مستوى : ثالثة متوسط
متوسطة : زرقاوي غانم
إنجاز الأستاذ : جيوخ العربي

سلسلة تمارين في المثلثـــات.

السنة الدراسية : 2021-2020

التمرين (01)

هل يمكن إنشاء مثلث ABC بحيث :

$AB = 7cm$، $AC = 4cm$ و $BC = 2cm$؟.

أنشئ مثلثاً ABC بحيث :

$AB = 2,3cm$، $AC = 2,7cm$ و $BC = 3,2cm$.

التمرين (02)

1. أرسم مثلثا ABC قائم الزاوية في A حيث $\widehat{ABC} = 30°$.

المستقيم العمودي على (BC) في C يقطع (AB) في النقطة D.

2. حدّد في المثلثين ABC و DBC ضلعا وزاويتين متقايستين

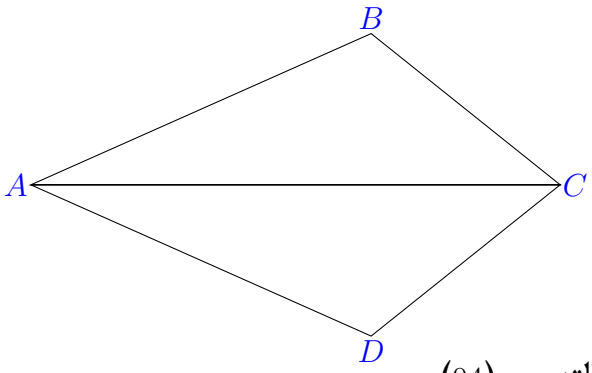
مثنى مثنى. ماذا تستنتج ؟.

التمرين (03)

تأمّل الشكل الذي في الأسفل.

1. بيّن أنّ المثلثين ABC و ADC متقايسان.

2. استنتج أنّ (AC) و (DB) متعامدان.



التمرين (04)

أرسم دائرة $(\mathcal{C})$ مركزها O و $[AB]$ و $[CD]$ قطرين لها.

1. بيّن أنّ المثلثين OAD و OBC متقايسان.

2. استنتج أنّ المثلثين ABC و ADB متقايسان.

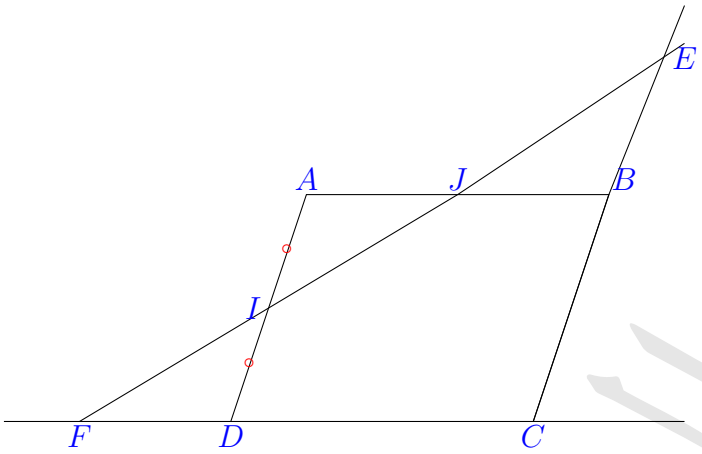
التمرين (05)

لاحظ الرسم الذي في الأسفل حيث $ABCD$ متوازي الأضلاع

والنقطتين I و J على التوالي منتصفي القطعتين $[AD]$ و $[AB]$.

1. بيّن أنّ المثلثين FDI و JAI متقايسان.

2. استنتج أنّ : $FI = IJ = JE$.



التمرين (06)

1.أ- أرسم مثلثا ABC والنقطة I منتصف $[AB]$.

المستقيم المار من I و الموازي لـ (BC) يقطع (AC) في النقطة J و

المستقيم المار من I و الموازي لـ (AC) يقطع (BC) في النقطة K.

ب- بيّن أنّ المثلثين AIJ و BIK متقايسان.

