مستوى : ثالثة متوسط.

من تقديم : الأستاذ جيوخ العربي.

سلسلة تمارين حول خاصيّة فيثاغورس والمباشرة والعكسيّة وجيب تمام زاوية حادّة.

السنة الدراسية : 2020-2021

◄ تمرين رقم : 01 -تحقّق من فهمك-

■ ABC مثلث قائم في A. طولا ضلعيْه القائمين :

$AB = 5cm$ و $AC = 12cm$.

1. استعمل - خاصيّة فيثاغورس المباشرة - لحساب الطول BC الحقيقي لوتر هذا المثلث.
2. أُرسم المثلث ABC حسب مُعطيات النص، ثمّ قِسْ طول الوتر $[BC]$ كي تدعم حسابك السابق.

■ في كل من الحالتين الآتيتين، بيِّن إن كان المثلث ABC قائم الزاوية أمْ لا.

في الإيجاب، أذكر الرأس القائم واشرح إجابتك :

الحالة الأولى :

$AB = 24cm$ ، $AC = 7cm$ ، $BC = 25cm$.

الحالة الثانيّة :

$AB = 4cm$ ، $AC = 7cm$ ، $BC = 5,75cm$.

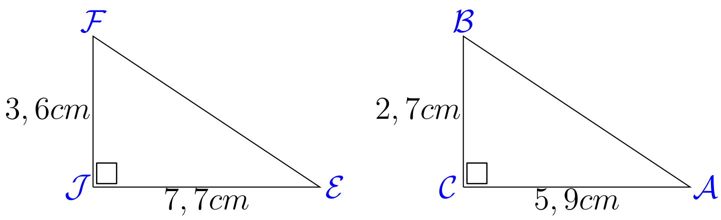
◄ تمرين رقم : 02

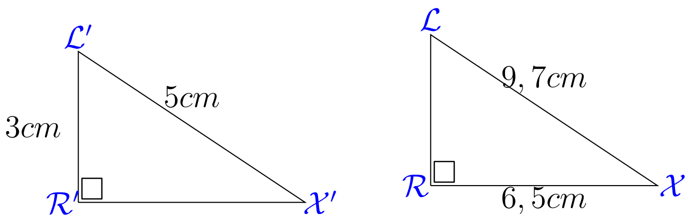
أُكتب المساواة التي تعبّر عن خاصيّة فيثاغورس في كل ممّا يأتي :

- DEF مثلث قائم في E.
- TUV مثلث قائم، وتره $[UV]$.

◄ تمرين رقم : 03

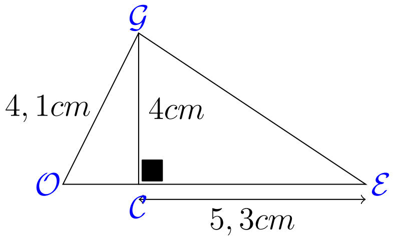
أُحسب طول الضلع الثالث في كل حالة من الحالات التالية :





◄ تمرين رقم : 04

نعتبر الشكل المقابل :



1. أُحسب $\mathcal{OC}$.
2. أُحسب $\mathcal{GE}$.
3. أُحسب مساحة المثلث $\mathcal{GEO}$.

◄ تمرين رقم : 05

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث :

$AB = 12cm$ و $AC = 3cm$.

1. أُرسم شكلاً يُناسب نص التمرين.
2. أُحسب الطول BC.
3. أُحسب قيس الزاوية $\widehat{B}$.
4. بطريقتين مختلفتين، أُحسب قيس الزاوية $\widehat{C}$.

◄ تمرين رقم : 06

ABC مثلث قائم الزاوية في C حيث :

$AB = 16cm$ و $AC = 8cm$.

1. أُرسم شكلاً يُناسب نص التمرين.
2. أُكتب نص خاصيّة فيثاغورس المباشرة بالنسبة للمثلث ABC باستعمال الحروف A ، B و C.
3. أُحسب الطول BC.

قسم الحلول.

◄ حل التمرين رقم : 01

شرح المفصّل -خاصيّة فيثاغورس المباشرة والخاصيّة العكسية لفيثاغورس-

◄ حل التمرين رقم : 02

. كتابة المساواة المعبّرة عن خاصيّة فيثاغورس :

◄ **الحالة الأولى :** بما أنّ : $\mathcal{DEF}$ مثلث قائم في $\mathcal{E}$، إذن، حسب خاصيّة فيثاغورس المباشرة : $\mathcal{DF}^2 = \mathcal{ED}^2 + \mathcal{EF}^2$.

