثيي النقطة I منتصف القطعة $[AB]$

$$I\left(\frac{-2+2}{2};\frac{2+2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{I(0;2)}$$

2. بيان أنّ من أجل كل نقطة M من المستوي: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}\underbrace{\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)}_{\vec{0}} \\ &= 2MI^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \boxed{2MI^2 + \frac{AB^2}{2}} \end{aligned}$$

3. بيان أنّ مجموعة النقط M من المستوي حيث: $MA^2 + MB^2 = 40$ هي دائرة (C) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

$$MA^2 + MB^2 = 40 \Rightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 40 \Rightarrow 2MI^2 = 40 - \frac{AB^2}{2}$$

$$= 40 - \frac{4^2}{2} = 32 \Rightarrow MI^2 = 16 \Rightarrow \boxed{MI = 4}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M من المستوي حيث: $MA^2 + MB^2 = 40$ هي دائرة (C) مركزها I ونصف قطرها $r = 4$

4. تعيين نقاط تقاطع هذه الدائرة مع محور الفواصل

$$M(x;y) \in (C) \cap (xx') \Rightarrow \begin{cases} x^2+(y-2)^2=16 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=12 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (C) \cap (xx') = \boxed{\left\{D\left(-2\sqrt{3};0\right); E(2\sqrt{3};0)\right\}}$$

5. تعيين قيمة λ التي تكون من أجلها النقطة $Z(\sqrt{7};\lambda)$ تنتمي إلى الدائرة (C)

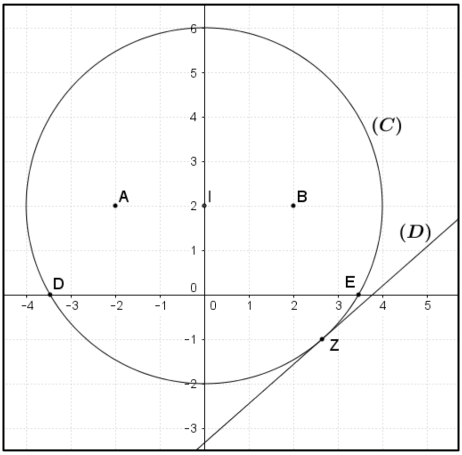
$$Z\left(\sqrt{7};\lambda\right) \in (C) \Rightarrow \sqrt{7}^2+(\lambda-2)^2=16 \Rightarrow (\lambda-2)^2=9$$

$$\Rightarrow \lambda-2=-3\left(\text{سالب } \lambda \Rightarrow \text{سالب } \lambda-2\right) \Rightarrow \boxed{\lambda=-1}$$

6. كتابة معادلة المماس (D) للدائرة (C) في النقطة Z

$$M(x;y) \in (D) \Rightarrow \overrightarrow{ZI}\begin{pmatrix}-\sqrt{7} \\ 3\end{pmatrix}.\overrightarrow{ZM}\begin{pmatrix}x-\sqrt{7} \\ y+1\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -\sqrt{7}\left(x-\sqrt{7}\right)+3(y+1)=0 \Rightarrow \boxed{-\sqrt{7}x+3y+10=0}$$

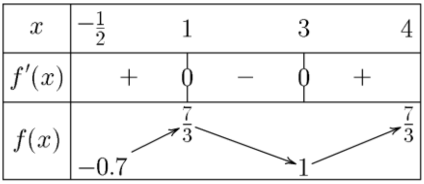


* * *

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

1. جدول تغيرات الدالة f



x	$-\frac{1}{2}$		1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-0.7	↗	$\frac{7}{3}$	↘	1	↗	$\frac{7}{3}$

2. تعيين إشارة الدالة f على المجال $\left[-\frac{1}{2}\,;4\right]$

$$x\in\left[-\frac{1}{2};\alpha\right[: f(x)<0\ ;\ x\in[\alpha;4] : f(x)\geq 0$$

3. تعيين $f(2)$ ، $f'(2)$ و $f''(2)$

$f(2)=\dfrac{5}{3}\ ;\ f'(2)=-1$ (ميل المماس عند النقطة B) ; $f''(2)=0$ (نقطة انعطاف)

4. كتابة معادلة المماس (T) والمماسين عند النقطتين A و C

ط ① ... $(T): y=f'(2)(x-2)+f(2)=-(x-2)+\dfrac{5}{3}=-x+\dfrac{11}{3}$

$(T): y=ax+b=-x+\dfrac{11}{3}$

ط ② ... ($a=$ ميل المماس عند النقطة B ; $b=$ التقاطع مع محور التراتيب)

$(T_A): y=f(1)=\dfrac{7}{3}\ ;\ (T_C): y=f(3)=1\ (f'(1)=f'(3)=0)$

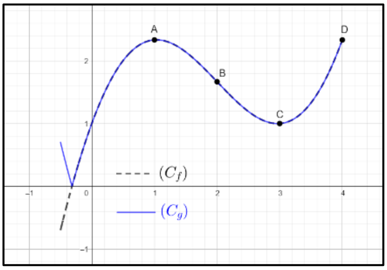
5. شرح كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f)، ورسم (C_g)

$$x\in\left[-\frac{1}{2};\alpha\right[: f(x)<0\Rightarrow|f(x)|=-f(x)\Rightarrow g(x)=-f(x)$$

على المجال $\left]-\frac{1}{2};\alpha\right[$ يكون (C_g) نظيرا لـ (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

$$x\in[\alpha;4] : f(x)\geq 0\Rightarrow|f(x)|=f(x)\Rightarrow g(x)=f(x)$$

على المجال $[\alpha;4]$ ينطبق (C_g) على (C_f).



التمرين الثاني :

1. تعليم النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 ، M_5، ثمّ تعيين إحداثياتها

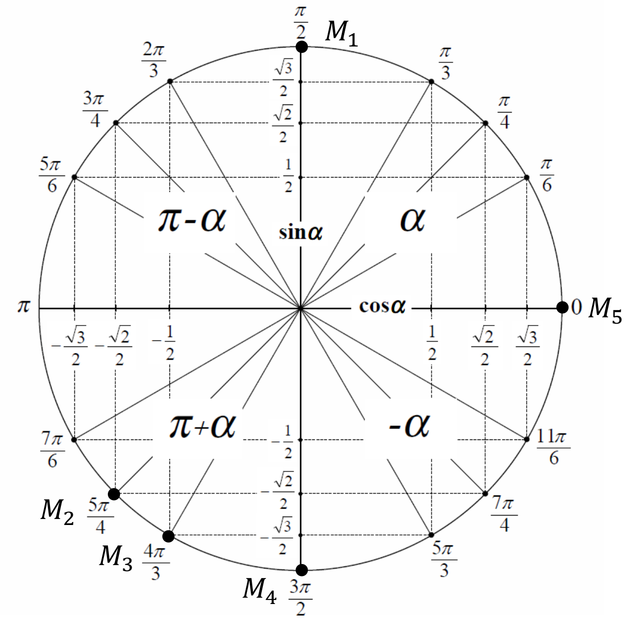
$$\frac{5\pi}{2}=\frac{4\pi+\pi}{2}=2\pi+\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi}{2}\Rightarrow M_1(0;1)}$$

$$\frac{5\pi}{4}=\frac{4\pi+\pi}{4}=\boxed{\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$\frac{4\pi}{3}=\frac{3\pi+\pi}{3}=\boxed{\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow M_3\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\frac{1437\pi}{6}=\frac{1440\pi-3\pi}{6}=240\pi-\frac{3\pi}{6}=\boxed{-\frac{\pi}{2}\Rightarrow M_4(0;-1)}$$

$$\frac{2016\pi}{3}=672\pi=\boxed{0\Rightarrow M_5(1;0)}$$



.2 تبسيط العبارتين $A(x)$ و $B(x)$:

$$A(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 3\pi) - \cos(x - 7\pi)$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x + \pi) - \cos(x + \pi)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(x + \pi) - \cos(x + \pi)$$
$$= \sin(x) - \sin(x) - \sin(x) + \cos(x) = \boxed{\cos(x) - \sin(x)}$$
$$B(x) = \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi + x)$$
$$= \cos x + \sin(x) - \sin(x) - \cos(x) = \boxed{0}$$

.3 حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين:

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi$ أو $3x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + x + 2k\pi$

$4x = 2k\pi$ أو $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$ أو $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$$\boxed{S = \left\{\frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + k\pi\right\}}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi$ أو $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi$

$3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ أو $-x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$$\boxed{S = \left\{\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}}$$

* * *

التمرين الثالث :

.1 $A(1; \sqrt{3})$ ، $C(-\sqrt{3}; 1)$

.2 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

أ. حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}.\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = \boxed{0}$$

استنتاج طبيعة الرباعي $OABC$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \\ \|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OC}\| \\ \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{الرباعي } OABC \text{ مربع}}$$

ب. حساب الإحداثيات الديكارتية والقطبية للنقطة B

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B\left(1-\sqrt{3}; \sqrt{3}+1\right)}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left(\vec{\imath}; \overrightarrow{OB}\right) = \left(\vec{\imath}; \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right) = \underbrace{\left(\vec{\imath}; \overrightarrow{OA}\right)}_{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}\right)}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\boxed{B\left(2\sqrt{2}; \frac{7\pi}{12}\right)}$$

3. **ليكن α عدد حقيقي موجب تماما**

أ. كتابة بدلالة α معادلة الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها O ونصف قطرها α

$$M(x;y) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow OM^2 = \alpha^2 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \alpha^2}$$

ب. تعيين العدد الحقيقي α حتى يكون المستقيم (AC) مماسا للدائرة $(\mathcal{C})$

$$M(x;y) \in (AC) \Rightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-\sqrt{3} \end{pmatrix} \parallel \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}-1 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(1-\sqrt{3}\right)(x-1) - \left(-\sqrt{3}-1\right)\left(y-\sqrt{3}\right) = 0$$

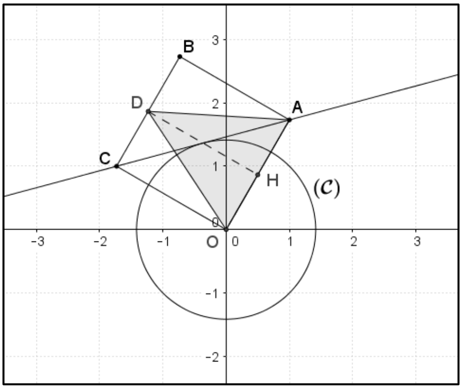
$$\Rightarrow \boxed{\left(1-\sqrt{3}\right)x + \left(1+\sqrt{3}\right)y - 4 = 0}$$

$$(\mathcal{C}) \text{ مماس لـ } (AC) \Rightarrow \alpha = d[O;(AC)] = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}}$$

4. **رسم الدائرة $(\mathcal{C})$ والمماس (AC)**
5. **حساب مساحة المثلث OAD حيث D منتصف القطعة $[BC]$**

لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على (OA). لدينا:

$$S_{OAD} = \frac{OA \times DH}{2} = \frac{OA \times AB}{2} = \boxed{2\,ua}$$


B
D
A
C
H
(𝒞)
O
-3
-2
-1
0
1
2
3
3
2
1
0
-1
-2

* * *

الموضوع السادس

التمرين الأول :

1. **اكمال الجدول التالي:**

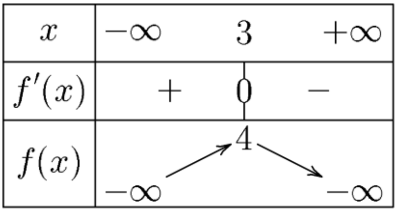
x	1	3	5
$f'(x)$	2	0	-2
$f(x)$	2	4	2

2. **استنتاج معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة C**

$$(T): y = f'(5)(x-5) + f(5) = -2(x-5) + 2 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 12}$$

3. **دراسة إشارة $f'(x)$ ثمّ استنتاج جدول تغيّرات الدالة f**

بما أنّ الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;3]$ ومتناقصة على المجال $[3;+\infty[$، فإنّ $f'(x)$ موجبة على المجال $]-\infty;3]$ وسالبة على المجال $[3;+\infty[$.



x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	4	↘ $-\infty$

4. **استنتاج مجموعة حلول المتراجحة: $f'(x) \leq 0$**

$$f'(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [3;+\infty[\Rightarrow \boxed{S = [3;+\infty[}$$

5. **حل بيانيا المعادلة: $f'(x) = 2$**

حلول المعادلة: $f'(x) = 2$ هي فواصل النقط التي يقبل عندها المنحنى (C_f) مماسا ميله 2، وبما أنّ المماس عند النقطة B ميله 2 ولا توجد مماسات أخرى موازية له نستنتج أنّ:

$$f'(x) = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \boxed{S = \{1\}}$$

* * *

التمرين الثاني :

1. **حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{1}{2}$**

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$\frac{\pi}{4}+2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $\frac{\pi}{4}+2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

$2x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $2x=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ أو $x=\frac{7\pi}{24}+k\pi$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{24}+k\pi;\frac{7\pi}{24}+k\pi\right\}}$$

2. نعتبر العبارة: $A(x)=2\cos^2 x+5\sin x.\cos x-3\sin^2 x$

أ. حساب $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+5\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}.\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}-3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{-3}$$

ب. بيان أنّ: $\frac{1}{2}(5\cos 2x-1)=2\cos^2 x-3\sin^2 x$

$$\frac{1}{2}(5\cos 2x-1)=\frac{1}{2}[5(\cos^2 x-\sin^2 x)-(\cos^2 x+\sin^2 x)]$$
$$=\frac{1}{2}(4\cos^2 x-6\sin^2 x)=\boxed{2\cos^2 x-3\sin^2 x}$$

ج. استنتاج أنّ: $A(x)=\frac{1}{2}(5\cos 2x+5\sin 2x-1)$

$$A(x)=2\cos^2 x+5\sin x.\cos x-3\sin^2 x$$
$$=(2\cos^2 x-3\sin^2 x)+\frac{5}{2}(2\sin x.\cos x)$$
$$=\frac{1}{2}(5\cos 2x-1)+\frac{5}{2}\sin 2x$$
$$=\boxed{\frac{1}{2}(5\cos 2x+5\sin 2x-1)}$$

3. أ. بيان أنّ: $A(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[5\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$$A(x)=\frac{1}{2}(5\cos 2x+5\sin 2x-1)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(5\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+5\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(5\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x+5\cos\frac{\pi}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[5\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[5\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

ب. استنتاج حل للمعادلة: $\boldsymbol{2A(x) + 1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}}$ في المجال $\boldsymbol{\left]0;\frac{\pi}{2}\right[}$

$$2A(x) + 1 = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2}\left[5\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] + 1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$\Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{24} + k\pi$ أو $x = \frac{7\pi}{24} + k\pi \Rightarrow \boxed{S = \left\{\frac{7\pi}{24}\right\}}$

* * *

التمرين الثالث :

1. بيان أنّ: $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)}$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} \Rightarrow 2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)}$$

2. $\boldsymbol{A(3;2)}$ ، $\boldsymbol{B(0;5)}$ ، $\boldsymbol{C(-2;-1)}$

أ. حساب طويلة كل من الأشعة: $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$ ، $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$ و $\boldsymbol{\overrightarrow{BC}}$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10}$$

ب. حساب الجداءات السلمية التالية:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}.\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix} = 15 - 9 = \boxed{6}$$

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}.\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} = 10 + 18 = \boxed{28}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}.\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}=-6+18=\boxed{12}$$

$$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=6-28$$

$$=\boxed{-22}$$

ج. استنتاج $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|$

$$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=18+34+12=64$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|=8}$$

د. حساب قيس الزاويتين: $\widehat{ACB}$ و $\widehat{BAC}$ بالتدوير إلى الدرجة

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC.BC.\cos\widehat{ACB}$$

$$\cos\widehat{ACB}=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC.BC}=\frac{34+40-18}{2\sqrt{34}\times\sqrt{40}}\approx 0{,}76\Rightarrow\boxed{\widehat{ACB}\approx 41°}$$

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{BAC}$$

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\frac{18+34-40}{6\sqrt{2}\times\sqrt{34}}\approx 0{,}24\Rightarrow\boxed{\widehat{BAC}\approx 76°}$$

* * *

الموضوع السابع

التمرين الأول :

1. تعيين معامل توجيه المماس (T)

لتعيين معامل توجيه المماس (T) نأخذ نقطتين من (T) هما $A(0;3)$ و $B(1;0)$

$$f'(0)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-\frac{3}{1}=\boxed{-3}$$

2. $\boldsymbol{g(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}}$

أ. تعيين الأعداد الحقيقية $\boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{b}$، $\boldsymbol{c}$

$$g(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}\Rightarrow g'(x)=a-\frac{c}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} g(0)=3 \\ g'(0)=-3 \\ g'(1)=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b+c=3 \\ a-c=-3 \\ a-\dfrac{c}{4}=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=3-c \\ a=-3+c \\ c=4a \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=3-c \\ a=-3+4a \\ c=4a \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=4 \end{cases}\Rightarrow\boxed{g(x)=x-1+\frac{4}{x+1}}$$

ب. تعيين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$

$x=-1$ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب

ج. كتابة معادلة المماس (T)

$$(T): y=f'(0)x+f(0)\Rightarrow\boxed{y=-3x+3}$$

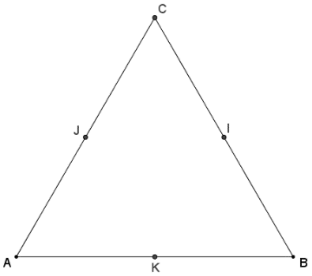
3. المناقشة البيانية حسب قيم $\boldsymbol{m}$ لعدد وإشارة حلول المعادلة $\boldsymbol{f(x)=-2m}$

- من أجل $-2m<2$ أي $m>-1$: لا تقبل المعادلة حلولا
- من أجل $-2m=2$ أي $m=-1$: تقبل المعادلة حلا مضاعفا موجبا
- من أجل $2<-2m<3$ أي $-\frac{3}{2}<m<-1$: تقبل المعادلة حلين موجبين
- من أجل $-2m=3$ أي $m=-\frac{3}{2}$: تقبل المعادلة حلا معدوما وآخر موجبا
- من أجل $-2m>3$ أي $m<-\frac{3}{2}$: تقبل المعادلة حلا سالبا وآخر موجبا.

* * *

التمرين الثاني :

1. تعيين القيس الرئيسي للزوايا الموجهة: $\boldsymbol{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA}),(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{JK}),(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{CA})}$



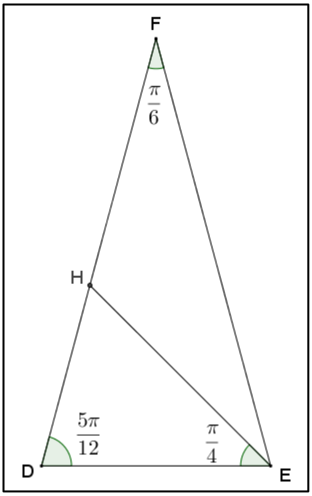
$$\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA}\right)=\left(-\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

$\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{JK}\right)=\boxed{\pi}$ (شعاعان مرتبطان خطيا متعاكسان في الاتجاه)

$$\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{AI};-\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AC}\right)+\pi=\frac{\pi}{6}+\pi=\boxed{\frac{7\pi}{6}}$$

لاحظ أنّ $\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ لأنّ (AI) منصف الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

2. تعيين القيس الرئيسي لكل من الزاويتين الموجهتين: $\left(\overrightarrow{EH};\overrightarrow{FD}\right),\left(\overrightarrow{HE};\overrightarrow{EF}\right)$



$$\left(\overrightarrow{EH};\overrightarrow{FD}\right)=\left(\overrightarrow{EH};\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{FD}\right)=\left(\overrightarrow{EH};\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DF}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{12}=\frac{8\pi}{12}=\boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

$$\left(\overrightarrow{HE};\overrightarrow{EF}\right)=-\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{HE}\right)=-\left(\overrightarrow{EF};-\overrightarrow{EH}\right)=\pi-\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EH}\right)$$

$$=\pi-\left[\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{ED}\right)-\left(\overrightarrow{EH};\overrightarrow{ED}\right)\right]=\pi-\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{\frac{5\pi}{6}}$$

* * *

التمرين الثالث :

ABC مثلث حيث $AB = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ، $AC = 5$ و$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}) = -\frac{5\pi}{6}$

1. بيان أنّ: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{75}{4}$

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB};-\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}) + \pi = -\frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{\pi}{6}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{75}{4}}$$

2. حساب الطول BC باستعمال مبرهنة الكاشي

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{75}{4} + 25 - \frac{75}{2} = \frac{25}{4} \Rightarrow \boxed{BC = \frac{5}{2}}$$

3. تحديد طبيعة المثلث ABC وحساب مساحته

$$AB^2 + BC^2 = \frac{75}{4} + \frac{25}{4} = 25 = AC^2 \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } B}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \boxed{\frac{25\sqrt{3}}{8}\ ua}$$

* * *

الموضوع الثامن

التمرين الأول :

1. تعيين إشارة $f(x)$:

- $x \in]-\infty;-1[\cup]0;3[$: $f(x) < 0$
- $x \in]-1;0[\cup]3;+\infty[$: $f(x) > 0$
- $f(0) = f(3) = 0$

2. $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$

أ. حساب $f'(x)$ بدلالة d, c, b, a

$$f'(x) = a - \frac{c}{(x+d)^2}$$

ب. إثبات أن: $d = 1$, $c = 4$, $b = -4$, $a = 1$

$$Df = \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow -1 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \frac{c}{4} = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b + \frac{c}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c}{4} \\ b = -c \\ -\frac{c}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = x - 4 + \frac{4}{x+1}}$$

ج. إيجاد المماسات للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ التي معامل توجيهها يساوي 3-

$$f'(x) = -3 \Rightarrow 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = -3 \Rightarrow -\frac{4}{(x+1)^2} = -4$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 1 \Rightarrow x + 1 = 1 \text{ أو } x + 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \text{ أو } x = -2$$

$$(T_0): y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{y = -3x}$$

$$(T_{-2}): y = f'(-2)(x+2) + f(-2) \Rightarrow \boxed{y = -3x - 16}$$

* * *

التمرين الثاني :