2. ما هي طبيعة الرباعي $IJCK$ ؟.

3. استنتج أنّ : $BC = 2IJ$.

التمرين (07)

ليكن المثلث EFG متقايس الأضلاع.

والنقاط M و N و P تنتمي على التوالي إلى $[FG]$ و $[EG]$ و $[EF]$ حيث : $FM = GN = EP$.

- بيّن أنّ المثلثات FMP و GNM و NEP متقايسة مثنى مثنى.
- استنتج طبيعة المثلث MNP.

التمرين (08)

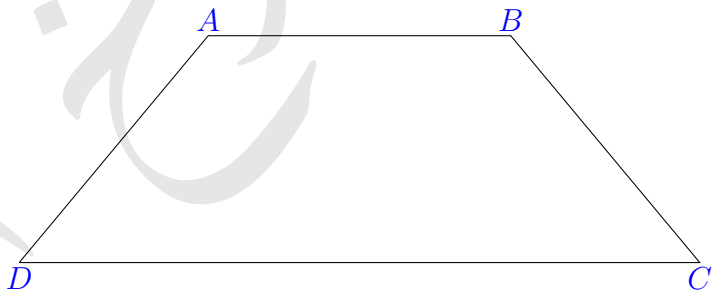
1. أنقل الشكل الذي في الأسفل على كراسك حيث $ABCD$ رباعي و $AD = BC$ و $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.

2.أ- قارن المثلثين ADC و BCD.

ب- استنتج أنّ : $AC = BD$.

3. المستقيمان (AD) و (BC) يتقاطعان في E.

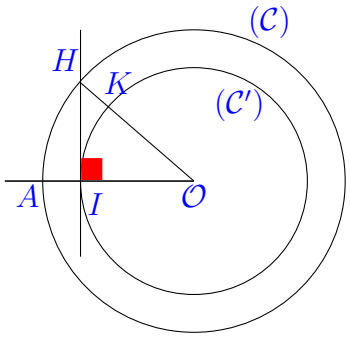
- ما طبيعة المثلث EAB ؟.



التمرين (09)

تأمّل الشكل الذي في الأسفل حيث $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}')$ دائرتان لهما نفس المركز O. 1. بيّن أنّ المثلثين HIO و AKO متقايسان.

2. ماذا يمثّل المستقيم (AK) بالنسبة إلى الدائرة $(\mathcal{C}')$ ؟.



التمرين (10)

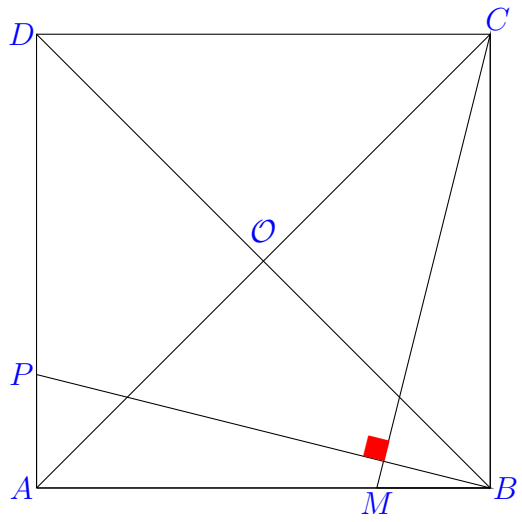
تأمّل الرسم الذي في الأسفل حيث $ABCD$ مربّع مركزه O.

1.أ- بيّن أنّ $\widehat{BCM} = \widehat{ABP}$.

ب- استنتج أنّ المثلثين MCB و ABP متقايسان.

2.أ- بيّن أنّ المثلثين OMB و OPA متقايسان.

ب- استنتج أنّ المثلث POM قائم و متساوي الساقين.



التمرين (11)

1. أرسم مثلثا EFG قائم الزاوية في E و النقطة I منتصف $[EF]$.

المستقيم العمودي على (EF) والمار من F يقطع (IG) في H.