◄ **الحالة الثانية :** بما أنّ : $\mathcal{TUV}$ مثلث قائم، وتره $[\mathcal{UV}]$، إذن، حسب خاصيّة فيثاغورس المباشرة : $\mathcal{UV}^2 = \mathcal{TU}^2 + \mathcal{TV}^2$.

◄ حل التمرين رقم : 03

. حساب طول الضلع المفقود في كل حالة من الحالات الموالية :

◄ **الحالة الأولى :** لنتأمل قليلاً في الشكل، فنجد أنّ $\mathcal{ABC}$ مثلث قائم في $\mathcal{C}$. عملاً بخاصيّة فيثاغورس المباشرة :

$$\mathcal{BA}^2 = \mathcal{CA}^2 + \mathcal{CB}^2$$
$$\mathcal{BA}^2 = 5,9^2 + 2,7^2$$
$$\mathcal{BA}^2 = 34,81 + 7,29$$
$$\mathcal{BA}^2 = 42,1$$
$$\sqrt{\mathcal{BA}^2} = \mathcal{BA} = \sqrt{42,1}$$
$$\mathcal{BA} \simeq 6,49$$

وهذا يوحي لنا أنّ القيمة المقرّبة : $\mathcal{BA} \simeq 6,49cm$.

◄ **الحالة الثانية :** نرى مباشرة، أنّ : $\mathcal{EFJ}$ مثلث قائم في $\mathcal{J}$، حسب خاصيّة فيثاغورس المباشرة، نجد :

$$\mathcal{FE}^2 = \mathcal{JE}^2 + \mathcal{JF}^2$$
$$\mathcal{FE}^2 = 7,7^2 + 3,6^2$$
$$\mathcal{FE}^2 = 59,29 + 12,96$$
$$\mathcal{FE}^2 = 72,25$$
$$\sqrt{\mathcal{FE}^2} = \mathcal{FE} = \sqrt{72,25}$$
$$\mathcal{FE} = 8,5$$

وأخيراً ... نجد : $\mathcal{FE} = 8,5cm$.

◄ **الحالة الثالثة :** بما أنّ المثلث $\mathcal{RXL}$ قائم في $\mathcal{R}$، حسب خاصيّة فيثاغورس المباشرة، نجد :

$$\mathcal{LX}^2 = \mathcal{RX}^2 + \mathcal{RL}^2$$
$$9,7^2 = 6,5^2 + \mathcal{RL}^2$$
$$94,09 = 42,25 + \mathcal{RL}^2$$
$$94,09 - 42,25 = \mathcal{RL}^2$$
$$\mathcal{RL}^2 = 51,84$$
$$\sqrt{\mathcal{RL}^2} = \mathcal{RL} = \sqrt{51,84}$$
$$\mathcal{RL} = 7,2$$

إذن : $\mathcal{RL} = 7,2cm$.

◄ **الحالة الرابعة :** بما أنّ المثلث $\mathcal{R'X'L'}$ قائم في $\mathcal{R'}$، حسب خاصيّة فيثاغورس المباشرة، نجد :

$$\mathcal{L'X'}^2 = \mathcal{R'X'}^2 + \mathcal{R'L'}^2$$
$$5^2 = \mathcal{R'X'}^2 + 3^2$$
$$25 = \mathcal{R'X'}^2 + 9$$
$$25 - 9 = \mathcal{R'X'}^2$$
$$\mathcal{R'X'}^2 = 16$$
$$\sqrt{\mathcal{R'X'}^2} = \mathcal{R'X'} = \sqrt{16}$$
$$\mathcal{R'X'} = 4$$

وهذا ما يضمن لنا : $\mathcal{R'X'} = 4cm$.

◄ حل التمرين رقم : 04

.1 حساب $\mathcal{OC}$:

لنتأمل قليلاً في الشكل، فنجد أنّ $\mathcal{OCG}$ مثلث قائم في $\mathcal{C}$. عملاً بخاصيّة فيثاغورس المباشرة :

$$\mathcal{OG}^2 = \mathcal{OC}^2 + \mathcal{CG}^2$$
$$\mathcal{OC}^2 = \mathcal{OG}^2 - \mathcal{CG}^2$$
$$\mathcal{OC}^2 = 4,1^2 - 4^2$$
$$\mathcal{OC}^2 = 16,81 - 16$$
$$\mathcal{OC}^2 = 0,81$$
$$\sqrt{\mathcal{OC}} = \mathcal{OC} = \sqrt{0,81}$$
$$\mathcal{OC} = 0,9$$

وهذا يوحي لنا أنّ : $OC \simeq 0,9cm$.