1. تعيين القيس الرئيسي لزاوية موجهة قيسها $-\frac{127\pi}{4}$

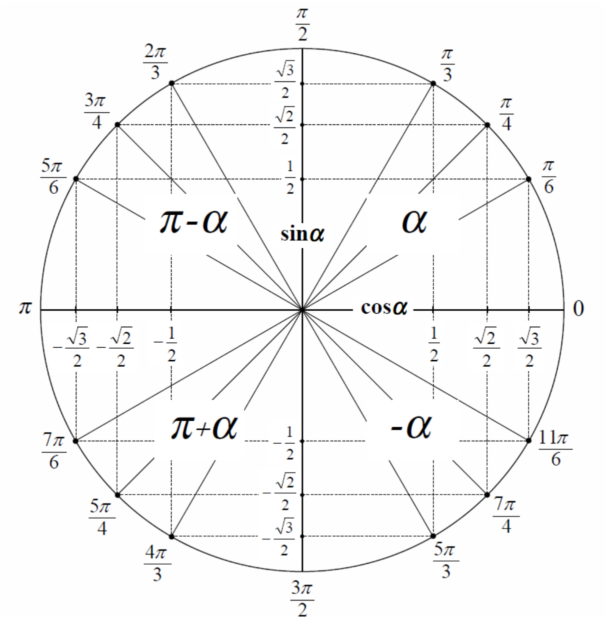
$$-\pi < -\frac{127\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi \Rightarrow -1 < -\frac{127}{4} + 2k \leq 1 \Rightarrow \frac{123}{8} < k \leq \frac{131}{8}$$

$$\Rightarrow k = 16 \Rightarrow \alpha = -\frac{127\pi}{4} + 32\pi = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

.2 علم على الدائرة المثلثية صور الأعداد: $-\frac{5\pi}{3},\frac{2019\pi}{4},\frac{2\pi}{3}$

$$\frac{2019\pi}{4}=\frac{2016\pi+3\pi}{4}=504\pi+\frac{3\pi}{4}=\boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

$$-\frac{5\pi}{3}=\frac{-6\pi+\pi}{3}=-2\pi+\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{\pi}{3}}$$



.3 تعيين: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\cos(\pi-x),\cos x$

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{55}{64}\Rightarrow\boxed{\cos x=-\frac{\sqrt{55}}{8}}$$

$$\cos(\pi-x)=-\cos x=\boxed{\frac{\sqrt{55}}{8}}\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x=\boxed{\frac{3}{8}}$$

.4 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos x$

$$\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos x\Rightarrow\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+x+2k\pi$ أو $2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi$

$x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}$

$$\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;-\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\right\}}$$

.5 حل في المجال $]-\pi;2\pi[$ المتراجحة: $\sin 2x>\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin 2x>\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{3}+2k\pi<2x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow\frac{\pi}{6}+k\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\pi$$

$$k=-1\Rightarrow-\frac{5\pi}{6}<x<-\frac{2\pi}{3}\ ;\ k=0\Rightarrow\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$$

$$k=1\Rightarrow\frac{7\pi}{6}<x<\frac{4\pi}{3}\ ;\boxed{S=\left]-\frac{5\pi}{6};-\frac{2\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{6};\frac{4\pi}{3}\right[}$$

.6 اثبات أنّ:

$$\sin\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}-\sin\frac{7\pi}{8}=0\ \ldots ①$$

$$\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}=2\ \ldots ②$$

تذكير : $\boxed{\sin a-\sin b=2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\ ;2\sin^2 x=1-\cos 2x}$

① $\sin\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}-\sin\frac{7\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{8}-\sin\frac{7\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}$

$$=2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{8}-\frac{7\pi}{8}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{0}$$

② $\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sin^2\frac{\pi}{8}+2\sin^2\frac{3\pi}{8}+2\sin^2\frac{5\pi}{8}+2\sin^2\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}+1-\cos\frac{3\pi}{4}+1-\cos\frac{5\pi}{4}+1-\cos\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

.7 تعيين قيس لكل زاوية من الزوايا الموجهة التالية:

$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{FD}\right);\ \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right);\ \left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DF}\right);\ \left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DC}\right);\ \left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AB}\right);\ \left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DE}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DE}\right)=\left(-\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DE}\right)=\pi+\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DE}\right)=\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{11\pi}{6}}$$

$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AB}\right)=\boxed{0}$$

$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DC}\right)=\left(-\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)=\pi+\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)=\pi+\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DF}\right)=\left(-\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DF}\right)=\pi+\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DF}\right)=\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{13\pi}{6}=\boxed{\frac{\pi}{6}}$$

$$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$

ط ① ... $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{FD}\right)=\left(\overrightarrow{AD};-\overrightarrow{DF}\right)=\pi+\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DF}\right)=\pi+\frac{\pi}{6}=\boxed{\frac{7\pi}{6}}$

ط ② ... $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{FD}\right)=\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DF}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{7\pi}{6}}$

التمرين الثالث :

1. التحقق أنّ: $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}^2$

بما أنّ $\overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{AC}$ فالنقطة A هي المسقط العمودي للنقطة I على (AC) ومنه:

$$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}=\boxed{\overrightarrow{CA}^2}$$

استنتاج قيس الزاوية $\widehat{ACI}$

$$CI^2=CA^2+AI^2=20\Rightarrow CI=2\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA}=\left\|\overrightarrow{CI}\right\|.\left\|\overrightarrow{CA}\right\|.\cos\widehat{ACI}\Rightarrow\cos\widehat{ACI}=\frac{\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CI}\right\|.\left\|\overrightarrow{CA}\right\|}=\frac{\overrightarrow{CA}^2}{\left\|\overrightarrow{CI}\right\|.\left\|\overrightarrow{CA}\right\|}$$

$$\cos\widehat{ACI}=\frac{16}{8\sqrt{5}}\approx 0,89\Rightarrow\boxed{\widehat{ACI}\approx 26,57°}$$

2. حساب $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{JA}$ و$\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AB}$

$$\frac{CJ}{CA}=\frac{CK}{CI}=\frac{1}{2}\xrightarrow[\text{نظرية طاليس العكسية}]{}\overrightarrow{JK}\parallel\overrightarrow{AI}\Rightarrow\overrightarrow{JK}\perp\overrightarrow{JA}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{JA}=0}$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{JK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}\\ \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{JK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AB}=4}$$

3. بيان أنّ المستقيمين (JB) و(AK) متعامدان

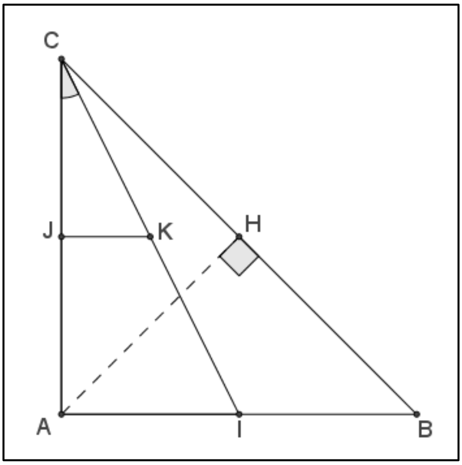
$$\overrightarrow{JB}.\overrightarrow{AK}=\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JK}\right)=\underbrace{\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{AJ}}_{-4}+\underbrace{\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JK}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{JK}}_{4}$$

$$\overrightarrow{JB}.\overrightarrow{AK}=0\Rightarrow\boxed{(JB)\perp(AK)}$$

.4 حساب AH

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 32 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{BC \times AH}{2} \Rightarrow AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{16}{4\sqrt{2}} = \boxed{2\sqrt{2}}$$



* * *

الموضوع التاسع

التمرين الأول :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

1. اثبات أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$ واستنتاج $f'(2)$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2(2+h)+3-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h+4-4-2h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0} h+2 = \boxed{2}$$

منه نستنتج أنّ الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$ و $f'(2) = 2$.

2. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 2.

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2) = 2(x-2) + 3 \Rightarrow \boxed{(T): y = 2x - 1}$$

3. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجالين $]-\infty;1]$ و $[1;+\infty[$،

$$f'(x) = 2x - 2\ ;\ f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

- من أجل $x \in]-\infty;1]$، $f'(x) \leq 0$ ومنه الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$
- من أجل $x \in [1;+\infty[$، $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

4. اثبات أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

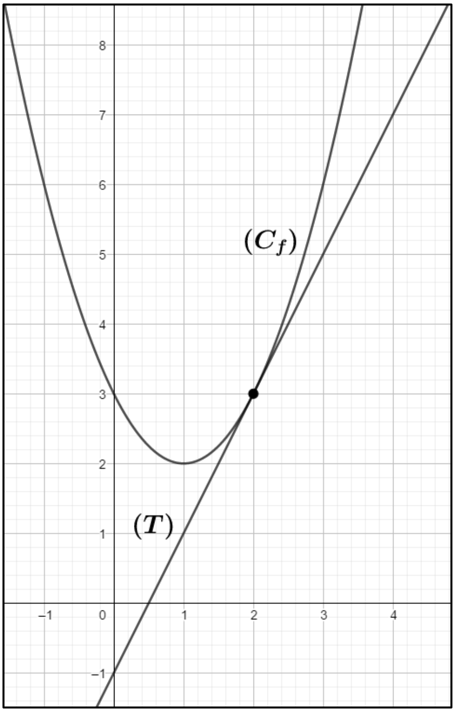
$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$$

$$y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow Y = (X+1)^2 - 2(X+1) + 3 \Rightarrow Y = X^2 + 2$$

بما أنّ الدالة $X^2 + 2$ زوجية، فإنّ منحناها البياني يقبل محور تناظر معادلته $X = 0$

ومنه نستنتج أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

5. رسم المماس (T) والمنحنى (C_f).



* * *

التمرين الثاني :

نعتبر العبارة: $P(x) = 2\sin^2 x - 10\sin x\,.\cos x + 12\cos^2 x$

1. بيان أنّ من أجل كل x: $2\sin^2 x + 12\cos^2 x = 7 + 5\cos 2x$

$$\begin{aligned} 7 + 5\cos 2x &= 7(\cos^2 x + \sin^2 x) + 5(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \boxed{12\cos^2 x + 2\sin^2 x} \end{aligned}$$

2. استنتاج أنّ: $P(x) = 7 + 5\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned} P(x) &= 2\sin^2 x - 10\sin x\,.\cos x + 12\cos^2 x \\ &= (2\sin^2 x + 12\cos^2 x) - 5(2\sin x\,.\cos x) \\ &= 7 + 5\cos 2x - 5\sin 2x = 7 + 5(\cos 2x - \sin 2x) \\ &= 7 + 5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) \\ &= 7 + 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right) \\ &= \boxed{7 + 5\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

3. حل في المجال $]-\pi;\pi]$ المعادلة: $P(x) = 7$ وتمثيل صور الحلول على الدائرة

$$P(x) = 7 \Rightarrow 5\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2}$$

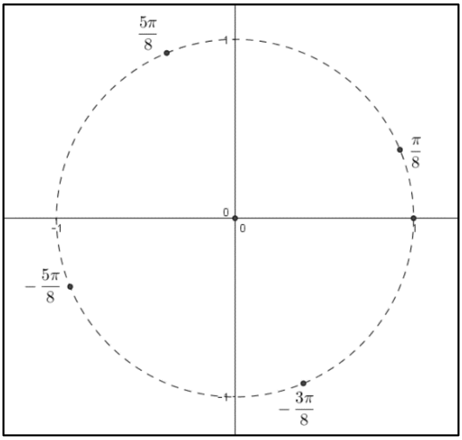
$2x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+2k\pi$ أو $2x+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$2x = \frac{\pi}{4}+2k\pi$ أو $2x = -\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

$x = \frac{\pi}{8}+k\pi$ أو $x = -\frac{3\pi}{8}+k\pi$

$$k=-1: x = -\frac{7\pi}{8}\ ;\ k=0: x\in\left\{-\frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right\}\ ;\ k=1: x=\frac{5\pi}{8}$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{7\pi}{8};-\frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{8}\right\}}$$



4. حل في المجال $\left]-\frac{5\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right]$ المعادلة: $P(x) < 7$

$$x\in\left]-\frac{5\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right] \Rightarrow \left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in\ ]-\pi;\pi];\ P(x) < 7 \Rightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left]\frac{\pi}{2};\pi\right] \Rightarrow (2x)\in\left]-\frac{5\pi}{4};-\frac{3\pi}{4}\right]\cup\left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{x\in\left]-\frac{5\pi}{8};-\frac{3\pi}{8}\right]\cup\left]\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right]}$$

* * *

التمرين الثالث :

1. حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ واستنتاج BC

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\widehat{BAC} = 24 \times \frac{1}{2} = \boxed{12}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 28 \Rightarrow \boxed{BC = 2\sqrt{7}}$$

2. حساب مساحة المثلث ABC

$$S = \frac{AB.AC.\sin\widehat{BAC}}{2} = \frac{24\sqrt{3}}{4} = \boxed{6\sqrt{3}}$$

3. حساب $\sin\widehat{ABC}$ واستنتاج قيمة مقرّبة إلى $0,1$ بالدرجات للزاوية $\widehat{ABC}$

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin\widehat{ABC}} \Rightarrow \sin\widehat{ABC} = \frac{AC.\sin\widehat{BAC}}{BC} = \frac{6\sqrt{3}}{4\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{ABC} \approx 79°}$$

4. بيان أنّ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB.AH = 4 \times 3 = 12 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$$

استنتاج أن المستقيمين (AB) و (CH) متعامدان

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$

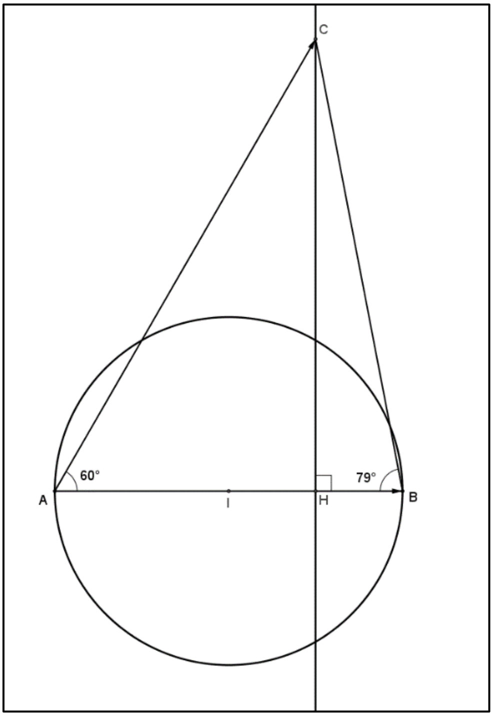
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = 0 \Rightarrow \boxed{(AB) \perp (CH)}$$

5. تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2 + MB^2 = 16$

$$MA^2 + MB^2 = 16 \Rightarrow 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 16 \Rightarrow MI^2 = 8 - \frac{1}{4}AB^2$$

$$= 8 - \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow \boxed{MI = 2}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA^2 + MB^2 = 16$ هي الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها 2 أي الدائرة التي قطرها $[AB]$.


C
60°
79°
A
I
H
B

* * *

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

$f(x) = \frac{3x+2}{(x+1)^2}\ ; Df = \mathbb{R} - \{-1\}$

1. حساب النهايات للدالة f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{3x+2 \to -1}{(x+1)^2 \to 0^+} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{3x+2 \to -1}{(x+1)^2 \to 0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$$

تفسير النتائج هندسيا :

مستقيم مقارب أفقي $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$

مستقيم مقارب عمودي $\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -1$

2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f

$$f'(x) = \frac{3(x+1)^2 - 2(x+1)(3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)[3(x+1) - 2(3x+2)]}{(x+1)^4} = \boxed{\frac{-3x-1}{(x+1)^3}}$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x-1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

الدالة f متناقصة $x \in]-\infty; -1[\cup \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[: f'(x) < 0 \Rightarrow$

الدالة f متزايدة $x \in \left]-1; -\frac{1}{3}\right] : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$

جدول تغيّرات الدالة f

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	0

.3 تعيين تقاطع ($\mathcal{C}_f$) مع حاملي المحورين

$$f(x)=0 \Rightarrow 3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}\ ;\ f(0)=2$$

المنحنى ($\mathcal{C}_f$) يقطع محور الفواصل عند النقطة $\left(-\frac{2}{3};0\right)$ ، ويقطع محور التراتيب عند النقطة $(0;2)$

.4 كتابة معادلة المماس لـ ($\mathcal{C}_f$) و الذي يشمل النقطة $\boldsymbol{A(-1,3)}$

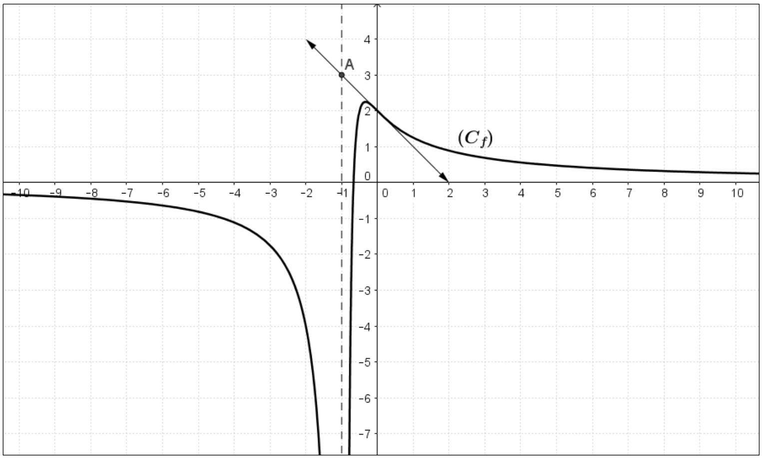
لتكن $M(x_0;f(x_0))$ النقطة التي يقبل عندها المنحنى ($\mathcal{C}_f$) مماسا يشمل النقطة A

$$\boldsymbol{y}=f'(x_0)(\boldsymbol{x}-x_0)+f(x_0) \Rightarrow \boldsymbol{3}=\frac{-3x_0-1}{(x_0+1)^3}(\boldsymbol{-1}-x_0)+\frac{3x_0+2}{(x_0+1)^2}$$

$$\Rightarrow 3=\frac{6x_0+3}{(x_0+1)^2} \Rightarrow 3(x_0+1)^2=6x_0+3 \Rightarrow x_0^2=0 \Rightarrow x_0=0$$

$$\Rightarrow M(0;2) \Rightarrow \boxed{y=-x+2}$$

.5 رسم المنحنى ($\mathcal{C}_f$)



.6 دراسة عدد حلول المعادلة : $\boldsymbol{mx^2+(2m-3)x+m-2=0}$

$$mx^2+(2m-3)x+m-2=0 \Rightarrow mx^2+2mx-3x+m-2=0$$

$$\Rightarrow m(x^2+2x+1)=3x+2 \Rightarrow m=\frac{3x+2}{(x+1)^2} \Rightarrow m=f(x)$$

ندرس تقاطع المستقيم ذي المعادلة $y=m$ مع المنحنى ($\mathcal{C}_f$)

- $m\in\,]-\infty;0[$: المعادلة تقبل حلين متمايزين

- $m = 0$: المعادلة تقبل حلا وحيدا
- $m \in \left]0; \frac{9}{4}\right[$: المعادلة تقبل حلين متمايزين
- $m = \frac{9}{4}$: المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $m \in \left]\frac{9}{4}; +\infty\right[$: المعادلة لا تقبل حلولا

* * *

التمرين الثاني :

1. **تعيين قيس للزاوية الموجهة $(2\vec{u}; -3\vec{v})$**

$$(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow (2\vec{u}; -3\vec{v}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

2. **حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$**

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 2x + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{أو} \quad x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi; -\frac{5\pi}{12} + k\pi\right\}}$$

3. **حل في المجال $[0; \pi[$ المتراجحة: $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$**

$$\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right[}$$

4. **تعيين القيس الرئيسي للزاوية α ، ثمّ حساب $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$**

$$\alpha = \frac{2019\pi}{6} = \frac{2016\pi + 3\pi}{6} = 336\pi + \frac{3\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}\cos\alpha = 0\\ \sin\alpha = 1\end{cases}}$$

5. **تبسيط العبارة A**

$$A = \sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$$

$$= \sin\frac{\pi}{5} + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\frac{\pi}{5} + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{5} = \boxed{0}$$

* * *

التمرين الثالث :

$\boldsymbol{A(1;0)}$ ، $\boldsymbol{B(-3;4)}$ ، $\boldsymbol{C(3;2)}$ ، $(\Delta): \boldsymbol{x+y+1=0}$ ، $\boldsymbol{(\Gamma): x^2+y^2-6y-1=0}$.

1. **حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ وتعيين طبيعة المثلث ABC**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}.\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$$

2. **التحقق أنّ (Γ) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC**

طريقة ①:

$$\begin{cases} x_A^2+y_A^2-6y_A-1=0 \Rightarrow A\in(\Gamma) \\ x_B^2+y_B^2-6y_B-1=0 \Rightarrow B\in(\Gamma) \\ x_C^2+y_C^2-6y_C-1=0 \Rightarrow C\in(\Gamma) \end{cases} \Rightarrow \boxed{(\Gamma) \text{ هي الدائرة المحيطة بالمثلث } ABC}$$

طريقة ②:

$$M(x;y)\in(\Gamma) \Rightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+3\\y-4\end{pmatrix}.\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-6y-1=0}$$

3. **كتابة معادلة ديكارتية للدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{2}$.**

$$M(x;y)\in(C) \Rightarrow BM^2=\sqrt{2}^2 \Rightarrow (x+3)^2+(y-4)^2=2$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2+6x-8y+23=0}$$

4. **حساب المسافة بين B و(Δ).**

$$d[B;(\Delta)]=\frac{|-3+4+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{2}}$$

5. **تعيين وضعية (Δ) بالنسبة للدائرة $(\mathcal{C})$.**

بما أنّ $d[B;(\Delta)]=\sqrt{2}$ نستنتج أنّ المستقيم (Δ) مماس للدائرة (C) عند النقطة B

6. **بيان أنّ المستقيم (Δ) يقطع الدائرة (Γ) في نقطتين متمايزتين يُطلب تعيينهما.**

$$M(x;y)\in(\Delta)\cap(\Gamma) \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x^2+y^2-6y-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+(-x-1)^2-6(-x-1)-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-x-1 \\ 2x^2+8x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=0 \end{cases};\begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta)\cap(\Gamma)=\{(-1;0);(-3;2)\}}$$

7. **بيان أنّ الدائرة $(\mathcal{C})$ هي صورة الدائرة (Γ) بتحاك h يُطلب تعيين مركزه ونسبته.**

ليكن R وr نصفي قطر الدائرتين (C) و(Γ) على الترتيب وI مركز الدائرة $(\mathcal{C})$.