2. قارن بين المثلثين EIG و FIH.

3. استنتج أنّ $IH = IG$.

4.أ- قارن بين المثلثين FIG و EIH.

ب- استنتج أنّ $EH = FG$.

التمرين (12)

1. أرسم مثلثا MNP متقايس الضلعين قمته الرئيسية M و منصف الزاوية $\widehat{MNP}$ الذي يقطع (MP) في A ومنصف الزاوية $\widehat{MPN}$ الذي يقطع (MN) في B.

2. قارن المثلثين NPA و NPB واستنتج أنّ $MA = MB$.

3. المستقيمان (NA) و (PB) يتقاطعان في I.

◄ قارن المثلثين MIA و MIB.

4. استنتج أنّ $[IM]$ هو منصف الزاوية $\widehat{AIB}$.

التمرين (13)

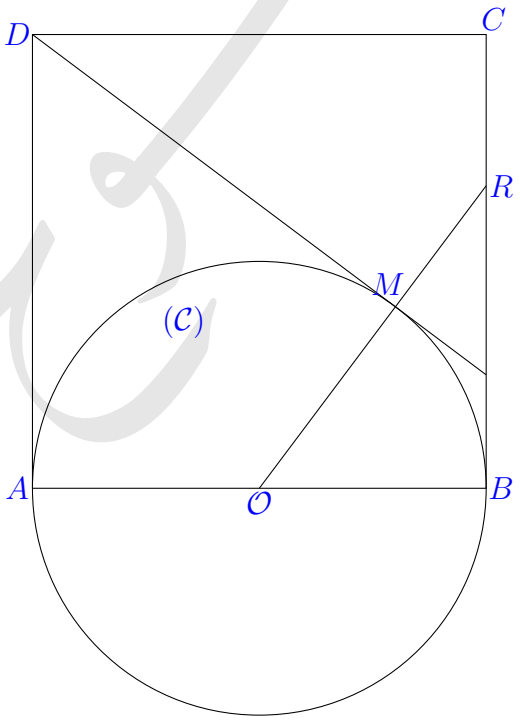
تأمّل الرسم الذي في الأسفل حيث $ABCD$ مربّع و المستقيم (DM) مماس للدائرة $(\mathcal{C})$ التي قطرها $[AB]$.

R هي نقطة تقاطع المستقيمين (OM) و (BC).

1.أ- بيّن أنّ المثلثين OAD و OMD متقايسان.

ب- استنتج أنّ $DM = DC$.

2. بيّن أنّ المثلث CMR متساوي الساقين.



التمرين (14)

لاحظ - عزيزي الذكي - الرسم الذي في الأسفل حيث LOT مثلث و $LO = LT$ و $LM = LN$.

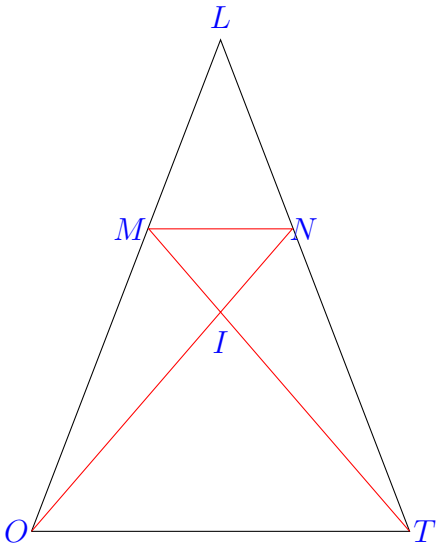
1. قارن المثلثين LON و LTM. استنتج أنّ $\widehat{LMT} = \widehat{LNO}$.

2. النقطة I هي نقطة تقاطع المستقيمين (ON) و (TM).

أ- بيّن أنّ $MO = TN$ و $\widehat{IMO} = \widehat{INT}$.

ب- قارن المثلثين IOM و ITN، ثمّ استنتج أنّ $IM = IN$.

ج- استنتج أنّ $[IL]$ منصف الزاوية $\widehat{MIN}$.