2. حساب GE :

نتبّع نفس الخاصيّة السابقة.

لدينا : CEG مثلث قائم في C، حسب خاصيّة فيثاغورس المباشرة، فنجد :

$$GE^2 = CE^2 + CG^2$$
$$GE^2 = 5,3^2 + 4^2$$
$$GE^2 = 28,09 + 16$$
$$GE^2 = 44,09$$
$$\sqrt{GE^2} = GE = \sqrt{44,09}$$
$$GE \simeq 6,64$$

إذن، نجد : $GE \simeq 6,64cm$.

3. حساب مساحة المثلث GEO:

نذكّر بالعلاقة التالية :

مساحة المثلث = (القاعدة × الإرتفاع) ÷2 .

هيا معاً -حبيبي المجتهد- لتطبيق العلاقة السابقة، من أجل حساب مساحة المثلث GEO.

لدينا : $S_{GEO} = \dfrac{\overbrace{OE}^{=OC+CE} \times CG}{2} = \dfrac{6,2 \times 4}{2} = 12,4$.

وأخيراً ... نجد أنّ مساحة المثلث GEO تُعطى على النحو التالي : $S_{GEO} = 12,4cm^2$.

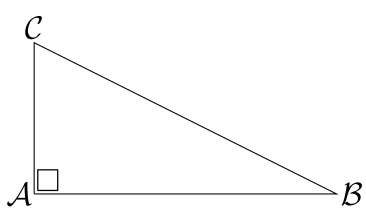
قبل تطرق إلى حل هذا التمرين الذي بين أيدينا، سنعرج قليلاً على مفهوم جيب تمام زاوية حادّة وما الهدف منه؟.

كل هذا ستجدونه عبر الرابط الموالي :

شرح المفصّل - جيب تمام زاوية حادّة -

◄ حل التمرين رقم : 05

1. رسم شكلاً يُناسب نص التمرين :



2. حساب الطول BC :

◇ بما أنّ : ABC مثلث قائم في A، حسب خاصيّة فيثاغورس، نجد :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 12^2 + 3^2$$
$$BC^2 = 144 + 9$$
$$BC^2 = 153$$
$$\sqrt{BC^2} = BC = \sqrt{153}$$
$$BC \simeq 12,37$$

إذن : $BC = \sqrt{153} \simeq 12,37cm$.

3. حساب قيس الزاوية $\widehat{B}$:

بما أنّ المثلث ABC قائم في A. ونعلم أيضاً :

جيب تمام زاوية حادّة = طول الضلع المجاور ÷ طول الوتـر.

بمعنى آخر :

$$cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC}$$
$$cos\widehat{B} = \frac{12}{\sqrt{153}}$$
$$cos\widehat{B} = 0,9701425$$

باستعمال الآلة الحاسبة (عزيزي الحاذق تأكد بأنّ الآلة الحاسبة الخاصّة بك على **DEG**).

الآن، نجد : $\widehat{B} \simeq 14,04°$.

4. بطريقتين مختلفتين، حساب قيس الزاوية $\widehat{C}$:

◄ طريقة أولى :

تذكير مهم : سبق لك أن لاحظت أنّ : " مجموع أقياس الزوايا الداخلية لمثلث هو $180°$ ".

وعليه : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ وبالتالي : $\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B}$

حسب ما فات، نجد أنّ :

$\widehat{C} = 180° - 90° - 14,04° = 75,96°$.

وأخيراً ... نجد : $\widehat{C} = 75,96°$.

◄ طريقة ثانية :

بما أنّ المثلث ABC قائم الزاوية في A، وعليه :

$$cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC}$$
$$cos\widehat{C} = \frac{3}{\sqrt{153}}$$
$$cos\widehat{C} \simeq 0,242535625$$

باستعمال الآلة الحاسبة، نجد القيمة التقريبية للزاواية $\widehat{C}$.

$\widehat{C} = 75,96°$.