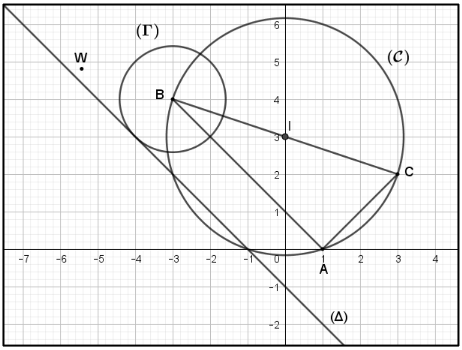
وليكن التحاكي h الذي مركزه W ونسبته k. لدينا:

$$R=\frac{BC}{2}=\sqrt{10}\,;r=\sqrt{2}\,;(\mathcal{C})=h(\Gamma)\Rightarrow R=k\times r\Rightarrow k=\frac{R}{r}=\boxed{\sqrt{5}}$$

$$(\mathcal{C})=h(\Gamma)\Rightarrow\overrightarrow{WI}=k\overrightarrow{WB}\Rightarrow\begin{cases}-x_W=\sqrt{5}(-3-x_W)\\3-y_W=\sqrt{5}(4-y_W)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{5}-1\right)x_W=-3\sqrt{5}\\\left(\sqrt{5}-1\right)y_W=4\sqrt{5}-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_W=-\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{-15-3\sqrt{5}}{4}\\y_W=\dfrac{4\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{17+\sqrt{5}}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{W\left(\frac{-15-3\sqrt{5}}{4};\frac{17+\sqrt{5}}{4}\right)}$$



* * *

الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول :

$$f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x-1}{2x-3}\ ;\ Df=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

I- تعيين α و β حتى يكون $(T): y=-3x+3$ مماسا لـ $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$f'(x)=\frac{(2\alpha x+\beta)(2x-3)-2(\alpha x^2+\beta x-1)}{(2x-3)^2}=\frac{2\alpha x^2-6\alpha x-3\beta+2}{(2x-3)^2}$$

$$f'(1)=-4\alpha-3\beta+2$$

$$(T): y=-3(x-1)+f(1)=-3x+3+f(1)$$

$$\begin{cases}f'(1)=-3\\ f(1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\alpha-3\beta=-5\\ -\alpha-\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\alpha-3\beta=-5\\ 3\alpha+3\beta=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{f(x)=\frac{2x^2-x-1}{2x-3}}$$

II- نضع : $\alpha=2$ و $\beta=-1$

1. تعيين a ، b ، c حيث : $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-3}$

$$\begin{array}{c|c} 2x^2-x-1 & 2x-3 \\ \cline{2-2} -2x^2+3x & x+1 \\ 2x-1 & \\ -2x+3 & \\ 2 & \end{array}\quad\Rightarrow\boxed{f(x)=x+1+\frac{2}{2x-3}}$$

دراسة تغيرات الدالة f

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x+1+\frac{2}{2x-3}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x+1+\frac{2}{2x-3}=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{3}{2}}f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{3}{2}}x+1+\frac{2}{2x-3}\begin{matrix}\to 2\\ 0^-\end{matrix}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}\frac{3}{2}}f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}\frac{3}{2}}x+1+\frac{2}{2x-3}\begin{matrix}\to 2\\ 0^+\end{matrix}=\boxed{+\infty}$$

$$f'(x)=1-\frac{4}{(2x-3)^2}=\frac{(2x-3)^2-4}{(2x-3)^2}=\boxed{\frac{(2x-1)(2x-5)}{(2x-3)^2}}$$

$x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right[: f'(x)\geq 0\Rightarrow$ الدالة f متزايدة

$x \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right[: f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة f متناقصة

جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty \Vert +\infty$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$

2. إثبات أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x + 1$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{2}{2x-3} = 0 \implies (\Delta): y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل

3. دراسة وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة لـ (Δ)

$f(x) - (x+1) = \frac{2}{2x-3} \; ; x \in \left]-\infty;\frac{3}{2}\right[: \; 2x - 3 < 0 \implies (\Delta)$ تحت (Cf)

$x \in \left]\frac{3}{2};+\infty\right[: \; 2x - 3 > 0 \implies (\Delta)$ فوق (Cf)

4. إثبات أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل كمركز تناظر له نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين

$$(\Delta) \cap (D) = w(x;y) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{w\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)}$$

$w\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (Cf) $\Rightarrow \begin{cases} x \in Df \Rightarrow 3 - x \in Df \\ f(3-x) + f(x) = 5 \end{cases}$

$$x \in Df \Rightarrow x \neq \frac{3}{2} \Rightarrow -x \neq -\frac{3}{2} \Rightarrow 3 - x \neq \frac{3}{2} \Rightarrow 3 - x \in Df$$

$$f(3-x) + f(x) = 3 - x + 1 + \frac{2}{2(3-x)-3} + x + 1 + \frac{2}{2x-3}$$

$$= 5 + \frac{2}{2x-3} - \frac{2}{2x-3} = 5$$

منه النقطة $w\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$ مركز تناظر لـ ($\mathscr{C}_f$)

5. إثبات وجود مماسين لـ ($\mathscr{C}_f$) معامل توجيه كل منهما هو (-3)

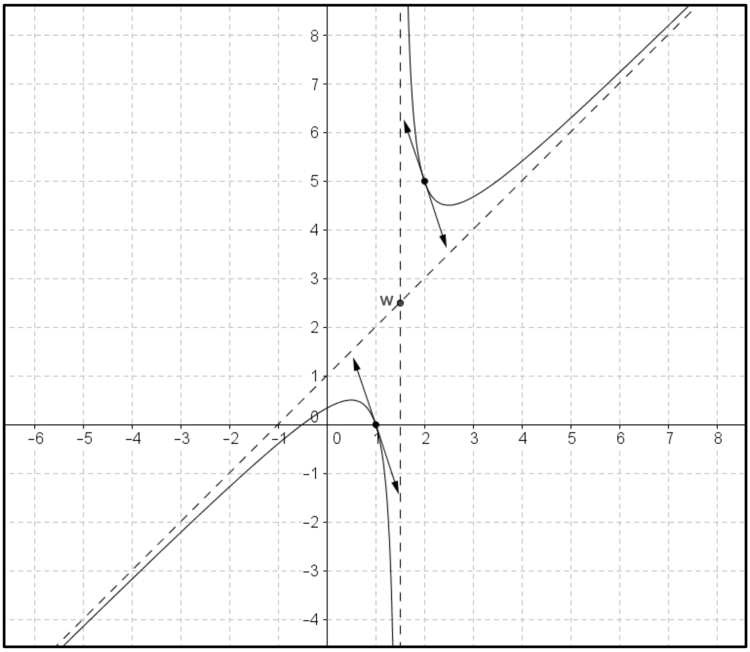
$$f'(x) = -3 \Rightarrow 1 - \frac{4}{(2x-3)^2} = -3 \Rightarrow \frac{1}{(2x-3)^2} = 1 \Rightarrow (2x-3)^2 = 1$$

$\Rightarrow (2x-2)(2x-4) = 0 \Rightarrow x = 1$ أو $x = 2$

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = -3(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -3x + 3}$$

$$(T'): y = f'(2)(x-2) + f(2) = -3(x-2) + 5 \Rightarrow \boxed{y = -3x + 11}$$

6. انشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمماسين



7. مناقشة عدد نقط تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم (Δ_m) ذي المعادلة $y = -3x + m$

- $m \in]-\infty; 3[\cup]11; +\infty[$: (Δ_m) يقطع $(\mathscr{C}_f)$ في نقطتين
- $m \in \{3; 11\}$: (Δ_m) يمسّ $(\mathscr{C}_f)$ في نقطة
- $m \in]3; 11[$: (Δ_m) لا يقطع $(\mathscr{C}_f)$

III- $g(x) = \frac{2x^2-|x|-1}{2|x|-3}$

1. إثبات أنّ g دالة زوجية

$2|x| - 3 = 0 \Rightarrow |x| = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ أو $x = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow Dg = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

لدينا Dg متناظر بالنسبة إلى الصفر ومن أجل كل عدد حقيقي x من Dg :

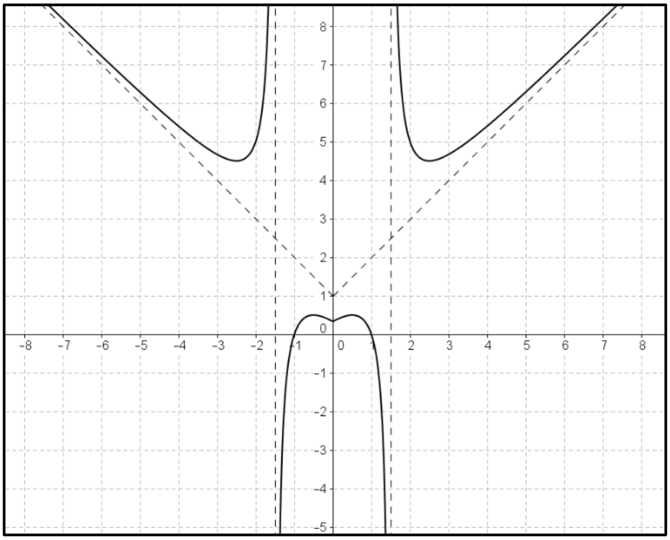
$g(-x) = \frac{2x^2-|-x|-1}{2|-x|-3} = \frac{2x^2-|x|-1}{2|x|-3} = g(x)$ ، منه الدالة g زوجية

2. بيان كيفية انشاء $(\mathscr{C}_g)$ انطلاقا من $(\mathscr{C}_f)$

$x \in \left]0; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[:\ |x| = x \ \Rightarrow g(x) = f(x)$

على المجال $\left]0;\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ يكون المنحنيان $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_f)$ متطابقين ، أمّا على المجال $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2};0\right[$ نرسم $(\mathscr{C}_g)$ بالتناظر المحوري (لأنّ الدالة g زوجية)

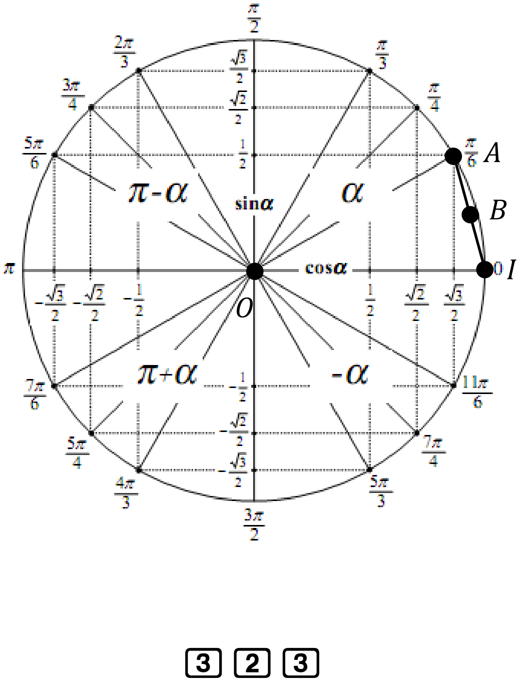
3. انشاء المنحنى $(\mathscr{C}_g)$



* * *

التمرين الثاني :

-I



1. **تعيين الإحداثيات الديكارتية للنقطتين $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$**

$$A\left(\cos\frac{\pi}{6};\sin\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow\boxed{A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

$$[AI]\text{ منتصف } B\Rightarrow B\left(\frac{x_A+x_I}{2};\frac{y_A+y_I}{2}\right)\Rightarrow B\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2};\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{B\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4};\frac{1}{4}\right)}$$

2. **بيان أنّ: $\boldsymbol{OB=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$**

$$OB=\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{16}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

3. **تعيين القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $\boldsymbol{(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})}$**

بما أنّ المثلث OAI متساوي الساقين والنقطة B منتصف $[AI]$ فإنّ المستقيم (OB) منصّف للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})$ ومنه:

$$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA})=\boxed{\frac{\pi}{12}}$$

استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{12}}$

$$\cos\frac{\pi}{12}=x_B=\boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

II- نفرض الآن أنّ: $\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

1. **حساب القيمتين المضبوطتين لـ $\boldsymbol{\cos\frac{11\pi}{12}}$ و $\boldsymbol{\sin\frac{7\pi}{12}}$**

$$\cos\frac{11\pi}{12}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{12}=\boxed{-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

2. **حل في المجال $\boldsymbol{[0;2\pi[}$ المعادلة ذات المجهول $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{\sqrt{3}-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0}$**

$$\sqrt{3}-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$$

$x-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ أو $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$x=\frac{11\pi}{12}+2k\pi$ أو $x=\frac{7\pi}{12}+2k\pi$

$$\boxed{S=\left\{\frac{7\pi}{12}\,;\frac{11\pi}{12}\right\}}$$

* * *

التمرين الثالث :

$$(\boldsymbol{C_m}):\boldsymbol{x^2+y^2-2mx-1=0}$$

1. بيان أنّ $(\boldsymbol{C_m})$ دائرة يُطلب تعيين مركزها $\boldsymbol{w_m}$ ونصف قطرها $\boldsymbol{r_m}$

$$x^2+y^2-2mx-1=0\Rightarrow(x-m)^2-m^2+y^2-1=0$$
$$\Rightarrow(x-m)^2+y^2=m^2+1$$

منه نستنتج أنّ (C_m) دائرة مركزها $w_m(m;0)$ ونصف قطرها $r_m=\sqrt{m^2+1}$

2. بيان أنّ جميع الدوائر $(\boldsymbol{C_m})$ تشمل نقطتين ثابتتين يُطلب تعيينهما

$$\forall m\in\mathbb{R}:x^2+y^2-2mx-1=0\Rightarrow-2xm+x^2+y^2-1=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-2x=0\\x^2+y^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y^2=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{A(0;-1);B(0;1)}$$

3. تعيين مجموعة النقط $\boldsymbol{w_m}$ لمّا $\boldsymbol{m}$ يمسح $\mathbb{R}$

بما أنّ ترتيب النقطة w_m ثابت، نستنتج أنّ مجموعة النقط w_m لمّا m يمسح $\mathbb{R}$ هي المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (محور الفواصل).

* * *

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول :

I- $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\ ;Df=\mathbb{R}-\{-1\}$

1. دراسة تغيرات الدالة f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\boxed{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\boxed{1}$$

$$\lim_{\overset{<}{x\to-1}} f(x)=\lim_{\overset{<}{x\to-1}}\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\begin{matrix}\to -4\\ \to 0^+\end{matrix}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\overset{>}{x\to-1}} f(x)=\lim_{\overset{>}{x\to-1}}\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\begin{matrix}\to -4\\ \to 0^+\end{matrix}=\boxed{-\infty}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)\left(x^2+2x-3\right)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)[(x+1)^2-\left(x^2+2x-3\right)]}{(x+1)^4}=\boxed{\frac{8}{(x+1)^3}}$$

$x<-1\Rightarrow x+1<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow$ الدالة f متناقصة

$x>-1\Rightarrow x+1>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$ الدالة f متزايدة

جدول تغيّرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

2. تعيين المستقيمات المقاربة لـ $(\mathscr{C}_f)$

المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=-1$ وآخر أفقيا معادلته $y=1$

3. تعيين معادلة المماس (T)

لتكن x_0 الفاصلة التي يكون عندها (T) مماسا لـ $(\mathscr{C}_f)$ ، لدينا :

$$f'(x_0)=1\Rightarrow\frac{8}{(x_0+1)^3}=1\Rightarrow(x_0+1)^3=8\Rightarrow x_0+1=2\Rightarrow x_0=1$$

$$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)\Rightarrow\boxed{(T):y=x-1}$$

4. انشاء (T) و($\mathscr{C}_f$) : (انظر الشكل أسفله)

II- 1. تعيين العددين الحقيقيين α و β حتى يكون $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{(x+1)^2}$

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1\,;\ \beta = -4}$$

.2 $g(x) = \frac{-4}{x^2+2x+1}$; $Dg = \mathbb{R} - \{-1\}$

- **تعيين γ حتى يكون من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $g(x) = f(x) + \gamma$**

$$g(x) = -\frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow g(x) = f(x) - 1 \Rightarrow \boxed{\gamma = -1}$$

- **استنتاج جدول تغيرات الدالة g ، ثمّ أنشئ المنحنى ($\mathscr{C}_g$)**

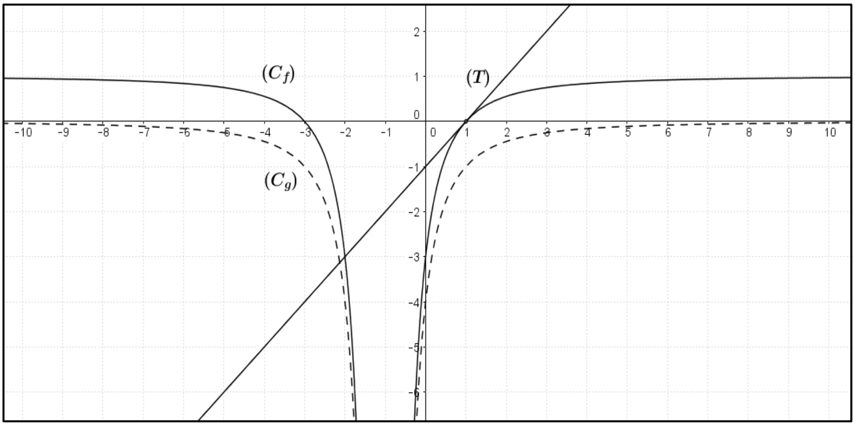
$$g(x) = f(x) - 1 \Rightarrow g'(x) = f'(x)$$

منه الدالة g لها نفس اتجاه تغيّر الدالة f ، والمنحنى ($\mathscr{C}_g$) هو صورة المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-1)$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	‖	$+$
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow 0$

انشاء المنحنى ($\mathscr{C}_g$)



* * *

التمرين الثاني :

1. برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

$$\frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1+2\cos^2(x)-1}{2} = \frac{2\cos^2(x)}{2} = \boxed{\cos^2(x)}$$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 = 0$

$$\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$$

$X = \cos(x)\,;\, 2X^2 - 3X + 1 = 0 \Rightarrow X = 1$ أو $X = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = 1$ أو $\cos x = \frac{1}{2}$

$\underbrace{\cos x = \cos 2k\pi}$ أو $\underbrace{\cos x = \cos\frac{\pi}{3}}$

$x = 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$\boxed{S = \left\{2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\}}$$

3. ليكن a عدد حقيقي من المجال $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ حيث: $\cos(a) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

أ. التحقق من أنّ: $\sin(a) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ثمّ حساب $\cos(2a)$

$$\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(a) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) - 1$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2} - 1 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

ب. استنتاج قيمة a

$$\cos(2a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2a = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{a = \frac{\pi}{12}}\ ; \left(a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow 2a \in]0; \pi[\right)$$

ج. تعيين القيمة المضبوطة لكل من العددين: $\sin(4a + 2019\pi)$

و $\cos(4a + 1440\pi)$

$$\sin(4a + 2019\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos(4a + 1440\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

* * *

التمرين الثالث :

$A(2;0)$ ، $B(3;1)$ ، $C(-1;3)$ ، $D(1;2)$ ، $(\Delta): 2x + y = 0$.

$(\Gamma): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

1. **حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ وتعيين طبيعة المثلث ABC.**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix} = -3 + 3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$$

2. **حساب الأطوال DA ، DB ، DC.**

$$DA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\,;\; DB = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}\,;$$
$$DC = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

3. **التحقق أنّ (Γ) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.**

طريقة ①:

$$\begin{cases} x_A^2 + y_A^2 - 2x_A - 4y_A = 0 \Rightarrow A \in (\Gamma) \\ x_B^2 + y_B^2 - 2x_B - 4y_B = 0 \Rightarrow B \in (\Gamma) \\ x_C^2 + y_C^2 - 2x_C - 4y_C = 0 \Rightarrow C \in (\Gamma) \end{cases} \Rightarrow \boxed{(\Gamma) \text{ هي الدائرة المحيطة بالمثلث } ABC}$$

طريقة ②:

$$M(x;y) \in (\Gamma) \Rightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}.\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow (x-3)(x+1) + (y-1)(y-3) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0}$$

طريقة ③:

$$M(x;y) \in (\Gamma) \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \Rightarrow \boxed{(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5}$$

منه نستنتج أنّ (Γ) هي الدائرة التي مركزها $D(1;2)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{5}$ وبما أنّ: $DA = DB = DC = \sqrt{5}$ فإنّ (Γ) هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

4. **حساب المسافة بين D و(Δ) وتعيين وضعية (Δ) بالنسبة للدائرة (Γ).**

$$d[D;(\Delta)] = \frac{|2(1) + 1(2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{4\sqrt{5}}{5}}$$

$$d[D;(\Delta)] < \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{\text{المستقيم } (\Delta) \text{ يقطع الدائرة } (\Gamma) \text{ في نقطتين}}$$

5. تعيين معادلة لصورة الدائرة (Γ) بالتحاكي h الذي مركزه B ونسبته -1.