التمرين (15)

لاحظ الشكل الذي في الأسفل حيث M منتصف $[LI]$ و $[Ax)$ منصف الزاوية $\widehat{LAI}$.

المستقيم المّار من M و العمودي على $[Ax)$ يقطع (AL) في E و (AI) في F و (Ax) في J.

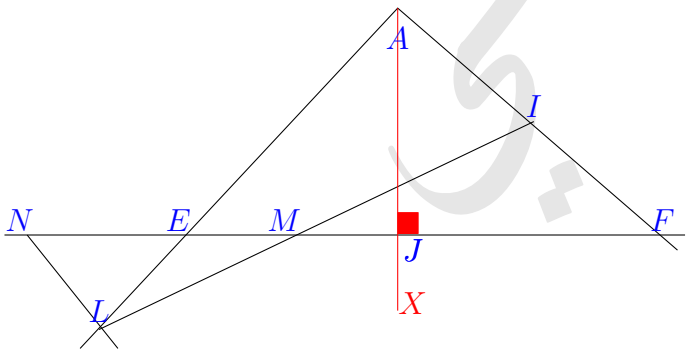
1.أ- بيّن أن المثلّث AEF متساوي الساقين.

ب- استنتج أنّ (Ax) هو الموسّط العمودي لـ $[EF]$.

2. المستقيم المار من L والموازي لـ (AI) يقطع (EF) في N.

أ- بيّن أنّ LEN متساوي الساقين قمّته الرّئيسيّة L.

ب- قارن المثلّثين LNM و MIF، ثم استنتج أنّ $LE = IF$.

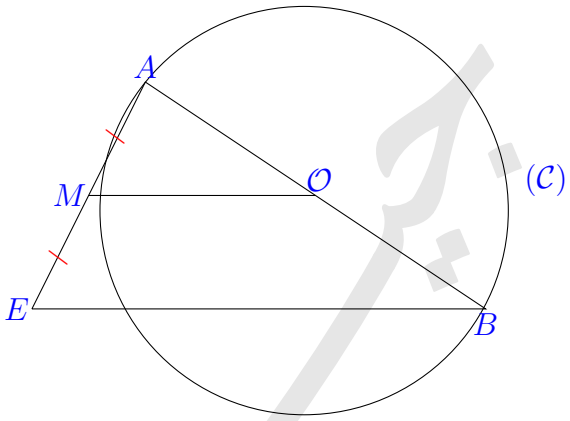


التمرين (16)

$(\mathcal{C})$ دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$.

M هي منتصف القطعة المستقيمة $[AE]$.

◄ أثبت أنَّ المستقيمين (OM) و (BE) متوازيان.



التمرين (17)

ABC مثلث.

B' نظيرة A بالنسبة إلى B، و C' نظيرة A بالنسبة إلى C.

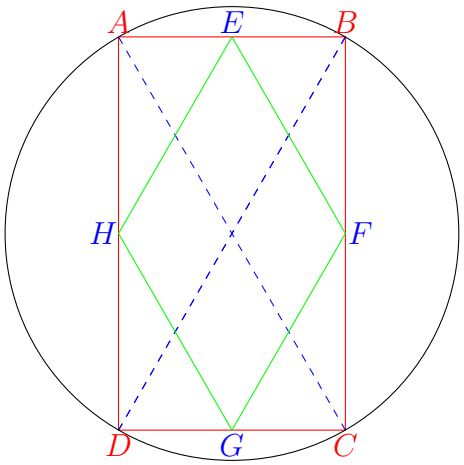
◄ أثبت أنَّ المستقيمين (CB) و $(C'B')$ متوازيان.

التمرين (18)

$ABCD$ مستطيل مرسوم في دائرة نصف قطرها $3cm$.

E و F و G و H منتصفات أضلاعه.

◄ ما نوع الرباعي $EFGH$ ؟ ثمّ أُحسب محيطه.