صورة الدائرة (Γ) بالتحاكي h الذي مركزه B هي الدائرة (Γ') التي مركزها D' ونصف قطرها r' حيث: $D' = h(D)$ و $r' = r$.

$$D' = h(D) \Rightarrow \overrightarrow{BD'} = -\overrightarrow{BD} \Rightarrow \begin{cases} x_{D'} - 3 = 2 \\ y_{D'} - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{D'} = 5 \\ y_{D'} = 0 \end{cases}$$

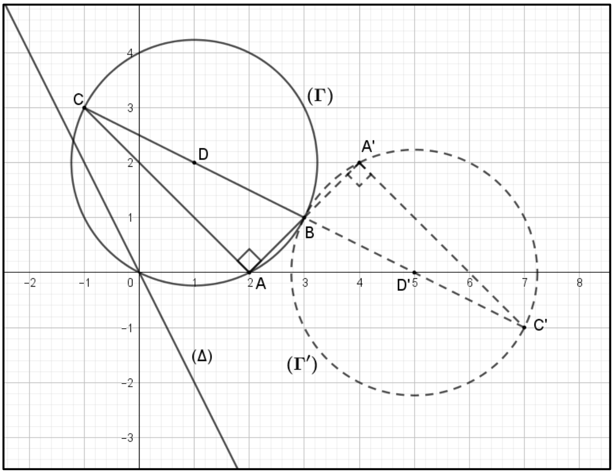
$$M(x;y) \in (\Gamma') \Rightarrow (x-5)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0}$$

6. استنتاج نوع المثلث $A'BC'$

$$\begin{cases} h(A) = A' \\ h(B) = B \\ h(C) = C' \end{cases} \Rightarrow h(ABC) = A'BC' \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } A'BC' \text{ قائم في } A'}$$

بيان أنّ $\mathcal{S}_{ABC} = \mathcal{S}_{A'BC'}$.

$$h(ABC) = A'BC' \Rightarrow \mathcal{S}_{ABC} = |-1| \times \mathcal{S}_{A'BC'} \Rightarrow \boxed{\mathcal{S}_{ABC} = \mathcal{S}_{A'BC'}}$$



* * *

جدول
الاختبارات
الفصل
الثالث

الموضوع الأول

التمرين الأول :

I- $AB = 2a$ ، $AC = a$ ، $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

1. حساب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}$ و$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AK}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -AB^2 = \boxed{-4a^2}$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA} = CA^2 = \boxed{a^2}$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB}.\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{1}{4}AB^2 = \boxed{-a^2}$$

2. بيان أنّ المستقيمين (BD) و(CK) متعامدان.

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CK} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK}\right)$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}}_{0} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA} + \underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK}}_{0} = -a^2 + a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(BD) \perp (CK)}$$

3. تعيين التحويل الذي يحوّل B إلى K

بما أنّ $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$، فإنّ K هي صورة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{4}$

تعيين التحويل الذي يحوّل K إلى B

بما أنّ $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AK}$، فإنّ B هي صورة K بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 4

II- $A(-2;2)$ ، $B(2;2)$ و $C(-2;4)$.

1. بيان أنّ المثلث ABC قائم في A.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$$

2. كتابة معادلة ديكارتية للدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها A وطول نصف قطرها AB.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \Rightarrow AB = 4\,;\ M \in (\mathcal{C}) \Rightarrow AM^2 = 4^2 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(\mathcal{C}): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0}$$

3. كتابة معادلة ديكارتية للدائرة $(\mathcal{C}')$ صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ بالتحاكي h

بما أنّ الدائرة $(\mathcal{C}')$ صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{4}$،

نستنتج أنّ الدائرة $(\mathcal{C}')$ مركزها A ونصف قطرها $\frac{1}{4} \times 4 = 1$، ومنه:

$$M \in (\mathcal{C}') \Rightarrow AM^2 = 1^2 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{(\mathcal{C}'): x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0}$$

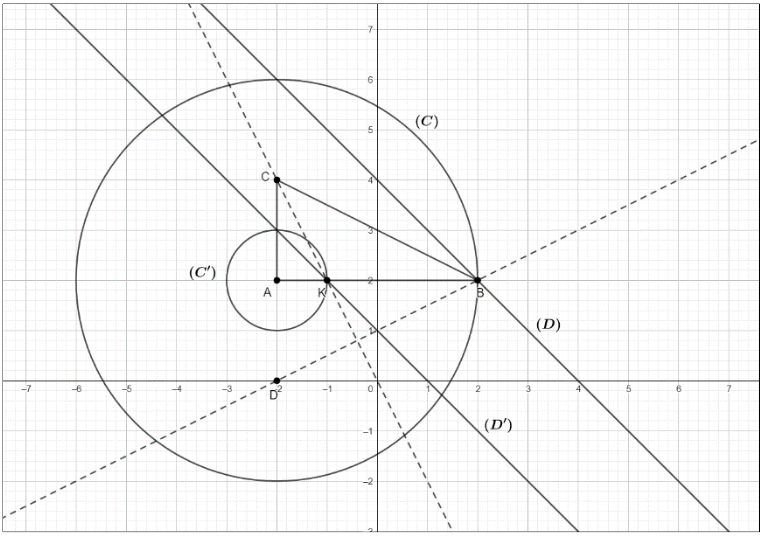
4. بيان أنّ النقطة B تنتمي إلى المستقيم (D) الذي معادلته: $x + y - 4 = 0$

$$x_B + y_B - 4 = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{B \in (D)}$$

استنتاج معادلة المستقيم (D') صورة المستقيم (D) بالتحاكي h.

لدينا (D') صورة (D) بالتحاكي h و K صورة B بنفس التحاكي، ومنه فإنّ (D') هو المستقيم الموازي للمستقيم (D) ويشمل النقطة K.

$$M \in (D') \Rightarrow \begin{cases} (D') \parallel (D) \\ K \in (D') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D') : y = -x + b \\ 2 = -(-1) + b \end{cases} \Rightarrow \boxed{(D') : y = -x + 1}$$



* * *

التمرين الثاني :

$u_0 = -1$ ، $3u_{n+1} = u_n + 4$

1. حساب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3

$$u_1 = \frac{u_0 + 4}{3} = \boxed{1} \; ; \; u_2 = \frac{u_1 + 4}{3} = \boxed{\frac{5}{3}} \; ; \; u_3 = \frac{u_2 + 4}{3} = \boxed{\frac{17}{9}}$$

2. $v_n = u_n - 2$

أ. بيان أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}(u_n + 4) - 2 = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(u_n - 2) = \frac{1}{3}v_n$$

منه نستنتج أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول -3 $v_0 = u_0 - 2 = -3$

ب. كتابة عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-3\left(\frac{1}{3}\right)^n} ; u_n = v_n + 2 = \boxed{-3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2}$$

ج. حساب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = v_0 + 2 + v_1 + 2 + \cdots + v_n + 2$$

$$S_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) + 2(n+1) = -3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) + 2(n+1)$$

$$S_n = -\frac{9}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + 2n + 2 = \boxed{\frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 2n - \frac{5}{2}}$$

* * *

التمرين الثالث :

نعتبر النقط $A(-2,0,1)$ ، $B(1,0,-3)$ ، $C(2,1,0)$ ، $D(1,2,-2)$

1. دراسة تعامد المستقيمين (AB) و (CD)

$\overrightarrow{AB}\ (3;0;-4)$; $\overrightarrow{CD}\ (-1;1;-2)$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} - 3 + 8 = 5$

$\Rightarrow$ (AB) لا يعامد (CD)

2. بيان أنّ النقط A ، B ، C تعين مستويا

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\frac{3}{4} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

$\Rightarrow$ (ABC) مستوي

3. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC). لدينا :

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3a - 4c = 0\\ 4a + b - c = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = \frac{4}{3}c\\ b = -\frac{13}{3}c\end{cases}$$

نفرض $c = 3$ ، منه : $a = 4$ ، $b = -13$ ، $\vec{n}(4;-13;3)$

$$(ABC): 4x - 13y + 3z + d = 0 ; A \in (ABC) \Rightarrow 4(-2) + 3(1) + d = 0 \quad \Rightarrow d = 5 \Rightarrow \boxed{(ABC): 4x - 13y + 3z + 5 = 0}$$

4. إعطاء تمثيل وسيطي للمستقيم (AB)

$$M(x;y;z) \in (AB) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB} \Rightarrow \boxed{(AB) : \begin{cases}x = -2 + 3t\\ y = 0\\ z = 1 - 4t\end{cases} ; t \in \mathbb{R}}$$

5. تعيين المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)

$$d[D\,;(ABC)] = \frac{|4(1) - 13(2) + 3(-2) + 5|}{\sqrt{4^2 + (-13)^2 + 3^2}} = \frac{23}{\sqrt{194}} = \boxed{\frac{23\sqrt{194}}{194}}$$

6. كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها D ونصف قطرها $r = \sqrt{2}$

$$M(x; y; z) \in (S) \Rightarrow DM^2 = r^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 7 = 0}$$

* * *

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

$A(-1;1)$ ، $B(-4;3)$ $C(2;5)$.

1. بيان أنّ معادلة (Δ) محور $[BC]$ هي : $3x+y-1=0$.

I منتصف $[BC]$ $\Rightarrow I\left(\frac{-4+2}{2};\frac{3+5}{2}\right) \Rightarrow I(-1;4)$; $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}$

$$M \in (\Delta) \Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IM}=0 \Rightarrow 6(x+1)+2(y-4)=0 \Rightarrow 6x+2y-2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta): 3x+y-1=0}$$

2. كتابة معادلة ديكارتية للدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها O و (Δ) مماسا لها

$$r=d[O;(\Delta)]=\frac{|-1|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\boxed{\frac{\sqrt{10}}{10}}$$

$$M \in (\mathcal{C}) \Rightarrow OM^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2=\frac{1}{10} \Rightarrow \boxed{(\mathcal{C}): x^2+y^2-\frac{1}{10}=0}$$

3. تعيين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

$$G\{(A,1);(B,1);(C,1)\} \Rightarrow G\left(\frac{-1-4+2}{3};\frac{1+3+5}{3}\right) \Rightarrow \boxed{G(-1;3)}$$

4. $T(M)=M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

أ. التحقق أنّ: $\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$

$$\overrightarrow{MM'}=\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{3\overrightarrow{MG}} \Rightarrow \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=3\overrightarrow{MG} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}}$$

استنتاج طبيعة التحويل T مع ذكر عناصره المميزة.

$$T(M)=M' \Rightarrow \overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM}$$

منه نستنتج أنّ التحويل T تحاكي مركزه G ونسبته (-2).

ب. كتابة x و y بدلالة x' و y'.

$$\overrightarrow{GM'}\begin{pmatrix}x'+1\\y'-3\end{pmatrix} ; \overrightarrow{GM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3\end{pmatrix} ; \overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \begin{cases}x'+1=-2x-2\\y'-3=-2y+6\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases}x=-\frac{1}{2}x'-\frac{3}{2}\\y=-\frac{1}{2}y'+\frac{9}{2}\end{cases}}$$

ج. تعيين $\overrightarrow{u'}$ شعاع توجيه (Δ') صورة (Δ) بالتحويل T

بما أنّ المستقيمين (Δ') و(Δ) متوازيان فلهما نفس شعاع التوجيه، ومنه:

$$\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

كتابة معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ')

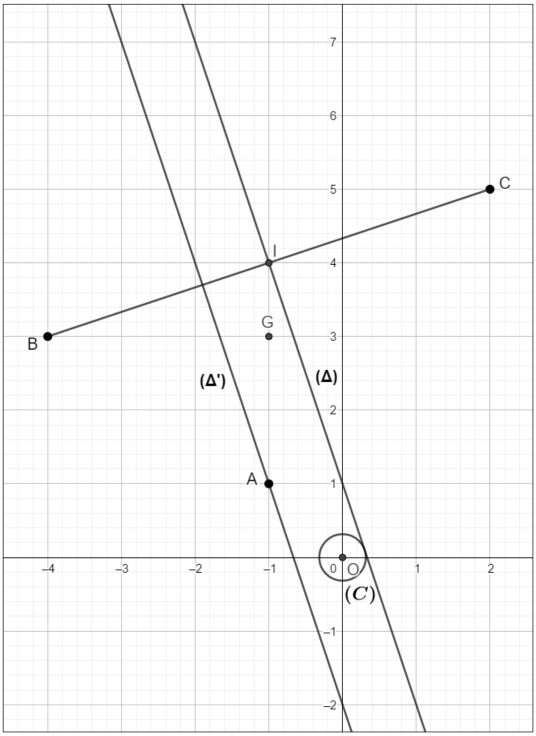
$$y=-3x+1 \Rightarrow -\frac{1}{2}y'+\frac{9}{2}=-3\left(-\frac{1}{2}x'-\frac{3}{2}\right)+1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}y'+\frac{9}{2}=\frac{3}{2}x'+\frac{9}{2}+1 \Rightarrow -\frac{1}{2}y'=\frac{3}{2}x'+1 \Rightarrow y'=-3x'-2$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta'): y=-3x-2}$$

5. تعيين طبيعة التحويل $f = ToT$ وتحديد عناصره المميزة

بما أنّ التحويل T تحاكي مركزه G ونسبته (-2)، نستنتج أنّ التحويل $f = ToT$ تحاكي مركزه G ونسبته $(-2)^2 = 4$.



* * *

التمرين الثاني :

1. تعيين الأساس q إذا علمت أنّ : $v_0 = 3$ و $v_2 + v_4 = 60$

$$v_2+v_4=60 \Rightarrow v_0q^2+v_0q^4=60 \Rightarrow 3q^4+3q^2-60=0$$

$x = q^2 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow \boxed{q = 2}$

الحل $x = -5$ مرفوض لأنّ $x = q^2$ كما أنّ الحل $q = -2$ مرفوض لأنّ $q > 0$

2. تعيين عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ حساب المجموع S_n

$v_n = v_0 \times q^n = \boxed{3 \times 2^n}$

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right) = \boxed{3(2^{n+1} - 1)}$$

3. حساب الجداء P_n بدلالة n

$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n = v_0 \times v_0.q \times \ldots \times v_0.q^n = v_0^{n+1} \times q^{1+2+\cdots+n}$

$$\boxed{P_n = 3^{n+1} \times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

* * *

التمرين الثالث :

لتكن النقطتان $A(1,-1,2)$ ، $B(-1,1,-2)$

1. كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (AB)

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}; M(x;y;z) \in (AB) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \boxed{(AB): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 2t\,; t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 4t \end{cases}}$$

2. (p) يشمل A وعمودي على المستقيم (AB) ، $(p'): x - y + 2z + 6 = 0$

أ. حساب المعادلة الديكارتية للمستوي (p)

$(P) \perp (AB) \Rightarrow (P) : -2x + 2y - 4z + d = 0$

$A \in (P) \Rightarrow -2(1) + 2(-1) - 4(2) + d = 0 \Rightarrow d = 12$

$$\Rightarrow \boxed{(P) : -2x + 2y - 4z + 12 = 0}$$

ب. التحقّق أنّ المستوي (p') يشمل B ويوازي (p)

$-1 - 1 + 2(-2) + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{B \in (P')}$

ليكن $\overrightarrow{n'}$ الشعاع الناظمي للمستوي (P'). لدينا :

$\overrightarrow{n'}(1;-1;2);\ \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{n'} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{n'} \Rightarrow \boxed{(P) \parallel (P)}$

3. كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها B ونصف قطرها $r = 4$

$M(x;y;z) \in (S) \Rightarrow BM^2 = r^2 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4^2$

$$\Rightarrow \boxed{(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 10 = 0}$$

* * *

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

1. **تعيين إحداثيي النقطة B' صورة النقطة $B(1\ ;\ 1)$ بالتحاكي h**

$$B'=h(B)\Rightarrow\overrightarrow{AB'}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\begin{cases}x'-4=\frac{5}{3}(1-4)\\ y'+2=\frac{5}{3}(1+2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=-1\\ y'=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{B'(-1;3)}$$

2. **تعيين إحداثيي النقطة C التي صورتها بالتحاكي h هي النقطة $C'(9\ ;\ -7)$**

$$C'=h(C)\Rightarrow\overrightarrow{AC'}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\begin{cases}9-4=\frac{5}{3}(x-4)\\ -7+2=\frac{5}{3}(y+2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7\\ y=-5\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{C(7;-5)}$$

3. **تعيين معادلة المستقيم (Δ') صورة (Δ) بالتحاكي h**

لتكن $D(-1;1)$ نقطة من (Δ) و D' صورتها بالتحاكي h.

$$D'=h(D)\Rightarrow\overrightarrow{AD'}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\begin{cases}x'-4=\frac{5}{3}(-1-4)\\ y'+2=\frac{5}{3}(1+2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=-\frac{13}{3}\\ y'=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{D'\left(-\frac{13}{3};3\right)}$$

$$(\Delta')=h(\Delta)\Rightarrow(\Delta'):y=x+b\ ;D'\in(\Delta')\Rightarrow 3=-\frac{13}{3}+b\Rightarrow b=\frac{22}{3}$$

$$\Rightarrow\boxed{(\Delta'):y=x+\frac{22}{3}}$$

4. $(\mathscr{C}):x^2+y^2+4x-6y+4=0$

- **بيان أنّ $(\mathscr{C})$ دائرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها**

$$x^2+y^2+4x-6y+4=0\Rightarrow(x+2)^2-4+(y-3)^2-9+4=0$$

$$\Rightarrow\boxed{(x+2)^2+(y-3)^2=9}$$

منه نستنتج أنّ $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها $\omega(-2;3)$ ونصف قطرها $r=3$

- **تعيين معادلة $(\mathscr{C}')$ صورة $(\mathscr{C})$ بالتحاكي h**

$(\mathscr{C}')$ هي الدائرة التي مركزها $\omega'=h(\omega)$ ونصف قطرها $r'=\frac{5}{3}\times 3=5$

$$\omega' = h(\omega) \Rightarrow \overrightarrow{A\omega'} = \frac{5}{3}\overrightarrow{A\omega} \Rightarrow \begin{cases} x' - 4 = \frac{5}{3}(-2-4) \\ y' + 2 = \frac{5}{3}(3+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -6 \\ y' = \frac{19}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega'\left(-6; \frac{19}{3}\right)}$$

$$M \in (\mathcal{C}') \Rightarrow \omega' M^2 = r'^2 \Rightarrow (x+6)^2 + \left(y - \frac{19}{3}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + 12x - \frac{38}{3}y + \frac{460}{9} = 0}$$

- **تعيين إحداثيات نقط تقاطع $(\mathscr{C})$ مع (Δ)**

$$M \in (\mathcal{C}) \cap (\Delta) \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + (x+2)^2 + 4x - 6(x+2) + 4 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x - 4 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

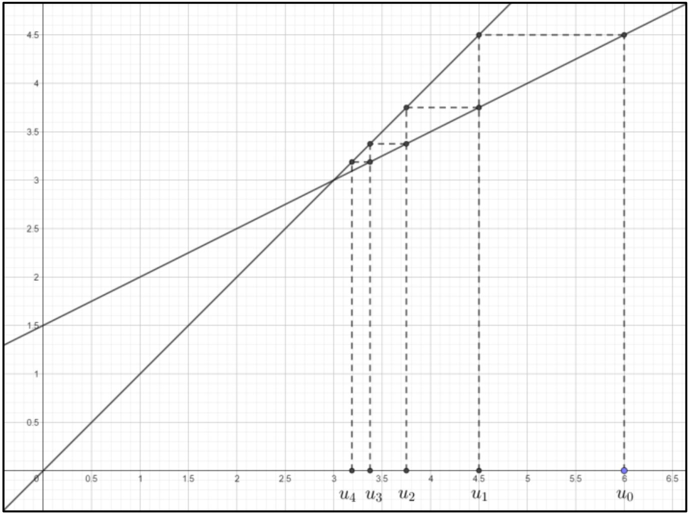
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(\mathcal{C}) \cap (\Delta) = \{(1;3), (-2;0)\}}$$

* * *

التمرين الثاني :

$u_0 = 6$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}$.

1. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على محور الفواصل



2. وضع تخمين حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها

من التمثيل البياني تبدو المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة

3. اثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

$$v_{n+1} = \alpha(u_{n+1} - 3) = \alpha\left(\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2} - 3\right) = \alpha\left(\frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

4. كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n و α واستنتاج عبارة u_n ثمّ حساب نهاية (u_n)

$$v_0 = \alpha(u_0 - 3) = 2\alpha\,;\, v_n = v_0 \times q^n = \boxed{2\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$v_n = \alpha(u_n - 3) \Rightarrow u_n = \frac{v_n}{\alpha} + 3 = \boxed{2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 = \boxed{3}$$

5. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$$

6. حساب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$، ثمّ حساب نهاية S_n

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{v_0}{\alpha} + 3 + \frac{v_1}{\alpha} + 3 + \cdots + \frac{v_n}{\alpha} + 3$$

$$= \frac{1}{\alpha}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + 3(n+1) = \frac{v_0}{\alpha}\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right) + 3(n+1)$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + 3(n+1) = 4\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + 3(n+1)$$

$$= \boxed{-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3n + 7}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} -4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3n + 7 = \boxed{+\infty}$$

* * *

التمرين الثالث :

نعتبر النقط $A(2,4,1$ ، $B(0,4,-3)$ ، $C(3,1,-3)$ ، $D(1,0,-2)$ ، $E(3,2,-1)$

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1. **معادلة المستوي (ABC) هي $2x+2y-z-11=0$: صحيح**

نعوّض إحداثيات النقط C, B, A في المعادلة الديكارتية للمستوي :

$$\begin{cases}2(2)+2(4)-1-11=0\\2(0)+2(4)+3-11=0\\2(3)+2(1)+3-11=0\end{cases}\Rightarrow (ABC):\ 2x+2y-z-11=0$$

2. **E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) : خطأ**

ليكن $\vec{n}$ الشعاع الناظمي للمستوي (ABC). لدينا :

$$\vec{n}(2;2;-1)\ ;\ \overrightarrow{DE}(2;2;1)\ ;\frac{2}{2}\neq-\frac{1}{1}\Rightarrow\vec{n}\nparallel\overrightarrow{DE}$$

بما أنّ الشعاعين $\vec{n}$ و $\overrightarrow{DE}$ غير مرتبطين خطّيا ، فإنّ (DE) لا يعامد (ABC) ، منه نستنتج أنّ النقطة E ليست المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

3. **المستقيم (CD) معرّف بتمثيله الوسيطي : $t\in\mathbb{R}$; $\begin{cases}x=2t-1\\y=t-1\\z=-t+1\end{cases}$: خطأ**

نعوّض إحداثيات النقطة C في التمثيل الوسيطي المُعطى :

$$\begin{cases}3=2t-1\\1=t-1\\-3=-t+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=2\\t=2\\t=4\end{cases}\Rightarrow$$ النقطة C لا تنتمي لهذا المستقيم

4. **المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان : صحيح**

$$\overrightarrow{AB}(-2;0;-4)\ ;\ \overrightarrow{CD}(-2;-1;1)\ ;\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=4-4=0\Rightarrow(AB)\perp(CD)$$

* * *

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

1. إنشاء النقطتين J و K

2. التعبير عن كل من النقطتين J و K كمرجح للنقط A ، B و I

$$J = h_A(I) \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{JI} \Rightarrow \overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JI} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{J\{(A;1),(I;-2)\}}$$

$$K = h_B(J) \Rightarrow \overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BJ} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BK} + 3\overrightarrow{KJ} \Rightarrow 2\overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{KJ} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow K\{(B;2),(J;-3)\} \Rightarrow \boxed{K\{(B;2),(A;3),(I;-6)\}}$$

3. استنتاج أنّ النقطة I هي مرجح النقط A ، B و K

$$K\{(B;2),(A;3),(I;-6)\} \Rightarrow 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KA} - 6\overrightarrow{KI} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{KI} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{KI} + 3\overrightarrow{IA} - 6\overrightarrow{KI} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IK} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{I\{(A;3),(B;2),(K;1)\}}$$

4. استنتاج وجود نقطة وحيدة C من القطعة [AB] حيث $\overrightarrow{CK} = 6\overrightarrow{CI}$

لتكن النقطة C مرجح الجملة $\{(B;2),(A;3)\}$

$$K\{(B;2),(A;3),(I;-6)\} \Rightarrow K\{(C;5),(I;-6)\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{CK} = 6\overrightarrow{CI}}$$

منه نستنتج أنّه توجد نقطة وحيدة C من القطعة $[AB]$ حيث $\overrightarrow{CK} = 6\overrightarrow{CI}$

5. بيان أنّ التحويل h هو التحاكي الذي مركزه C و نسبته 6

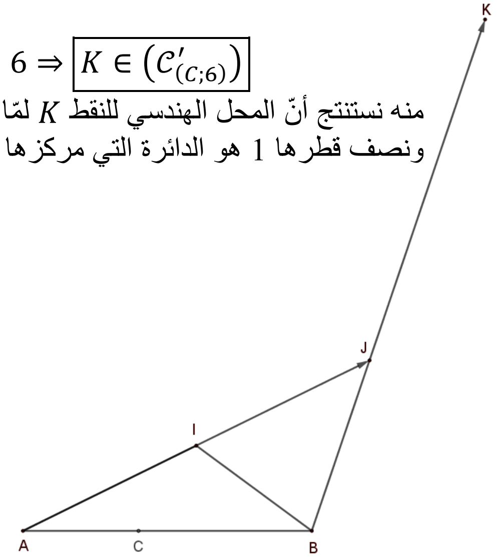
$$\begin{cases} \overrightarrow{CK} = 6\overrightarrow{CI} \Rightarrow K = h_{(C;6)}(I) \\ K = h_B(J) = h_B o h_A(I) \end{cases} \Rightarrow \boxed{h_B o h_A = h_{(C;6)}}$$

6. تعيين المحل الهندسي للنقط K

$$\overrightarrow{CK} = 6\overrightarrow{CI} \Rightarrow CK = 6CI$$

$$I \in \left(\mathcal{C}_{(C;1)}\right) \Rightarrow CI = 1 \Rightarrow CK = 6 \Rightarrow \boxed{K \in \left(\mathcal{C}'_{(C;6)}\right)}$$

منه نستنتج أنّ المحل الهندسي للنقط K لمّا تتغير I على الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها 1 هو الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها 6.



التمرين الثاني :

I- $f(x) = \frac{9}{6-x}$ ، $D_f =]-3; 6[$

1. **حساب $f'(x)$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]-3; 6[$**

$f'(x) = \frac{9}{(6-x)^2}$; $f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة f متزايدة

$\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -3}} f(x) = 1$; $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 6}} f(x) = +\infty$

x	-3 $\qquad$ 6
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$

2. **كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 3**

$(\Delta): y = f'(3)(x-3) + f(3) \Rightarrow y = x$

انشاء المماس (Δ) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بدقة

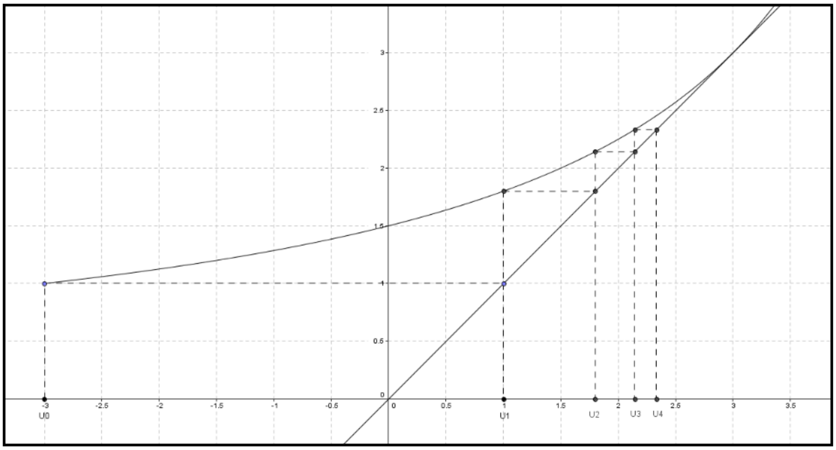
3. **بيان أنه إذا كان $x < 3$ فإن $f(x) < 3$**

بما أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-3; 6[$ ، فإنّه من أجل $x < 3$:

لدينا $f(x) < f(3)$ منه $f(x) < 3$

II- لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = -3 \;\; ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1. **انشاء الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4**



2. **تحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n)**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6-u_n} - u_n = \frac{u_n^2 - 6u_n + 9}{6-u_n} = \frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}$$

$u_n < 3 \Rightarrow 6 - u_n > 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}}$

III- لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $v_n = \frac{1}{u_n-3}$

- **بيان أن المتتالية (V_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول**

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-3} = \frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3} = \frac{1}{\frac{3u_n-9}{6-u_n}} = \frac{6-u_n}{3(u_n-3)}$$

$$= \frac{3-u_n}{3(u_n-3)} + \frac{3}{3(u_n-3)} = -\frac{1}{3} + v_n$$

نستنتج أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $-\frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0-3} = -\frac{1}{6}$

- **بيان أن : $u_n = \frac{6n-3}{2n+1}$**

$$v_n = v_0 + nr = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n = \frac{-2n-1}{6}$$

$$\frac{1}{u_n-3} = v_n \Rightarrow u_n - 3 = \frac{1}{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{-6}{2n+1} + 3 = \boxed{\frac{6n-3}{2n+1}}$$

* * *

التمرين الثالث :

نعتبر النقط $A(-1,2,1)$ ، $B(0,5,2)$ ، $C(3,0,-2)$

1. بيان أنّ النقط A ، B ، C تعين مستويا

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\\-3\end{pmatrix}$; $\frac{1}{4} \neq \frac{3}{-2} \Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

$\Rightarrow$ (ABC) مستوي

2. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC). لدينا :

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+3b+c=0\\ 4a-2b-3c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3a+9b+3c=0 \ldots ①\\ 4a-2b-3c=0 \ldots ②\end{cases}$$

$$① + ② \Rightarrow 7a+7b=0 \Rightarrow a=-b$$

$$① \Rightarrow -3b+9b+3c=0 \Rightarrow 3c=-6b \Rightarrow c=-2b$$

نفرض $b=-1$ ، منه : $a=1$ ، $c=2$ ، $\vec{n}(1;-1;2)$

$$(ABC): x-y+2z+d=0\ ; B\in(ABC) \Rightarrow -5+4+d=0 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow \boxed{(ABC): x-y+2z+1=0}$$

3. $(S) : x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$

أ. تعيين النقطة Ω مركز سطح الكرة (S) ونصف قطرها r

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 + 8 = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 6$$
$$\Rightarrow \boxed{\Omega(1;2;3); r = \sqrt{6}}$$

ب. التحقّق من أنّ المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S)

لبيان أنّ المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) ، نبرهن أنّ $d[\Omega;(ABC)] = r$

$$d[\Omega;(ABC)] = \frac{|1-2+2(3)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Rightarrow \boxed{d[\Omega;(ABC)] = r}$$

ج. حساب تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (ABC)

$$M(x;y;z) \in (\Delta) \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M} = t.\vec{n} \Rightarrow \boxed{(\Delta):\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3+2t \end{cases}}$$

د. استنتاج إحداثيات ω نقطة تماس (ABC) و (S)

النقطة ω هي تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (ABC) ، ونحصل على إحداثياتها بتعويض التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)

$$\omega = (\Delta) \cap (ABC) \Rightarrow 1 + t - (2-t) + 2(3+2t) + 1 = 0 \Rightarrow t = -1$$
$$\Rightarrow \boxed{\omega(0;3;1)}$$

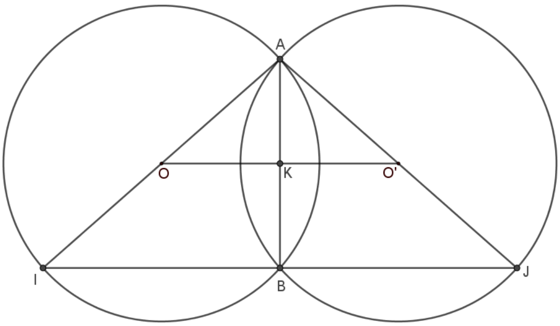
* * *

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

الجزء الأول :

1. **انشاء الشكل.**



2. **بيان أنّ I و J صورتا O و O' على الترتيب بتحاك مركزه A يُطلب تعيين نسبته**

لدينا: $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AO'}$ ، منه نستنتج أنّ I و J هما صورتا O و O' على الترتيب بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2.

استنتاج أن المستقيمين (OO') و (IJ) متوازيان.

طريقة ①:

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AO'} = 2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO'}\right) = 2\overrightarrow{OO'} \Rightarrow \boxed{(IJ) \parallel (OO')}$$

طريقة ②:

$$\frac{AO}{AI} = \frac{AO'}{AJ} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{(OO') \parallel (IJ)}$$ (نظرية طاليس العكسية)

طريقة ③:

بما أنّ O منتصف $[AI]$ و O' منتصف $[AJ]$ ، فإنّ (OO') هو مستقيم المنتصفين في المثلث AIJ ، ومنه نستنتج أنّ $\boxed{(OO') \parallel (IJ)}$

3. **بيان أنّ: $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AK}$**

طريقة ①:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OK} = 2\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK}\right) = \boxed{2\overrightarrow{AK}}$$

طريقة ②:

لدينا في المثلث ABI: O منتصف $[AI]$ و $(OK) \parallel (IB)$ ، منه نستنتج أنّ K منتصف $[AB]$ ، أي $\boxed{\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AK}}$ (نظرية مستقيم المنتصفين العكسية)

استنتاج أن النقط I ، B ، J في استقامية.

لدينا النقط I ، B وJ هي صور النقط O ، K وO' على الترتيب بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2، وبما أنّ النقط O ، K وO' في استقامية، نستنتج أنّ النقط I ، B وJ في استقامية، لأنّ التحاكي يحافظ على استقامية النقط.

4. حساب الجداءات السلمية: $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OA}$ وَ $(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}).\overrightarrow{IJ}$.

$$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AB}=\boxed{0}\ \left(\overrightarrow{IB}\perp\overrightarrow{AB}\right)\ ;\ \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{OA}=-OA^2=\boxed{-4}$$

$$\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}\right).\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{IJ}=\underbrace{\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{BJ}\right)}_{\vec{0}}.\overrightarrow{IJ}=\boxed{0}$$

الجزء الثاني :

1. كتابة معادلة لكل من الدائرتين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.

$$M(x;y)\in(\mathcal{C})\Rightarrow OM^2=2^2\Rightarrow\boxed{x^2+y^2=4}$$

$$M(x;y)\in(\mathcal{C}')\Rightarrow O'M^2=2^2\Rightarrow(x-2)^2+y^2=4\Rightarrow\boxed{x^2+y^2-4x=0}$$

2. بيان أنّ $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ يتقاطعان في النقطتين $A(1;\sqrt{3})$ وَ $B(1;-\sqrt{3})$.

$$M(x;y)\in(\mathcal{C})\cap(\mathcal{C}')\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4\\x^2+y^2-4x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2=-x^2+4\\4-4x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1\\y^2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\ ;\ y_1=-\sqrt{3}\\x_2=1\ ;\ y_2=-\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\boxed{(\mathcal{C})\cap(\mathcal{C}')=\left\{\left(1,-\sqrt{3}\right);(1;\sqrt{3})\right\}}$$

3. كتابة معادلة المماس (Δ) للدائرة $(\mathscr{C})$ عند النقطة A.

$$M(x;y)\in(\Delta)\Rightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AO}=0\Rightarrow-(x-1)-\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow\boxed{x+\sqrt{3}y-4=0}$$

4. بيان أنّ المستقيم (OO') محور القطعة $[AB]$.

لتكن النقطة $K(1;0)$ منتصف القطعة $[OO']$. لدينا:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\sqrt{3}\end{pmatrix}.\overrightarrow{OO'}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{OO'}\ \dots ①$$

$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{3}\end{pmatrix};\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Rightarrow$ K منتصف القطعة $[AB]$ ... ②

من ① و② نستنتج أنّ المستقيم (OO') محور القطعة $[AB]$.

5. $M\left(5;\frac{\sqrt{3}}{x^2}\right)$.

أ. حساب المسافة $f(x)$ بين النقطة M و المماس (Δ).

$$f(x)=\frac{\left|5+\frac{3}{x^2}-4\right|}{\sqrt{4}}=\boxed{\frac{1}{2}+\frac{3}{2x^2}}$$

ب. التحقّق أنّ : $f(x)=\frac{x^2+3}{2x^2}$ من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم.

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2x^2}=\boxed{\frac{x^2+3}{2x^2}}$$

ج. دراسة تغيرات الدالة f وتعيين المستقيمات المقاربة

$$f'(x)=\frac{2x(2x^2)-4x(x^2+3)}{(2x^2)^2}=\frac{-12x}{4x^4}=\boxed{-\frac{3}{x^3}}$$

$x\in\,]-\infty;0[:f'(x)>0\Rightarrow$ الدالة f متزايدة

$x\in\,]0;+\infty[:f'(x)<0\Rightarrow$ الدالة f متناقصة

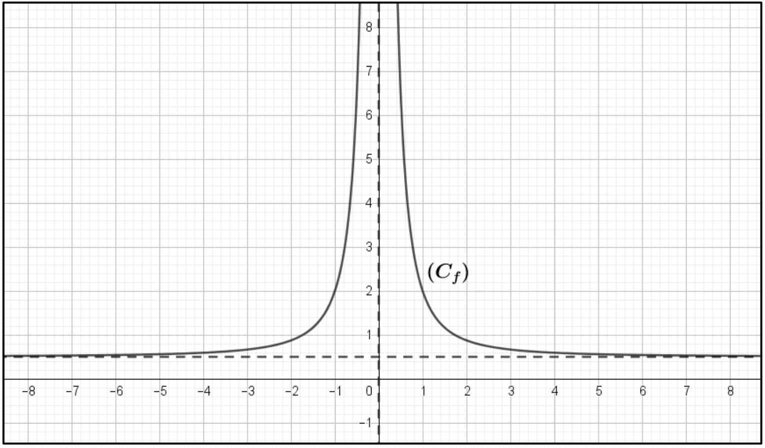
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}+\frac{3}{2x^2}=\frac{1}{2}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}+\frac{3}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{<\\x\to0}}f(x)=\lim_{\substack{<\\x\to0}}\frac{1}{2}+\frac{3}{2x^2}=+\infty\ ;\ \lim_{\substack{>\\x\to0}}f(x)=\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{1}{2}+\frac{3}{2x^2}=+\infty$$

منه نستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما أفقي معادلته $y=\frac{1}{2}$ والآخر عمودي معادلته $x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2}\nearrow+\infty$	‖	$+\infty\searrow\frac{1}{2}$

رسم المنحنى الممثل للدالة f.



* * *

التمرين الثاني :

$$\boldsymbol{u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+\ 2}}$$

1. **تعيين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة**

المتتالية (u_n) ثابتة $\Rightarrow u_{n+1} = u_n = u_0 \Rightarrow u_0 = \dfrac{2u_0 + 1}{u_0 + 2}$

$$\Rightarrow u_0^2 + 2u_0 = 2u_0 + 1 \Rightarrow u_0^2 = 1 \Rightarrow \boxed{u_0 = -1 \text{ أو } u_0 = 1}$$

2. **نفرض أن $u_0 = 0$ و $0 \le u_n < 1$**

- **دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{-u_n^2 + 1}{u_n + 2} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{u_n + 2}$$

بما أنّ $0 \le u_n < 1$ ، فإنّ $u_{n+1} - u_n > 0$ ، منه المتتالية (u_n) متزايدة

3. $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

- **اثبات أن (v_n) متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول**

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2u_n+1}{u_n+2} - 1}{\frac{2u_n+1}{u_n+2} + 1} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 3} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1}\right) = \frac{1}{3}v_n$$

منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدّها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = -1$

- **كتابة v_n بدلالة n ، ثم حساب نهاية المتتالية (v_n)**

$$v_n = v_0.q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \boxed{v_n = -\frac{1}{3^n}} \;\; ; \;\; \boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3^n} = 0}$$

- **كتابة u_n بدلالة v_n ، ثم استنتاج نهاية المتتالية (u_n)**

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Rightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \Rightarrow u_n(v_n - 1) = -v_n - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{-v_n - 1}{v_n - 1}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-v_n - 1}{v_n - 1} = 1}$$

التمرين الثالث :

لتكن النقط $A(3,0,3)$ ، $B(1,4,-3)$ ، $C(1,0,3)$ ، $D(1,0,-3)$

1. **بيان أنّ المثلث BCD قائم في D**

$\overrightarrow{DB}(0;4;0)$; $\overrightarrow{DC}(0;0;6)$; $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{المثلث } BCD \text{ قائم في } D}$

.2 تعيين مساحة المثلث BCD

$$\|\overrightarrow{DB}\| = \sqrt{4^2} = 4\,; \|\overrightarrow{DC}\| = \sqrt{6^2} = 6\,; S_{BCD} = \frac{DB \times DC}{2} = \frac{24}{2}$$
$$= \boxed{12\,u.a}$$

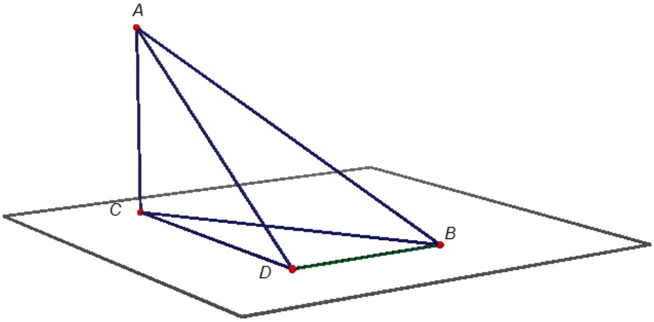
.3 بيان أنّ المستقيم (AC) عمودي على المستوي (BCD)

لبيان أنّ المستقيم (AC) عمودي على المستوي (BCD) ، نبرهن أنّ الشعاع $\overrightarrow{AC}$ عمودي على الشعاعين غير المرتبطين خطّيا $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AC}(-2;0;0)\,; \begin{cases}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0\\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}\\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DC}\end{cases} \Rightarrow (AC) \perp (BCD)$$

.4 تعيين حجم رباعي الوجوه $ABCD$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{BCD} \times h = \frac{1}{3}S_{BCD} \times \|\overrightarrow{AC}\| = \frac{12 \times 2}{3} = \boxed{8\,u.v}$$



* * *

الموضوع السادس

التمرين الأول :

1. تعليم النقط A ، B ، C و H

كتابة معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ).

$$M(x;y)\in(\Delta)\Rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}=0\Rightarrow 3(x-2)-2(y-1)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{3x-2y-4=0}$$

2. $(\gamma): x^2+y^2-10x+2y+13=0$.

أ. اثبات أنّ (γ) دائرة مركزها B ونصف قطرها r يُطلب حسابه.

$$x^2+y^2-10x+2y+13=0\Rightarrow (x-5)^2-25+(y+1)^2-1+13=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(x-5)^2+(y+1)^2=13}$$

منه نستنتج أنّ (γ) دائرة مركزها $B(5;-1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{13}$.

ب. رسم المستقيم (Δ) والدائرة (γ).