التمرين (19)

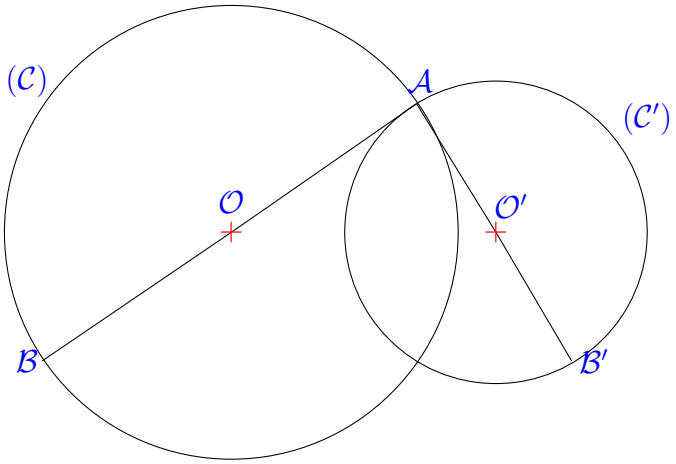
تمَعَّنْ العبارات الآتية. أيها صحيحة وأيها خاطئة؟ علّلْ إجابتك.

1. $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}')$ دائرتان مركزاهما على التوالي $(\mathcal{O})$ و $(\mathcal{O}')$.

$\mathcal{A}$ هي إحدى نقطتي تقاطعهما.

$(\mathcal{AO})$ يقطع $(\mathcal{C})$ في $\mathcal{B}$ و $(\mathcal{AO}')$ يقطع $(\mathcal{C}')$ في $\mathcal{B}'$.

◄ **فالمستقيمان** $(\mathcal{OO}')$ **و** $(\mathcal{BB}')$ **متقاطعان.**

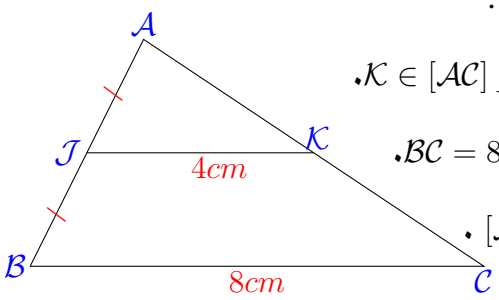


2. في المثلث $\mathcal{ABC}$:

$\mathcal{J}$ منتصف $[\mathcal{AB}]$ و $\mathcal{K} \in [\mathcal{AC}]$.

$\mathcal{JK} = 4cm$ و $\mathcal{BC} = 8cm$.

◄ $\mathcal{K}$ **منتصف** $[\mathcal{AC}]$.



3. $\mathcal{AEF}$ مثلث. $\mathcal{I}$ نقطة من $[\mathcal{AE}]$ تحقّق $\mathcal{AI} = \frac{1}{3}\mathcal{AE}$.

المستقيم المرسوم من $\mathcal{I}$ موازياً $(\mathcal{EF})$ يقطع $[\mathcal{AF}]$ في $\mathcal{J}$، كما أنّ :

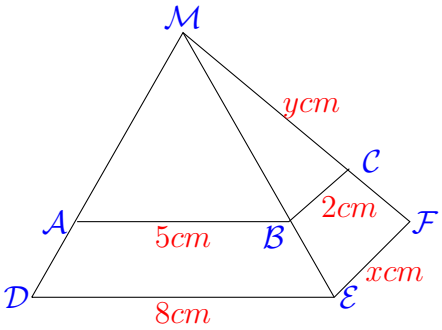
$\mathcal{JI} = 4cm$ و $\mathcal{EF} = 8cm$ (يجب أن يكون 12 وليس 8).

◄ **محيط المثلث** $\mathcal{AEF}$ **يساوي ثلاثة أمثال محيط المثلث** $\mathcal{AIJ}$.

4. في الشكل المرافق $\mathcal{A} \in [\mathcal{MD}]$ و $\mathcal{B} \in [\mathcal{ME}]$ و $\mathcal{C} \in [\mathcal{MF}]$.