ج. التحقق حسابيا أنّ $A\in(\gamma)$

$$(x_A-5)^2+(y_A+1)^2=(-3)^2+2^2=13\Rightarrow \boxed{A\in(\gamma)}$$

حساب المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ).

$$d[B;(\Delta)]=\frac{|3(5)-2(-1)-4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\boxed{\sqrt{13}}$$

د. استنتاج الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والدائرة (γ).

$$d[B;(\Delta)]=r\Rightarrow \boxed{\text{المستقيم } (\Delta) \text{ مماس للدائرة } (\gamma)}$$

3. حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ بطريقتين

طريقة ①:

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}.\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=-9+8=\boxed{-1}$$

طريقة ②:

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\underbrace{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}_{2\overrightarrow{BH}}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right)=\frac{4BH^2-BA^2-BC^2}{2}$$

$$=\frac{4(9)-(9+4)-(9+16)}{2}=-\frac{2}{2}=\boxed{-1}$$

استنتاج قيمة مقرّبة بالدرجات لقيس الزاوية $\widehat{ABC}$.

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|.\left\|\overrightarrow{BC}\right\|.\cos\widehat{ABC}\Rightarrow \cos\widehat{ABC}=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|.\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{-1}{5\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{ABC}\approx 93°}$$

4. **حساب الطول BH بطريقتين**

طريقة ①: باستعمال الإحداثيات

$$B(5;-1);H(5;2) \Rightarrow BH=\sqrt{3^2}=\boxed{3}$$

طريقة ②: باستعمال مبرهنة المتوسط

$$BA^2+BC^2=2BH^2+\frac{1}{2}AC^2 \Rightarrow BH^2=\frac{BA^2+BC^2-\frac{1}{2}AC^2}{2}$$

$$=\frac{13+25-20}{2}=9 \Rightarrow \boxed{BH=3}$$

5. **تحديد طبيعة وعناصر مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$ وكتابة معادلة ديكارتية لها.**

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0 \Rightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MC} \Rightarrow$ المثلث AMC قائم في M

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$ هي الدائرة التي قطرها $[AC]$.

$$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}2-x\\1-y\end{pmatrix}.\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix}8-x\\3-y\end{pmatrix}=0 \Rightarrow (2-x)(8-x)+(1-y)(3-y)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-10x-4y+19=0}$$

6. **تحديد طبيعة وعناصر مجموعة النقط N حيث: $\overrightarrow{NA}^2+\overrightarrow{NC}^2=21$.**

$$NA^2+NC^2=21 \Rightarrow 2NH^2+\frac{1}{2}AC^2=21$$

$$\Rightarrow 2NH^2=21-\frac{1}{2}AC^2=21-\frac{6^2+2^2}{2}=1 \Rightarrow \boxed{NH^2=\frac{1}{2}}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط N من المستوي حيث: $NA^2+NC^2=21$ هي الدائرة التي مركزها H ونصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. **ليكن h التحاكي الذي مركزه O ونسبته $-\frac{1}{2}$.**

أ. **تعيين إحداثيات النقط A' ، B' وC'.**

$$h(A)=A' \Rightarrow \overrightarrow{OA'}\begin{pmatrix}x_{A'}\\y_{A'}\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A'\left(-1;-\frac{1}{2}\right)}$$

$$h(B)=B' \Rightarrow \overrightarrow{OB'}\begin{pmatrix}x_{B'}\\y_{B'}\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B'\left(-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

$$h(C)=C' \Rightarrow \overrightarrow{OC'}\begin{pmatrix}x_{C'}\\y_{C'}\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{C'\left(-4;-\frac{3}{2}\right)}$$

ب. **استنتاج معادلة ديكارتية لكل من المستقيم (Δ') والدائرة (γ').**

صورة المستقيم (Δ) بالتحاكي h هو المستقيم (Δ') الموازي لـ (Δ) والذي يشمل النقطة A'.

$$M(x;y)\in(\Delta')\Rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.\overrightarrow{A'M}\begin{pmatrix}x+1\\y+\frac{1}{2}\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 3(x+1)-2\left(y+\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow \boxed{3x-2y+2=0}$$

صورة الدائرة (γ) بالتحاكي h هي الدائرة (γ') التي مركزها B' ونصف قطرها $r'=\frac{1}{2}r=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

$$M(x;y)\in(\gamma')\Rightarrow B'M^2=r'^2\Rightarrow\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow\boxed{x^2+y^2+5x-y-\frac{13}{4}=0}$$

ج. استنتاج محيط ومساحة كل من الدائرة (γ') والمثلث $A'B'C'$.

محيط الدائرة (γ'): $\mathcal{P}_{(\gamma')}=2\pi r'=\boxed{\sqrt{13}\pi\ cm}$

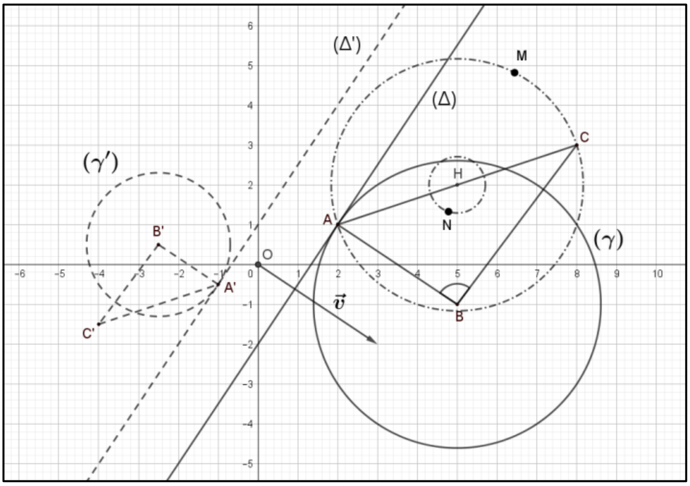
مساحة الدائرة (γ'): $\mathcal{S}_{(\gamma')}=\pi r'^2=\boxed{\frac{13}{4}\pi\ cm^2}$

محيط المثلث $A'B'C'$:

$$\mathcal{P}_{A'B'C'}=\frac{1}{2}\mathcal{P}_{ABC}=\frac{AB+AC+BC}{2}=\frac{\sqrt{13}+2\sqrt{10}+5}{2}\approx\boxed{7{,}47\ cm}$$

مساحة المثلث $A'B'C'$

$$\mathcal{S}_{A'B'C'}=\frac{1}{4}\mathcal{S}_{ABC}=\frac{\frac{1}{2}BA\times BC\times\sin\widehat{ABC}}{4}=\frac{5\sqrt{13}\times}{8}\approx\boxed{2{,}25\ cm^2}$$



* * *

التمرين الثاني :

$u_0 = \alpha$ ، $u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + 335$

1. **تعيين العدد الحقيقي α حيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة**

$$u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{5}{6}\alpha + 335 \Rightarrow \alpha = 335 \times 6 = \boxed{2010}$$

2. **بيان أنّ المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{6}u_n + 335 - u_n = 335 - \frac{1}{6}u_n = \frac{2010 - u_n}{6}$$

بما أنّ $u_n \le 2010$ ، فإنّ $2010 - u_n \ge 0$ ، منه المتتالية (u_n) متزايدة

3. $v_n = u_n - 2010$

أ. اثبات أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين حدها الأول وأساسها

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2010 = \frac{5}{6}u_n + 335 - 2010 = \frac{5}{6}u_n - 1675$$

$$v_{n+1} = \frac{5}{6}(u_n - 2010) = \frac{5}{6}v_n$$

منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{5}{6}$ وحدها الأول $v_0 = -1$

ب. كتابة v_n بدلالة n : $\boxed{v_n = v_0.q^n = -\left(\frac{5}{6}\right)^n}$

استنتاج كتابة u_n بدلالة n : $\boxed{u_n = v_n + 2010 = 2010 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$

ج. حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2010 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = \boxed{2010}$$

د. حساب بدلالة n المجموعين : S_n و S'_n

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = -\left(\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{6}}\right) = \boxed{-6\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right)}$$

$$\begin{aligned} S'_n &= v_0 + 6v_1 + 6^2v_2 + \cdots + 6^nv_n \\ &= v_0 + 6v_0.q + 6^2v_0.q^2 + \cdots + 6^nv_0.q^n \\ &= v_0\ \underbrace{(1 + 6q + 6^2q^2 + \cdots + 6^nq^n)}_{\text{حدود متتابعة لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها } 6q} = v_0\left(\frac{1-(6q)^{n+1}}{1-6q}\right) \\ &= -\left(\frac{1-(5)^{n+1}}{1-5}\right) = \boxed{\frac{1-(5)^{n+1}}{4}} \end{aligned}$$

* * *

التمرين الثالث :

$A(0,1,-2)$ ، $B(-1,0,-1)$ ، $C(0,-5,-5)$ ، $D(2,0,-2)$ ، $E(1,-4,-6)$

1. **بيان أنّ النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-6\\-3\end{pmatrix}\ ;\dfrac{0}{-1}\neq\dfrac{-6}{-1}\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

منه ، النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2. **حساب مساحة المثلث ABC**

$\begin{cases}AB=\sqrt{3}\\AC=\sqrt{45}\\BC=\sqrt{42}\end{cases}\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2\Rightarrow$ المثلث ABC قائم في B

$$S_{ABC}=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{\sqrt{126}}{2}=\boxed{\frac{3\sqrt{14}}{2}\ u.a}$$

3. **بيان أنّ الرباعي $ABCE$ مستطيل**

لدينا : $\overrightarrow{EC}\ (-1;-1;1)$ ، أي $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}$ ، منه الرباعي ABCE متوازي أضلاع ، وبما أنّ المثلث ABC قائم في B ، نستنتج أنّ الرباعي $ABCE$ مستطيل

4. **كتابة المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)**

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC). لدينا :

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a-b+c=0\\-6b-3c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3b\\c=-2b\end{cases}$$

نفرض $b=-1$ ، منه : $a=3$ ، $c=2$ ، $\vec{n}(3;-1;2)$

$$(ABC):3x-y+2z+d=0\,;B\in(ABC)\Rightarrow-3-2+d=0\ \Rightarrow d=5\Rightarrow\boxed{(ABC):3x-y+2z+5=0}$$

5. **كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D والعمودي على (ABC)**

$$M(x;y;z)\in(\Delta)\Rightarrow\overrightarrow{DM}=t.\vec{n}\Rightarrow\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=2+3t\\y=-t\\z=-2+2t\end{cases};t\in\mathbb{R}}$$

6. **تعيين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)**

$$H=(\Delta)\cap(ABC)\Rightarrow3(2+3t)-(-t)+2(-2+2t)+5=0\Rightarrow t=-\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-3\right)}$$

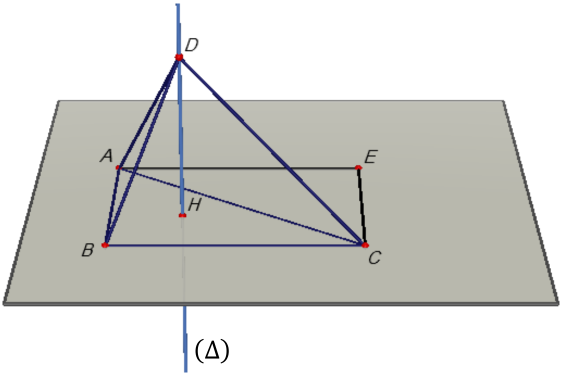
7. حساب بُعد النقطة D عن المستوي (ABC)

$$d[D;(ABC)] = \frac{|3(2)+2(-2)+5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}$$

8. حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \times h = \frac{1}{3}S_{ABC} \times d[D;(ABC)] = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{14}}{2} \times \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$= \boxed{\frac{7}{2}\,u.v}$$



* * *

الموضوع السابع

التمرين الأول :

$$\boldsymbol{h(M) = M' \Rightarrow \begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases}}$$

1. برهان أنّ h تحاكي يُطلب تعيين مركزه ω ونسبته k.

$$h(M) = M' \Rightarrow \omega M' = k\omega M \Rightarrow \begin{cases} x' - x_\omega = k(x - x_\omega) \\ y' - y_\omega = k(y - y_\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_\omega \\ y' = ky + (1-k)y_\omega \end{cases} \Rightarrow k = -2 \Rightarrow \begin{cases} 3x_\omega = 3 \\ 3y_\omega = 6 \end{cases} \Rightarrow \omega(1; 2)$$

منه نستنتج أنّ h تحاكي مركزه $\omega(1; 2)$ ونسبته $k = -2$.

2. كتابة معادلة الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها ω وتمسّ المستقيم (T).

$$r = d[\omega; (T)] = \frac{|3(1) - 4(2) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$M(x; y) \in (\mathcal{C}) \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{109}{25} = 0}$$

3. كتابة معادلة (T') صورة (T) بالتحاكي h.

$$\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}x' + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2}y' + 3 \end{cases}$$

$$(T') = h(T) \Rightarrow 3\left(-\frac{1}{2}x' + \frac{3}{2}\right) - 4\left(-\frac{1}{2}y' + 3\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}x' + 2y' - \frac{13}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{(T'): -3x + 4y - 13 = 0}$$

4. كتابة معادلة $(\mathcal{C}')$ صورة $(\mathcal{C})$ بالتحاكي h بطريقتين مختلفتين.

طريقة ①:

$(\mathcal{C}')$ هي الدائرة التي مركزها ω ونصف قطرها $r' = 2r = \frac{8}{5}$ ، ومنه:

$$M(x; y) \in (\mathcal{C}') \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{64}{25}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{61}{25} = 0}$$

طريقة ②:

$$(\mathcal{C}') = h(\mathcal{C}) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{نعوض } x \text{ و} y \text{ في } (\mathcal{C})} \quad \left(-\frac{1}{2}x' + \frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}y' + 3 - 2\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}y' + 1\right)^2 = \frac{16}{25}$$

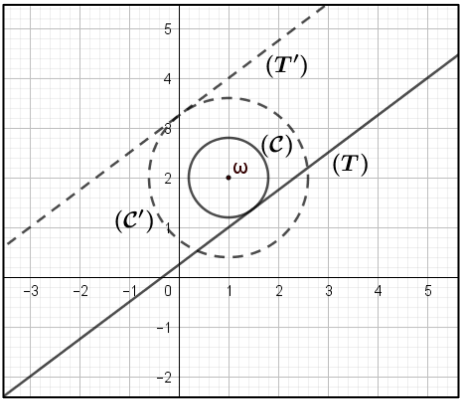
$$\Rightarrow \frac{1}{4}x'^2 + \frac{1}{4}y'^2 - \frac{1}{2}x' - y' + \frac{61}{100} = 0$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\times 4} \boxed{x'^2 + y'^2 - 2x' - 4y' + \frac{61}{25} = 0}$$

5. **دراسة الوضعية النسبية لكل من (T') و$(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى $(\mathcal{C}')$.**

بما أنّ $(T') = h(T)$ و$(\mathcal{C}') = h(\mathcal{C})$ والمستقيم (T) مماس للدائرة $(\mathcal{C})$، نستنتج أنّ المستقيم (T') مماس للدائرة $(\mathcal{C}')$.

بما أنّ للدائرتين $(\mathcal{C})$ و$(\mathcal{C}')$ نفس المركز و$r' = 2r$، نستنتج أنّ الدائرة $(\mathcal{C})$ داخل الدائرة $(\mathcal{C}')$.



* * *

التمرين الثاني:

$u_0 = 1$ ، $v_0 = 2$ ، $u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$ ، $v_{n+1} = \frac{u_n+4v_n}{5}$ ، $w_n = u_n - v_n$

1. **برهان أنّ المتتالية (w_n) هندسية**

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

$$= \frac{5u_n + 10v_n - 3u_n - 12v_n}{15} = \frac{2}{15}(u_n - v_n) = \frac{2}{15}w_n$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{15}$

تعيين نهايتها

بما أنّ $0 < q < 1$ ، فإنّ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = 0}$

كتابة w_n بدلالة n

$$w_0 = u_0 - v_0 = -1\ ;\ \boxed{w_n = w_0 . q^n = -\left(\frac{2}{15}\right)^n}$$

2. كتابة $u_{n+1} - u_n$ و $v_{n+1} - v_n$ بدلالة w_n

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{-2u_n + 2v_n}{3} = -\frac{2}{3}(u_n - v_n) = \boxed{-\frac{2}{3}w_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n = \frac{u_n - v_n}{5} = \frac{1}{5}(u_n - v_n) = \boxed{\frac{1}{5}w_n}$$

استنتاج اتجاه تغيّر المتتاليتين (u_n) و (v_n)

$$w_n < 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}w_n > 0 \\ \frac{1}{5}w_n < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{n+1} - u_n > 0 \\ v_{n+1} - v_n < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة} \\ \text{المتتالية } (v_n) \text{ متناقصة} \end{cases}}$$

3. بيان أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) لهما نفس النهاية يُرمز لها l

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}(v_n) = l}$$

4. $t_n = 3u_n + 10v_n$. برهان أنّ المتتالية (t_n) ثابتة ، ثمّ استنتاج قيمة l

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = 3\left(\frac{u_n + 2v_n}{3}\right) + 10\left(\frac{u_n + 4v_n}{5}\right)$$

$$= u_n + 2v_n + 2u_n + 8v_n = 3u_n + 10v_n = t_n \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (t_n) \text{ ثابتة}}$$

بما أنّ المتتالية (t_n) ثابتة ، فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0 = 3u_0 + 10v_0 = 23$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 23 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(3u_n + 10v_n) = 23 \Rightarrow 3l + 10l = 23$$

$$\Rightarrow 13l = 23 \Rightarrow \boxed{l = \frac{23}{13}}$$

التمرين الثالث :

$A(1,2,0)$ ، $B(0,3,0)$ ، $C(-1,0,-2)$ ، $D(1,2,2)$ ، $(P): x + y - 2z -$
$3 = 0$

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

1. المستوي (ABC) والمستوي (P) متطابقان : صحيح

$$\begin{cases} 1+2-3=0 \Rightarrow A\in(P) \\ 3-3=0 \Rightarrow B\in(P) \\ -1+4-3=0 \Rightarrow C\in(P) \end{cases} \Rightarrow \boxed{(ABC)=(P)}$$

2. **المعادلة الديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستوي (P) والذي يشمل A وB هي: $x+y+z-3=0$: صحيح**

بما أنّ المستوي (P') عمودي على (P) ويشمل A وB ، فإنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ شعاعي توجيه له.

ليكن $\overrightarrow{n'}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (P'). لدينا :

$$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{cases}\overrightarrow{n'}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{n'}.\vec{n}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-a+b=0\\ a+b-2c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=b\\ c=b\end{cases}$$

نفرض $b=1$ ، منه : $a=1$ ، $c=1$ ، $\overrightarrow{n'}(1;1;1)$

$$(P'): x+y+z+d=0\,; B\in(P') \Rightarrow 3+d=0 \Rightarrow d=-3$$

$$\Rightarrow \boxed{(P') : x+y+z-3=0}$$

3. **المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين : خطأ**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}; \begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\\ \|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{2}\\ \|\overrightarrow{AC}\|=2\sqrt{3}\end{cases}$$

المثلث ABC قائم في A لكنه غير متساوي الساقين

4. **سطح الكرة التي مركزها $\Omega(0,-1,1)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$ مماسية للمستوي (P) : خطأ**

$$d[\Omega;(P)] = \frac{|-1-2-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Rightarrow \boxed{d[\Omega;(P)] \neq r}$$

5. **المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) هي النقطة $E\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right)$: صحيح**

لبيان أنّ E هي المسقط العمودي للنقطة D على (ABC) ، نبيّن أنّ E تنتمي إلى (ABC) وأنّ $\overrightarrow{DE}$ و $\vec{n}$ مرتبطين خطّيا ($\overrightarrow{DE} \perp (ABC)$)

$$\frac{5}{3}+\frac{8}{3}-\frac{4}{3}-3 = 3-3 = 0 \Rightarrow E\in(ABC)$$

$$\overrightarrow{DE}\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{DE} \parallel \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{DE} \perp (ABC)$$

6. حجم رباعي الوجوه $ABCD$ يساوي $\frac{4}{3}$: صحيح

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{AB\times AC}{2}\times DE\ ;DE=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}}{18}=\frac{24}{18}\Rightarrow\boxed{V_{ABCD}=\frac{4}{3}}$$

7. مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ هي سطح الكرة التي مركزها $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},0\right)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{2}$: خطأ

لتكن النقطة G منتصف القطعة $[AB]$. لدينا : $G\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2};0\right)\Rightarrow G=I$

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|\Rightarrow\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}\right\|$$

$$\Rightarrow 2\left\|\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\Rightarrow\left\|\overrightarrow{MI}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\Rightarrow\boxed{\left\|\overrightarrow{MI}\right\|=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$ هي سطح الكرة التي مركزها $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},0\right)$ ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

* * *

الموضوع الثامن

التمرين الأول :

$(C_1): x^2+y^2+4x-y-2=0$ و $(C_2): x^2+y^2-6x-6y-7=0$

1. **تعيين ω_1 ، ω_2 و r_1 ، r_2.**

$$x^2+y^2+4x-y-2=0 \Rightarrow (x+2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1\left(-2;\frac{1}{2}\right); r_1=\frac{5}{2}}$$

$$x^2+y^2-6x-6y-7=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y-3)^2=25$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2(3;3); r_2=5}$$

2. **بيان أنّ (C_1) و(C_2) يتقاطعان في نقطتين A و B يُطلب تعيينهما.**

$$M(x;y)\in(C_1)\cap(C_2) \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+4x-y-2=0 \ldots ① \\ x^2+y^2-6x-6y-7=0 \ldots ② \end{cases}$$

$$① - ② \Rightarrow 10x+5y+5=0 \Rightarrow y=-2x-1$$

نعوّض y في معادلة (C_1):

$$x^2+(-2x-1)^2+4x-(-2x-1)-2=0 \Rightarrow 5x^2+10x=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-1 \end{cases}; \begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(C_1)\cap(C_2)=\{A(0;-1); B(-2;3)\}}$$

3. **برهان أنّ المماسين لكل من (C_1) و(C_2) في النقطة A متعامدان.**

يتعامد المماسان لكل من (C_1) و(C_2) في النقطة A إذا تعامد شعاعاهما الناظميان $\overrightarrow{A\omega_1}$ و$\overrightarrow{A\omega_2}$.

$$\overrightarrow{A\omega_1}\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} . \overrightarrow{A\omega_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -6+6=0 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{A\omega_1} \perp \overrightarrow{A\omega_2}}$$

4. **كتابة معادلة المماس (Δ) للدائرة (C_1) في النقطة A.**

$$M(x;y)\in(\Delta) \Rightarrow \overrightarrow{A\omega_1}\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} . \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{-4x+3y+3=0}$$

5. **حساب بعد النقطة $H(1;1)$ عن المماس (Δ).**

$$d[H;(\Delta)] = \frac{|-4+3+3|}{\sqrt{(-4)^2+(3)^2}} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

6. بيان أنّه يوجد تحاكيان h_1 و h_2 يحولان (C_1) إلى (C_2) يُطلب تعيين نسبتيهما k_1 و k_2 ومركزيهما I_1 و I_2 على الترتيب.

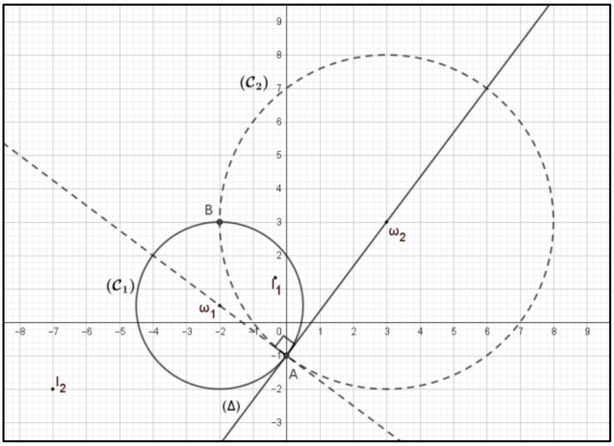
$$h(C_1)=(C_2)\Rightarrow r_2=|k|r_1\Rightarrow |k|=\frac{r_2}{r_1}=2\Rightarrow \boxed{\begin{cases}k_1=-2\\ k_2=2\end{cases}}$$

$$h_1(C_1)=(C_2)\Rightarrow \overrightarrow{I_1\omega_2}=-2\,\overrightarrow{I_1\omega_1}\Rightarrow\begin{cases}3-x_1=-2(-2-x_1)\\ 3-y_1=-2\left(\frac{1}{2}-y_1\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x_1=-1\\ 3y_1=4\end{cases}\Rightarrow \boxed{I_1\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)}$$

$$h_2(C_1)=(C_2)\Rightarrow \overrightarrow{I_2\omega_2}=2\,\overrightarrow{I_2\omega_1}\Rightarrow\begin{cases}3-x_2=2(-2-x_2)\\ 3-y_2=2\left(\frac{1}{2}-y_2\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_2=-7\\ y_2=-2\end{cases}\Rightarrow \boxed{I_2(-7;-2)}$$



* * *

التمرين الثاني :

I- $f(x)=\frac{4}{4-x}$ ، $Df=[-2;4[$

1. حساب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}4} f(x)$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}4} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}4}\frac{4}{4-x}=\boxed{+\infty}$$

2. دراسة تغيرات الدالة f

$$f'(x)=\frac{4}{(4-x)^2}\ ;f'(x)>0\Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ متزايدة}}$$

جدول تغيرات الدالة f

x	-2 $\quad\quad$ 4
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\frac{2}{3}$ $\nearrow$ $+\infty$

3. **كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 2$**

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) \Rightarrow \boxed{(\Delta) : y = x}$$

4. **بيان أنه إذا كان : $0 \le x \le 2$ فإن $0 \le f(x) \le 2$**

بما أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;2]$ ، فإنّ :

$$0 \le x \le 2 \Rightarrow f(0) \le f(x) \le f(2) \Rightarrow 1 \le f(x) \le 2 \Rightarrow \boxed{0 \le f(x) \le 2}$$

5. **انشاء المماس (Δ) والمنحنى (C_f)**

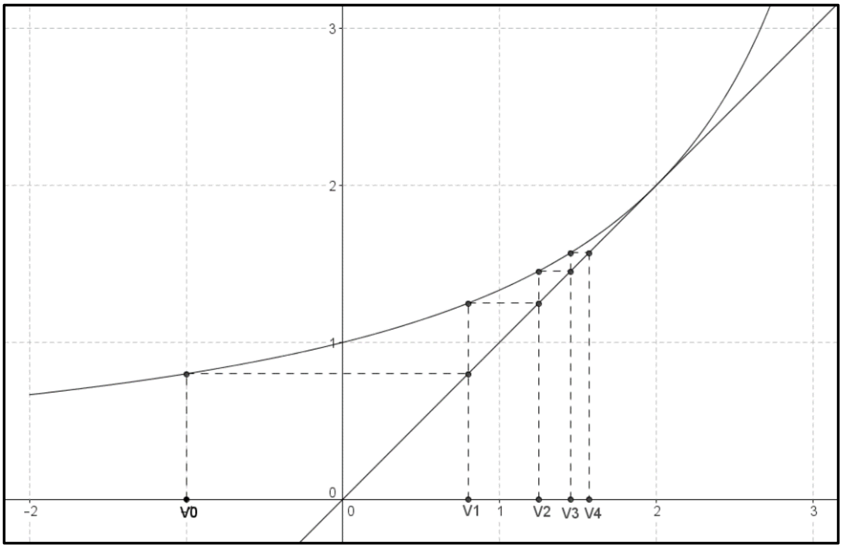
(انظر الشكل التالي)

II- $v_{n+1} = f(v_n)$ و $v_0 = -1$

- **تعريف المتتالية (v_n)**

$$v_{n+1} = \frac{4}{4-v_n} \; ; \; v_0 = -1$$

- **انشاء الحدود v_4, v_3, v_2, v_1, v_0**



نستنتج أنّ المتتالية (v_n) متزايدة ومتقاربة نحو العدد 2

- **برهان أن المتتالية (v_n) متزايدة تماما**

$$v_{n+1}-v_n=\frac{4}{4-v_n}-v_n=\frac{v_n^2-4v_n+4}{4-v_n}=\frac{(v_n-2)^2}{4-v_n}$$

$v_n \le 2 \Rightarrow 4-v_n \ge 2 \Rightarrow v_{n+1}-v_n \ge 0 \Rightarrow$ المتتالية (v_n) متزايدة

* * *

التمرين الثالث :

A(1;3;-1) ، B(4;1;0) ، C(-2;0;-2) ، D(3;2;1) ، $(P): x-3z-4=0$

1. المستوي (P) هو المستوي : (ABC) ... (2ج)

$$\begin{cases} 1-3(-1)-4=0 \Rightarrow A \in (P) \\ 4-3(0)-4=0 \Rightarrow B \in (P) \\ -2-3(-2)-4=0 \Rightarrow C \in (P) \\ 3-3(1)-4 \neq 0 \Rightarrow D \notin (P) \end{cases} \Rightarrow \boxed{(P)=(ABC)}$$

2. شعاع ناظمي للمستوي (P) هو : $\overrightarrow{n_2}(-2;0;6)$ ... (2ج)

ليكن $\vec{n}$ الشعاع الناظمي للمستوي (P). لدينا :

$$\vec{n}(1;0;-3)\ ;\ \overrightarrow{n_2}(-2;0;6); -\frac{1}{2}=\frac{3}{6} \Rightarrow \vec{n} \parallel \overrightarrow{n_2} \Rightarrow \boxed{\vec{n} \perp (P)}$$

3. المسافة بيّن النقطة D و المستوي (P) هي : $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ... (3ج)

$$d[D\,;(P)]=\frac{|3-3(1)-4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\boxed{\frac{2\sqrt{10}}{5}}$$

* * *

الموضوع التاسع

التمرين الأول :

1. إنشاء النقطة D المعرّفة بالعلاقة: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{CB}$.

2. إنشاء النقطة I صورة D بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$.

$$h(D) = I \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}$$

3. بيان أنّ: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AI}$ واستنتاج طبيعة الرباعي $AIBC$.

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{CB}\right) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB}}$$

بما أنّ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB}$ و $CA = CB$، نستنتج أنّ الرباعي $AIBC$ معيّن.

4. حساب $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\cos\widehat{DAB} = 2a \times a \times \frac{1}{2} = \boxed{a^2}\,;\left(\widehat{DAB} = \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BA} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} = \underbrace{\overrightarrow{BA}^2}_{a^2} - \underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}_{a^2} = \boxed{0}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABD.

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BA} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{BA} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABD \text{ قائم في } B}$$

5. بيان أنّ $CD = a\sqrt{7}$ وتعيين $\cos\widehat{CDB}$.

$$CA^2 + CD^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AD^2 \Rightarrow CD^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AD^2 - CA^2$$

$$CD^2 = 2\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}(4a^2) - a^2 = 7a^2 \Rightarrow \boxed{CD = a\sqrt{7}}$$

6. $(E_k): MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2$

أ. بيان أنّ النقطة D هي مرجح للجملة $\{(A;1),(B;2),(C;-2)\}$.

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{D\{(A;1),(B;2),(C;-2)\}}$$

ب. مناقشة طبيعة المجموعة (E_k).

$$MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = ka^2 \Rightarrow \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 - 2\overrightarrow{MC}^2 = ka^2$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}\right)^2 = ka^2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD}^2+\overrightarrow{DA}^2+2\overrightarrow{DB}^2-2\overrightarrow{DC}^2+2\overrightarrow{MD}\underbrace{\left(\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}\right)}_{\vec{0}}=ka^2$$

$$\Rightarrow MD^2=ka^2-DA^2-2DB^2+2DC^2=ka^2-4a^2-6a^2+14a^2$$

$$=\boxed{(k+4)a^2}$$

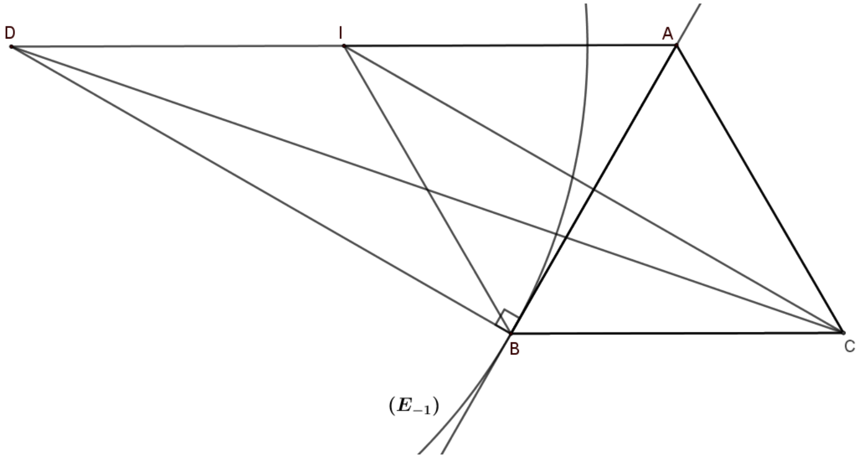
- $k<-4: (k+4)a^2<0 \Rightarrow MD^2<0 \Rightarrow (E_k)=\emptyset$
- $k=-4: (k+4)a^2=0 \Rightarrow MD^2=0 \Rightarrow (E_k)=\{D\}$
- $k>-4: (k+4)a^2>0 \Rightarrow MD=a\sqrt{k+4} \Rightarrow (E_k)=(\mathcal{C})$

حيث $(\mathcal{C})$ هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $r=a\sqrt{k+4}$

ج. التحقق أنّ $B\in(E_{-1})$ وبيان أنّ (E_{-1}) دائرة مماسية للمستقيم (AB).

(E_{-1}) هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $r=a\sqrt{3}$، وبما أنّ $BD=a\sqrt{3}$، نستنتج أنّ $\boxed{B\in(E_{-1})}$

بما أنّ $B\in(E_{-1})$ و $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{BA}$، نستنتج أنّ (E_{-1}) دائرة مماسية للمستقيم (AB).



* * *

التمرين الثاني :

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases}u_1+2u_2+u_3=32\\ u_1\times u_2\times u_3=216\end{cases}$$

1. أ. حساب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتاج الحد الأول u_1

$$u_1\times u_2\times u_3=216\Rightarrow u_2^3=216\Rightarrow u_2=\sqrt[3]{216}=\boxed{6}$$

$$u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \Rightarrow u_1 + u_3 = 20 \Rightarrow \frac{u_2}{q} + u_2.q = 20 \Rightarrow \frac{6}{q} + 6q = 20$$

$$\Rightarrow 6q^2 - 20q + 6 = 0 \Rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$\Delta' = 16\,;q' = \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3}\ ;\ q'' = \frac{5+4}{3} = 3$$

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، نستنتج أنّ $q = 3$ ، منه $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{3} = 2$

ب. كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n

$$u_n = u_1.q^{n-1} \Rightarrow \boxed{u_n = 2 \times 3^{n-1}}$$

ج. حساب S_n بدلالة n ، ثمّ تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = 2\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right) \Rightarrow \boxed{S_n = 3^n - 1}$$

$$S_n = 728 \Rightarrow 3^n - 1 = 728 \Rightarrow 3^n = 729 \Rightarrow \boxed{n = 6}$$

2. $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ. حساب v_2 و v_3

$$v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 3 + 2 = \boxed{5}\ ;\ v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{15}{2} + 6 = \boxed{\frac{27}{2}}$$

ب. $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$. بيان أنّ (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\frac{v_n}{u_n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\frac{v_n}{u_n} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}w_n}$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

ج. كتابة w_n بدلالة n ، ثمّ استنتاج v_n بدلالة n.

$$w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow w_n = w_1.q^{n-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boxed{\frac{1}{3 \times 2^{n-1}}}$$

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{v_n}{u_n} = w_n + \frac{2}{3} \Rightarrow v_n = u_n\left(w_n + \frac{2}{3}\right)$$

$$v_n = 2 \times 3^{n-1}\left(\frac{1}{3 \times 2^{n-1}} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2 \times 3^{n-1}}{3 \times 2^{n-1}} + \frac{2 \times 2 \times 3^{n-1}}{3}\right)$$

* * *

التمرين الثالث :

A(1;0;2) ، B(0;2;1) ، C(2;1;3).

.1 $(P): x - z + 1 = 0$

أ. بيان أنّ المستوي (P) هو المستوي (ABC)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} ;\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} ;\ \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

$\Rightarrow \boxed{\text{مستوي } (ABC)}$

$$\begin{cases} 1 - 2 + 1 = 0 \Rightarrow A \in (P) \\ 0 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow B \in (P) \Rightarrow \boxed{(P) = (ABC)} \\ 2 - 3 + 1 = 0 \Rightarrow C \in (P) \end{cases}$$

ب. تعيين طبيعة المثلث ABC

$\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = -1 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A}$

.2 التحقق أن النقطة D(2;3;4) لا تنتمي إلى (ABC)

$2 - 4 + 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{D \notin (ABC)}$

.3 تعيين طبيعة ABCD

بما أنّ $D \notin (ABC)$ ، فإنّ $ABCD$ رباعي وجوه قاعدته المثلث القائم ABC.

.4 حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)

$$d[D\,;(ABC)] = \frac{|2 - 4 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{d[D\,;(ABC)] = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

.5 حساب حجم ABCD

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AC}{2} \times d[D\,;(ABC)]$$

$$\begin{cases} AB = \sqrt{6} \\ AC = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{12} = \frac{6}{12} \Rightarrow \boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{2}\ u.v}$$

* * *

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

$$\boldsymbol{f(M)=M'\Rightarrow\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x-m+1\\ y'=\frac{1}{3}y+2m-2\end{cases}}$$

1. **برهان أنّ f_m تحاكي يُطلب تعيين مركزه ω_m ونسبته k**

$$f(M)=M'\Rightarrow \omega_m M'=k\omega_m M\Rightarrow\begin{cases}x'-x_{\omega_m}=k\left(x-x_{\omega_m}\right)\\ y'-y_{\omega_m}=k\left(y-y_{\omega_m}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=kx+(1-k)x_{\omega_m}\\ y'=ky+(1-k)y_{\omega_m}\end{cases}\Rightarrow k=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2}{3}x_{\omega_m}=-m+1\\ \frac{2}{3}y_{\omega_m}=2m-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_{\omega_m}=-\frac{3}{2}m+\frac{3}{2}\\ y_{\omega_m}=3m-3\end{cases}$$

منه نستنتج أنّ f_m تحاكي مركزه $\omega_m\left(-\frac{3}{2}m+\frac{3}{2};3m-3\right)$ ونسبته $k=\frac{1}{3}$.

2. **تعيين مجموعة المراكز ω_m عندما يمسح m المجموعة $\mathbb{R}$**

$$\begin{cases}x_{\omega_m}=-\frac{3}{2}m+\frac{3}{2}\\ y_{\omega_m}=3m-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x_{\omega_m}=3m-3\\ y_{\omega_m}=3m-3\end{cases}\Rightarrow\boxed{y_{\omega_m}=-2x_{\omega_m}}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة المراكز ω_m عندما يمسح m المجموعة $\mathbb{R}$ هي المستقيم ذا المعادلة $\boxed{(\Delta):y=-2x}$.

3. **كتابة معادلة $(\mathcal{C}')$ صورة $(\mathcal{C})$ بالتحويل f_m**

$(\mathcal{C}')$ هي الدائرة التي مركزها $A'=f_m(A)$ ونصف قطرها $r'=\frac{1}{3}\times 4=\frac{4}{3}$

$$A'=f_m(A)\Rightarrow\begin{cases}x'=\frac{1}{3}(-2)-m+1\\ y'=\frac{1}{3}(3)+2m-2\end{cases}\Rightarrow\boxed{A'\left(-m+\frac{1}{3};2m-1\right)}$$

$$M\in(\mathcal{C}')\Rightarrow A'M^2=r'^2\Rightarrow\left(x+m-\frac{1}{3}\right)^2+(y-2m+1)^2=\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2\left(m-\frac{1}{3}\right)x+2(-2m+1)y+\left(m-\frac{1}{3}\right)^2+(-2m+1)^2=\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2+\left(2m-\frac{2}{3}\right)x+(-4m+2)y+5m^2-\frac{14}{3}m-\frac{6}{9}=0}$$

* * *

التمرين الثاني :

$\boldsymbol{u_0=3}$ ، $\boldsymbol{u_{n+1}=\left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n-\frac{2a+4}{3}}$

1. تعيين قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة

ثابتة $(u_n) \Rightarrow u_{n+1}=u_n=u_0 \Rightarrow 3=3\left(\frac{2a+1}{3}\right)-\frac{2a+4}{3}$

$$\Rightarrow 3=\frac{4a-1}{3}\Rightarrow 4a=10\Rightarrow \boxed{a=\frac{5}{2}}$$

2. تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية

حسابية $(u_n) \Rightarrow \frac{2a+1}{3}=1\Rightarrow 2a+1=3\Rightarrow 2a=2\Rightarrow \boxed{a=1}$

حساب عندئذ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية

$$u_{n+1}=u_n-2\Rightarrow r=-2$$

$$S_n=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}=\frac{n}{2}(u_0+u_{n-1})=\frac{n}{2}(u_0+u_0+(n-1)r)$$

$$S_n=\frac{n}{2}[3+3-2(n-1)]=n(-n+4)=\boxed{-n^2+4n}$$

3. تعيين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية

هندسية $(u_n) \Rightarrow \frac{2a+4}{3}=0\Rightarrow 2a+4=0\Rightarrow 2a=-4\Rightarrow \boxed{a=-2}$

تعيين كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها

$$u_{n+1}=-u_n\Rightarrow q=-1\,;u_{50}=u_0\times q^{50}=3(-1)^{50}=\boxed{3}$$

$$S'=u_0+u_1+\cdots+u_{49}=u_0\left(\frac{1-q^{50}}{1-q}\right)=\frac{3}{2}[1-(-1)^{50}]=\boxed{0}$$

* * *

التمرين الثالث :

$\boldsymbol{(P): 14x+16y+13z-47=0}$ ، $\boldsymbol{A(1;-2;5)}$ ، $\boldsymbol{B(2;2;-1)}$ ،
$\boldsymbol{C(-1;3;1)}$

1. أ. التحقّق أنّ النقط A ، B ، C ليست في استقامية

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\-6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\-4\end{pmatrix}$; $\frac{1}{-2}\neq\frac{4}{5}\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

منه ، نستنتج أنّ النقط A ، B ، C ليست في استقامية.

ب. بيان أنّ المستوي (ABC) هو (P)

$$\begin{cases}14(1)+16(-2)+13(5)-47=0\Rightarrow A\ \in(P)\\14(2)+16(2)+13(-1)-47=0\Rightarrow B\ \in(P)\Rightarrow\boxed{(P)=(ABC)}\\14(-1)+16(3)+13(1)-47=0\Rightarrow C\ \in(P)\end{cases}$$

2. إيجاد تمثيل وسيطي للمستقيم (AB)

$$M(x;y;z)\in(AB)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}\Rightarrow\boxed{(AB):\begin{cases}x=1+t\\y=-2+4t\,;t\in\mathbb{R}\\z=5-6t\end{cases}}$$

3. أ. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$

طريقة أولى :

لتكن I منتصف $[AB]$ ، إذن $I\left(\frac{3}{2};0;2\right)$ ، ومنه :

$$M(x;y;z)\in(Q)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}=0\Rightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)+4y-6(z-2)=0$$

$$\Rightarrow x+4y-6z+\frac{21}{2}=0\Rightarrow\boxed{(Q):2x+8y-12z+21=0}$$

طريقة ثانية :

$$M(x;y;z)\in(Q)\Rightarrow AM=BM\Rightarrow AM^2=BM^2$$

$$\Rightarrow(x-1)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2$$

$$\Rightarrow\boxed{(Q):2x+8y-12z+21=0}$$

ب. التحقّق أنّ النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q)

$$2(-1)+8(-2)-12\left(\frac{1}{4}\right)+21=-21+21=0\Rightarrow\boxed{D\in(Q)}$$

ج. حساب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB)

$$d[D\,;(AB)]=DI=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2+(2)^2+\left(2-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\boxed{d[D\,;(AB)]=\frac{\sqrt{213}}{4}}$$

* * *

الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول:

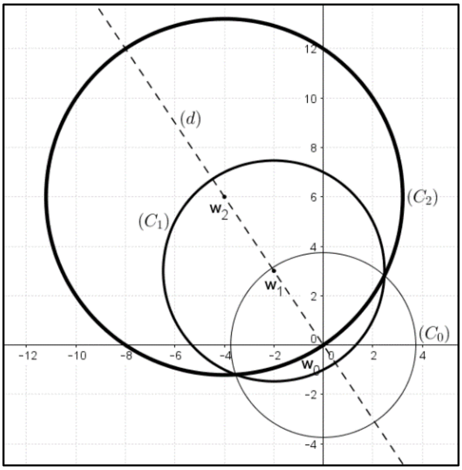
$A(2;1)$ ، $B(0;7)$ ، $(C_m): x^2+y^2+4mx-6my+7m-14=0$

1. أ. بيان أنّ (C_m) دائرة يُطلب تعيين مركزها w_m ونصف قطرها r_m.

$$x^2+y^2+4mx-6my+7m-14=0$$
$$\Rightarrow (x+2m)^2-4m^2+(y-3m)^2-9m^2+7m-14=0$$
$$\Rightarrow (x+2m)^2+(y-3m)^2=13m^2-7m+14$$
$$13m^2-7m+14>0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} w_m(-2m;3m) \\ \hline r_m=\sqrt{13m^2-7m+14} \end{array}}$$

أ. إنشاء الدوائر (C_0) , (C_1) , (C_2).