أطوال بعض القطع المشار إليها عددياً أوْ بالرموز x و y.

◄ **يمكن** $x = 3,2cm$ **ولا يمكن حساب قيمة** y.



التمرين (20)

$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. $OB = 3cm$ و $OC = 2cm$.

E هي نظيرة النقطة D بالنسبة إلى C.

1. أثبت أنَّ المستقيمين (OC) و (BE) متوازيان.
2. أُحسب الطول BE.
3. أرسم شكلاً مناسباً في حالة $\widehat{COB} = 60°$.

التمرين (21)

$(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}')$ دائرتان متمركزتان في $\mathcal{O}$.

ونصفا قطريهما على التوالي $2,5cm$ و $5cm$.

$\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ نقطتان من الدائرة تحقّقان $\mathcal{AB} = 4cm$. المستقيمان $(\mathcal{OA})$ و $(\mathcal{OB})$ يقطعان الدائرة $(\mathcal{C}')$ على التوالي في $\mathcal{A}'$ و $\mathcal{B}'$.

1. أرسم شكلاً يحقّق معطيات التمرين.
2. ما الوضع النسبي للمستقيمين $(\mathcal{AB})$ و $(\mathcal{A'B'})$ ؟.
3. احسب طول القطعة $[\mathcal{A'B'}]$.

ملاحظة هامة :

إذا اشتركت دائرتان بمركز واحد، قلنا أنّهما متمركزتان.

التمرين (22)

$\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ ثلاث نقاط على إستقامية واحدة.

$\mathcal{A}$ نقطة تقع خارج المستقيم المار بها، $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ و $\mathcal{J}$ هي على التوالي منتصفات القطع المستقيمة $[\mathcal{AB}]$ و $[\mathcal{AC}]$ و $[\mathcal{AD}]$.

أثبت أنَّ النقاط $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ و $\mathcal{J}$ على إستقامية واحدة.

التمرين (23)

$(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}')$ دائرتان متمركزتان في $\mathcal{O}$.

ونصفا قطريهما على التوالي $2cm$ و $4cm$.

$\mathcal{I}$ و $\mathcal{J}$ نقطتان من $(\mathcal{C}')$ تحقّقان $\mathcal{IJ} = 5cm$ والقطعة $[\mathcal{OI}]$ تقطع $(\mathcal{C})$ في $\mathcal{S}$، كما أنّ المستقيم المار بالنقطة $\mathcal{S}$ موازياً $(\mathcal{IJ})$ ويقطع القطعة المستقيمة $[\mathcal{OJ}]$ في $\mathcal{T}$.

1. أرسم شكلاً حسب معطيات النص.
2. أثبت أنّ $\mathcal{T}$ هي منتصف القطعة المستقيمة $[\mathcal{OJ}]$.
3. استنتج أنّ $\mathcal{T}$ تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C})$.

التمرين (24)

$\mathcal{MNP}$ مثلث. $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$ نقطتان من نصف المستقيم $[\mathcal{MN})$ تحقّقان $\mathcal{MB} = \frac{3}{2}\mathcal{MN}$ و $\mathcal{MC} = \frac{1}{2}\mathcal{MB}$

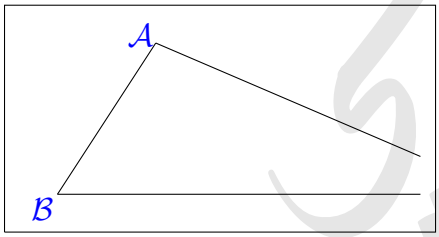
والنقطة $\mathcal{A}$ هي منتصف القطعة المستقيمة $[\mathcal{MP}]$.

1. أرسم شكلاً متفقاً مع معطيات التمرين.
2. أثبت أنّ المستقيمين $(\mathcal{AC})$ و $(\mathcal{BP})$ متوازيان.

التمرين (25)

في الشكل المرافق، $\mathcal{ABC}$ مثلث، والنقطة $\mathcal{C}$ مخفية!.

دون أن ترسم خارج الإطار، استخدم المسطرة والمدور لرسم النقطة $\mathcal{M}$ منتصف $[\mathcal{AC}]$ والنقطة $\mathcal{N}$ منتصف $[\mathcal{BC}]$.

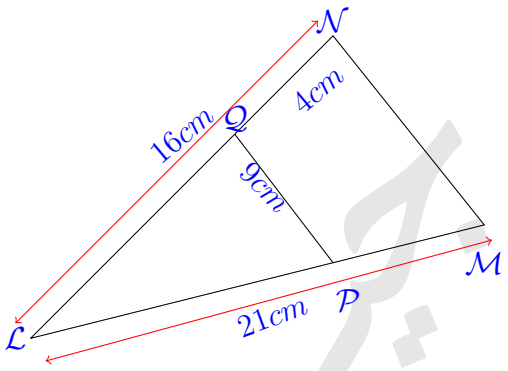


التمرين (26)

في الشكل المرافق :

$[\mathcal{PM}] \in \mathcal{P}$ و $[\mathcal{QN}] \in \mathcal{Q}$ و $(\mathcal{PQ}) /\!/ (\mathcal{MN})$.

◄ أُحسب كلا من الطولين $\mathcal{LP}$ و $\mathcal{MN}$.



التمرين (27)

$\mathcal{ABC}$ مثلث. $\mathcal{M}$ نقطة من الضلع $[\mathcal{AB}]$، والمستقيم المرسوم من $\mathcal{M}$ موازياً $(\mathcal{BC})$ يقطع الضلع $\mathcal{AC}$ في $\mathcal{N}$. والنقطة $\mathcal{N}$ هي صورة النقطة $\mathcal{M}$ وفق التناظر الذي مركزه $\mathcal{B}$.

$\mathcal{L}$ هي نقطة تقاطع القطعتين $[\mathcal{BC}]$ و $[\mathcal{KN}]$.

◄ أثبت أنَّ النقطة $\mathcal{L}$ هي منتصف القطعة $[\mathcal{KN}]$.

توجيه :

1. أُرسم شكلاً يتفق مع معطيات التمرين.
2. رمِّزْ القطع المستقيمة المتساوية، ولوِّنْ مستقيمين متوازيين.
3. لماذا يمكن استعمال مبرهنة مستقيم المنتصفين رقم (03)؟ وفي أي مثلث؟.
4. أنجز الحل بلغة سليمة.

التمرين (28)

في الشكل المرافق :

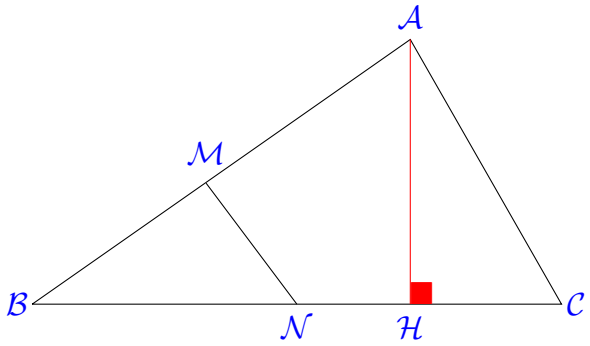
$(\mathcal{MN})$ و $(\mathcal{AC})$ متوازيان ولنفترض أنّ : $[\mathcal{AH}] \perp [\mathcal{BC}]$.

$\mathcal{BN} = 3cm$ و $\mathcal{BM} = 2,4cm$ و $\mathcal{AB} = 5cm$

و $\mathcal{MN} = 1,8cm$.

1. أُحسب محيط المثلث $\mathcal{ABC}$.
2. نضع : $\mathcal{AH} = 3cm$.