$(C_0): w_o(0;0)\ ; r_0=\sqrt{14}\ , (C_1): w_1(-2;3)\ ; r_1=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\ ,$
$(C_2): w_2(-4;6)\ ; r_2=\sqrt{38}$



ب. تعيين مجموعة النقط w_m عندما يتغيّر m في $\mathbb{R}$.

$$w_m(-2m;3m) \Rightarrow \begin{cases} x=-2m \\ y=3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{1}{2}x \\ y=3m \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{3}{2}x}$$

منه نستنتج أنّ مجموعة النقط w_m عندما يتغيّر m في $\mathbb{R}$ هي المستقيم $(d): y=-\frac{3}{2}x$

2. كتابة معادلة المماس (Δ) للدائرة (C_1) في النقطة A.

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \overrightarrow{Aw_1}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$M(x;y)\in(\Delta)\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{Aw_1}=0\Rightarrow -4(x-2)+2(y-1)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta): y=2x-3}$$

.3 تعيين تقاطع الدائرة (C_1) مع حامل محور التراتيب.

$$M(x;y)\in(C_1)\cap(yy')\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x^2+y^2+4x-6y-7=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y^2-6y-7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}\text{ أو }\begin{cases}x=0\\y=7\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{(C_1)\cap(yy')=\{B(0;7)\,;D(0;-1)\}}$$

.4 بيان أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة $x+2y-14=0$ مماس للدائرة (C_1)

$$d[w_1;(T)]=\frac{|1(-2)+2(3)-14|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt5}=2\sqrt5=r_1$$

بما أنّ $d[w_1;(T)]=r_1$ نستنتج أنّ المستقيم (T) مماس للدائرة (C_1)

.5 ليكن h التحاكي الذي مركزه B ونسبته $k=-2$.

أ. كتابة العبارة التحليلية للتحاكي h.

$$M'=h(M)\Rightarrow\overrightarrow{BM'}=-2\overrightarrow{BM}\Rightarrow\begin{cases}x'=-2x\\y'-7=-2(y-7)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x'=-2x\\y'=-2y+21\end{cases}}$$

ب. كتابة معادلة المستقيم (T') صورة المستقيم (T) بالتحاكي h.

$$\begin{cases}x'=-2x\\y'=-2y+21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}x'\\y=-\dfrac{1}{2}y'+\dfrac{21}{2}\end{cases}$$

$$(T')=h(T)\Rightarrow-\frac{1}{2}x'+2\left(-\frac{1}{2}y'+\frac{21}{2}\right)-14=0\Rightarrow-\frac{1}{2}x'-y'+7=0$$

$$\Rightarrow x'+2y'-14=0\Rightarrow\boxed{(T')=(T)}$$

نستنتج أنّ صورة المستقيم (T) بالتحاكي h هو المستقيم (T) نفسه

ج. حساب طول ومساحة الدائرة (C'_1) صورة الدائرة (C_1) بالتحاكي h.

$$(C'_1)=h(C_1)\Rightarrow r'_1=|-2|r_1\Rightarrow r'_1=4\sqrt5$$

$$\mathcal{P}_{(C'_1)}=2\pi\times r'_1=2\pi\times4\sqrt5=\boxed{8\pi\sqrt5\ cm}$$

$$\mathcal{A}_{(C'_1)}=\pi\times {r'_1}^2=\pi\times\left(4\sqrt5\right)^2=\boxed{80\pi\ cm^2}$$

* * *

التمرين الثاني:

1. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة: $15\left(\frac{1}{\alpha^2}+\alpha^2\right)=41\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)$ ... ①

$$\frac{1}{\alpha}+\alpha=x\Rightarrow\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)^2=x^2\Rightarrow\frac{1}{\alpha^2}+\alpha^2+2=x^2\Rightarrow\frac{1}{\alpha^2}+\alpha^2=x^2-2$$

$$①\Rightarrow 15(x^2-2)=41x\Rightarrow 15x^2-41x-30=0\Rightarrow x_1=-\frac{3}{5}\,;x_2=\frac{10}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha}+\alpha=-\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{\alpha^2+1}{\alpha}=-\frac{3}{5}\Rightarrow 5(\alpha^2+1)=-3\alpha\Rightarrow 5\alpha^2+3\alpha+5=0$$

$\Delta< 0\Rightarrow S_1=\emptyset.$

$$\frac{1}{\alpha}+\alpha=\frac{10}{3}\Rightarrow\frac{\alpha^2+1}{\alpha}=\frac{10}{3}\Rightarrow 3(\alpha^2+1)=10\alpha\Rightarrow 3\alpha^2-10\alpha+3=0$$

$\Delta=64\Rightarrow\boxed{S_2=\left\{\frac{1}{3};3\right\}}.$

2. تعيين الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3:

$$\begin{cases}u_0+u_4=\frac{164}{3}\\u_1+u_3=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{u_2}{q^2}+u_2.q^2=\frac{164}{3}\\\frac{u_2}{q}+u_2.q=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_2\left(\frac{1}{q^2}+q^2\right)=\frac{164}{3}\ ...\ ①\\u_2\left(\frac{1}{q}+q\right)=20\ ...\ ②\end{cases}$$

$$\frac{①}{②}\Rightarrow\frac{\frac{1}{q^2}+q^2}{\frac{1}{q}+q}=\frac{164}{60}=\frac{41}{15}\Rightarrow 15\left(\frac{1}{q^2}+q^2\right)=41\left(\frac{1}{q}+q\right)\Rightarrow\boxed{q=3}$$

$$u_0+u_4=\frac{164}{3}\Rightarrow u_0+u_0.q^4=\frac{164}{3}\Rightarrow u_0(1+81)=\frac{164}{3}$$

$$\Rightarrow\boxed{u_0=\frac{2}{3};u_1=2;u_2=6;u_3=18;u_4=54}$$

* * *

التمرين الثالث:

$A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ ، $D(1;1;1)$

1. أ. التحقّق أنّ النقط A ، B وC تعيّن مستويا

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\frac{-3}{-1}\neq\frac{0}{1}\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

$\Rightarrow$ (ABC) مستوي

ب. بيان أنّ $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-3+3=0\\\vec{n}.\overrightarrow{AC}=-1+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\vec{n}\perp(ABC)}$$

ج. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

$$\vec{n} \perp (ABC) \Rightarrow (ABC): x + y + z + d = 0$$

$$A \in (ABC) \Rightarrow 2 - 1 + 1 + d = 0 \ \Rightarrow d = -2$$

$$\Rightarrow \boxed{(ABC): x + y + z - 2 = 0}$$

.2 $G\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$

أ. حساب إحداثيات G

$$G\{(A,1);(B,2);(C,-1)\} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + 2x_B - x_C}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ y_G = \dfrac{y_A + 2y_B - y_C}{2} = 2 \\ z_G = \dfrac{z_A + 2z_B - z_C}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{G\left(-\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)}$$

ب. بيان أنّ (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{MD}\| \Rightarrow 2\|\overrightarrow{MG}\| = 2\|\overrightarrow{MD}\|$$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MD}\| \Rightarrow$ (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة $[GD]$

ج. اثبات أنّ معادلة (Γ) هي : $6x - 4y + 2z + 3 = 0$

طريقة أولى :

$\overrightarrow{GD}\left(\frac{3}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$ ، لتكن I منتصف $[GD]$ ، إذن $I\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$ ، ومنه :

$$M(x;y;z) \in (\Gamma) \Rightarrow \overrightarrow{GD}.\overrightarrow{IM} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) - \left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(z - \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x - y + \frac{1}{2}z + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{(\Gamma): 6x - 4y + 2z + 3 = 0}$$

طريقة ثانية :

ليكن $\overrightarrow{n'}(6;-4;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (Γ) و $I\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}\right)$ منتصف $[GD]$:

$$\begin{cases} 6\left(\dfrac{1}{4}\right) - 4\left(\dfrac{3}{2}\right) + 2\left(\dfrac{3}{4}\right) + 3 = 0 \Rightarrow I \in (\Gamma) \\ \overrightarrow{n'} = 4\overrightarrow{GD} \Rightarrow \overrightarrow{n'} \parallel \overrightarrow{GD} \Rightarrow \overrightarrow{GD} \perp (\Gamma) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Gamma): 6x - 4y + 2z + 3 = 0}$$

3. بيان أنّ (ABC) و(Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له

ليكن $\vec{n}(1;1;1)$ و $\overrightarrow{n'}(6;-4;2)$ الشعاعين الناظميين للمستويين (ABC) و(Γ) على الترتيب.

بما أنّ $\frac{1}{-4} \neq \frac{1}{6}$ ، فإنّ الشعاعين $\vec{n}$ و $\overrightarrow{n'}$ غير مرتبطين خطيا ، منه (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) حيث :

$$M(x;y;z) \in (\Delta) \Rightarrow \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 6x-4y+2z+3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x-2y-2z+4=0 \dots ① \\ 6x-4y+2z+3=0 \dots ② \end{cases}$$

$$① + ② \Rightarrow 4x-6y+7=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}y-\frac{7}{4}$$

$$② \Rightarrow 6\left(\frac{3}{2}y-\frac{7}{4}\right)-4y+2z+3=0 \Rightarrow 5y+2z-\frac{15}{2}=0$$

$$\Rightarrow z=-\frac{5}{2}y+\frac{15}{4}$$

$$\xRightarrow[\text{نضع } y=2t]{} \boxed{(\Delta): \begin{cases} x=-\frac{7}{4}+3t \\ y=2t \qquad ; t \in \mathbb{R} \\ z=\frac{15}{4}-5t \end{cases}}$$

* * *

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول:

$A(2;-1)$ و $\Omega(-2;3)$ نقطتان من المستوي، (Γ) دائرة مركزها Ω ونصف قطرها $2\sqrt{2}$.

1. بيان أنّ النقطة B منتصف القطعة $[A\Omega]$ تنتمي إلى الدائرة (Γ).

$$B(0;1)\ ;\ B\Omega=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}\Rightarrow\boxed{B\in(\Gamma)}$$

2. التحقق أنّ: $x-y+1=0$ هي معادلة المماس (Δ) عند النقطة B.

$$M(x;y)\in(\Delta)\Rightarrow\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}.\overrightarrow{B\Omega}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=0\Rightarrow -2x+2y-2=0$$

$$\Rightarrow\boxed{x-y+1=0}$$

3. $(\mathcal{C}_\lambda):x^2+y^2-4x+2y+\lambda=0$.

أ. تعيين قيم λ حتى تكون $(\mathcal{C}_\lambda)$ دائرة وتعيين مركزها وطول نصف قطرها.

$$x^2+y^2-4x+2y+\lambda=0\Rightarrow(x-2)^2+(y+1)^2=5-\lambda$$

منه نستنتج أنّ $(\mathcal{C}_\lambda)$ هي الدائرة التي مركزها A وطول نصف قطرها $\sqrt{5-\lambda}$

من أجل $5>\lambda$ أي $\boxed{\lambda\in]-\infty;5[}$.

ب. تعيين قيم λ حيث: $(\Gamma)\cap(\mathcal{C}_\lambda)=\emptyset$.

الدائرتان $(\mathcal{C}_\lambda)$ و(Γ) لا تتقاطعان في حالتين:

الحالة الأولى: المسافة بين المركزين أكبر من مجموع نصفي قطر الدائرتين

$$A\Omega>2\sqrt{2}+\sqrt{5-\lambda}\Rightarrow 4\sqrt{2}>2\sqrt{2}+\sqrt{5-\lambda}\Rightarrow\sqrt{5-\lambda}<2\sqrt{2}$$

$$.\Rightarrow 0<5-\lambda<8\Rightarrow -5<-\lambda<3\Rightarrow -3<\lambda<5\Rightarrow\boxed{\lambda\in]-3;5[}$$

الحالة الثانية: نصف قطر الدائرة $(\mathcal{C}_\lambda)$ أكبر من $AB+2\Omega B$

$$\sqrt{5-\lambda}>2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{5-\lambda}>6\sqrt{2}\Rightarrow 5-\lambda>72\Rightarrow\lambda<-67$$

$$.\Rightarrow\boxed{\lambda\in]-\infty;-67[}$$

[انظر $(\mathcal{C}_1)$ و$(\mathcal{C}_{-76})$] $\boxed{(\Gamma)\cap(\mathcal{C}_\lambda)=\emptyset\Rightarrow\lambda\in]-\infty;-67[\cup]-3;5[}$

ج. تعيين قيمة λ التي من أجلها تكون $(\mathcal{C}_\lambda)$ و(Γ) متماستان خارجيا.

$(\Gamma)\cap(\mathcal{C}_\lambda)$ متماستان خارجيا $\Rightarrow A\Omega=2\sqrt{2}+\sqrt{5-\lambda}\Rightarrow 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{5-\lambda}$

$$.\Rightarrow\sqrt{5-\lambda}=2\sqrt{2}\Rightarrow 5-\lambda=8\Rightarrow\boxed{\lambda=-3}$$

يمثّل المستقيم (Δ) محور القطعة $[A\Omega]$ لأنّه يعامدها في منتصفها.

4. كتابة معادلة (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h الذي مركزه B ونسبته 3.

لتكن النقطة Ω' مركز الدائرة (Γ') و r' نصف قطرها. لدينا:

$$(\Gamma') = h(\Gamma) \Rightarrow \begin{cases} r' = 3r \\ \overrightarrow{B\Omega'} = 3\overrightarrow{B\Omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = 6\sqrt{2} \\ x_{\Omega'} = 3(-2) \\ y_{\Omega'} - 1 = 3(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = 6\sqrt{2} \\ x_{\Omega'} = -6 \\ y_{\Omega'} = 7 \end{cases}$$

$$M(x; y) \in (\Gamma') \Rightarrow (x+6)^2 + (y-7)^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 + 12x - 14y - 78 = 0}$$

5. تعيين جميع المستقيمات التي تمسّ الدائرة (Γ) وتوازي المستقيم (D).

للدائرة (Γ) مماسان يوازيان المستقيم (D)، أحدهما المستقيم (Δ) الذي يمسّ الدائرة (Γ) عند النقطة B والآخر المستقيم (Δ') الذي يمسّ الدائرة (Γ) عند النقطة B' نظيرة النقطة B بالنسبة للمركز Ω.

$$\overrightarrow{\Omega B'} = -\overrightarrow{\Omega B} \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} + 2 = -2 \\ y_{B'} - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} = -4 \\ y_{B'} = 5 \end{cases} \Rightarrow B'(-4; 5)$$

$$M(x; y) \in (\Delta') \Rightarrow \overrightarrow{B'M}\begin{pmatrix} x+4 \\ y-5 \end{pmatrix} . \overrightarrow{B'\Omega}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2(x+4) - 2(y-5) = 0 \Rightarrow \boxed{(\Delta'): x - y + 9 = 0}$$

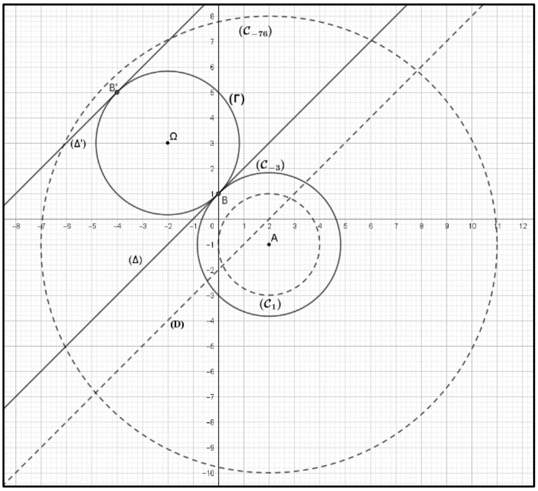
طريقة ②: يمكننا إيجاد نقطتي التماس بين الدائرة (Γ) والمستقيمين الموازيين لـ (D) بدراسة تقاطع المستقيم (D') الذي يشمل النقطة Ω ويعامد المستقيم (D) والدائرة (Γ).

$$M(x; y) \in (D') \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix} . \overrightarrow{u_{(D)}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{(D'): x + y - 1 = 0}$$

$$M(x; y) \in (D') \cap (\Gamma) \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ (x+2)^2 + (-x-2)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ 2x^2 + 8x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{(D') \cap (\Gamma) = \{B(0; 1); B'(-4; 5)\}}$$



* * *

التمرين الثاني:

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

1. حساب الحدّين u_1 و v_1

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \boxed{\frac{7}{4}}\ ; v_1 = \frac{3}{4}v_0 + 1 = \frac{9}{2} + 1 = \boxed{\frac{11}{2}}$$

2. كتابة $u_{n+2} - u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{4}u_{n+1} + 1 - \frac{3}{4}u_n - 1 = \boxed{\frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n)}$$

3. $w_n = u_n - v_n$

برهان أنّ المتتالية (w_n) هندسية يُطلب تعيين حدّها الأول w_0

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 - \frac{3}{4}v_n - 1 = \frac{3}{4}(u_n - v_n) = \frac{3}{4}w_n$$

منه نستنتج أنّ المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدّها الأول $w_0 = u_0 - v_0 = -5$

التعبير عن w_n بدلالة n

$$\boxed{w_n = w_0 \times q^n = -5\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

* * *

التمرين الثالث:

$A(2\,;4\,;1)$ ، $B(0\,;4\,;-3)$ ، $C(3\,;1\,;-3)$ و $D(1\,;0\,;-2)$.

1. **النقط A ، B و C ليست في استقامية : صحيح**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}\ ;\frac{-2}{1}\neq\frac{0}{-3}\Rightarrow$$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

منه ، النقط A ، B و C ليست في استقامية.

2. **$2x+2y-z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) : صحيح**

$$\begin{cases}2x_A+2y_A-z_A-11=2(2)+2(4)-(1)-11=12-12=0\\2x_B+2y_B-z_B-11=2(0)+2(4)-(-3)-11=11-11=0\\2x_C+2y_C-z_C-11=2(3)+2(1)-(-3)-11=11-11=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{(ABC):2x+2y-z-11=0}$$

3. **النقطة $E(3;2;-1)$ هي المسقط العمودي للنقطة D على (ABC) : خطأ**

$\overrightarrow{DE}(2;2;1)$; $\vec{n}(2;2;-1)$; $\overrightarrow{DE}\nparallel\vec{n}\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{DE}\ \text{لا يعامد}\ (ABC)}$

4. **المستقيان (AB) و(CD) من نفس المستوي : خطأ**

$$2(1)-(-2)-11=-7\neq0\Rightarrow D\notin(ABC)$$

$\Rightarrow$ (AB) و (CD) ليسا من نفس المستوي

5. **$\begin{cases}x=2t-1\\y=t-1\\z=-t-1\end{cases};t\in\mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (CD) : صحيح**

$$\begin{cases}3=2t-1\\1=t-1\\-3=-t-1\end{cases}\Rightarrow t=2\,;\begin{cases}1=2t-1\\0=t-1\\-2=-t-1\end{cases}\Rightarrow t=1$$

إحداثيات النقطتين C وD تحققان التمثيل الوسيطي السابق ، فهو إذن تمثيل وسيطي للمستقيم (CD).

6. **يوجد عددان حقيقيان α وβ حيث النقطة $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$: صحيح**

طريقة أولى :

$$I\{(A;\alpha),(B;\beta)\}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}=\dfrac{3}{5}\\\dfrac{4\alpha+4\beta}{\alpha+\beta}=4\\\dfrac{\alpha-3\beta}{\alpha+\beta}=-\dfrac{9}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10\alpha=3\alpha+3\beta\\4\alpha+4\beta=4\alpha+4\beta\\5\alpha-15\beta=-9\alpha-9\beta\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7\alpha - 3\beta = 0 \\ 14\alpha - 6\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow 7\alpha - 3\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{7}{3}\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{(\alpha;\beta) = \left(\alpha;\frac{7}{3}\alpha\right);\alpha \neq 0}$$

طريقة ثانية :

$$\overrightarrow{IA}\left(\frac{7}{5};0;\frac{14}{5}\right)\ ;\ \overrightarrow{IB}\left(-\frac{3}{5};0;-\frac{6}{5}\right)\ ;3\overrightarrow{IA} + 7\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{I\{(A;3),(B;7)\}}$$

ملاحظة : يمكننا إيجاد ما لا نهاية من الثنائيات $(\alpha;\beta)$ حيث $I\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$.

* * *

فهرس

تم بحمد الله

أتمنى لكم التوفيق والنجاح في البكالوريا

عبد الكريم واضحية

أرحب بجميع استفساراتكم

أو ملاحظاتكم أو تصويباتكم

على العنوان التالي

ouailmaths@gmail.com

0668 177 233