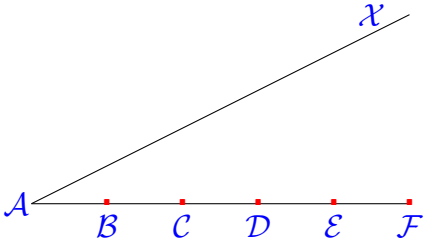
◄ أُحسب مساحة المثلث $\mathcal{ABC}$، ثم مساحة المثلث $\mathcal{BMN}$.



التمرين (29)

◄ تأمل الشكل المرافق، ووضِّعْ نقطة $\mathcal{M}$ على نصف المستقيم $[\mathcal{AX}]$.

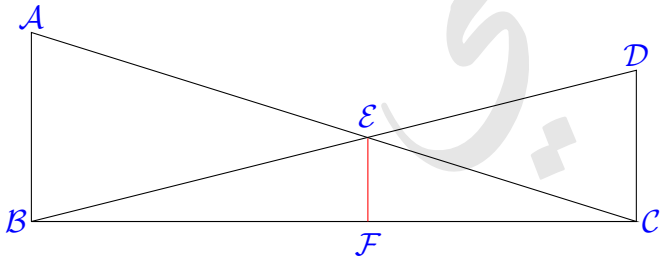
◄ دون استعمال مسطرة مدرجة، قسِّمْ القطعة المستقيمة $[\mathcal{AM}]$ إلى خمس قطع متساوية.



التمرين (30)

في الشكل أسفله المستقيمات : $(\mathcal{AB})$ و $(\mathcal{EF})$ و $(\mathcal{DC})$ متوازية.

◄ أثبت المساواة التالية : $\frac{1}{\mathcal{EF}} = \frac{1}{\mathcal{AB}} + \frac{1}{\mathcal{DC}}$.



التمرين (31)

قلْ إن كنت موافقاً أم لا على التأكيدات الآتية :

1. مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث يقع دوماً داخل المثلث.
2. نقطة تلاقي الارتفاعات للمثلث يمكن أن تقع على أحد أضلاعه دون أن تقع على أحد رؤوسه.
3. في المثلث القائم، تقع نقطة تلاقي الارتفاعات في رأس الزوية القائمة لهذا المثلث.
4. في المثلث المتساوي الأضلاع، نقطة تلاقي الارتفاعات ومركزا الدائرتين المارة برؤوس والماسة لأضلاعه داخلاً ومركز الثقل، جميع هذه النقاط منطبقة.
5. في مثلث متساوي الساقين المتوسطات هي أيضاً ارتفاعات ومحاور ومنصفات زوايا المثلث.
6. $[AI]$ متوسط في مثلثٍ ABC. النقطة $\mathcal{J}$ هي منتصف $[AB]$ والنقطة $\mathcal{K}$ هي منتصف $[AC]$.

إذن، المستقيمان $\mathcal{JK}$ و AI متقاطعان في مركز ثقل المثلث ABC.

التمرين (32)

SRT مثلث متساوي الساقين في S، والنقطة $\mathcal{M}$ منتصف ضلعه $[RT]$.

1. أرسم شكلاً يناسب التمرين.
2. لماذا تنتمي النقطة $\mathcal{O}$، مركز الدائرة $(\mathcal{C})$ المرسومة على المثلث SRT، إلى المستقيم SM ؟.
3. أرسم النقطة $\mathcal{O}$ والدائرة $(\mathcal{C})$.

التمرين (33)

تشارك ثلاثة مزارعين في حفر بئر تملأ خزاناتهم، على أن تقع البئر على مسافات متساوية عن تلك الخزانات التي تبعد عن بعضها المسافات الآتية $30m$ و $19,5m$ و $21m$.

◄ أرسم مثلثاً ABC يمثل الخزانات الثلاث وأشر بنقطة $\mathcal{P}$ إلى موقع البئر.

التمرين (34)

1. أرسم مثلثاً ABC بمقاس كبير نسبياً ولا يكون متساوي الساقين.
2. أرسم مركز تعامده H ومركز الدائرة المرسومة عليه $\mathcal{O}$، ثمّ أرسم تلك الدائرة $(\mathcal{C})$.
3. أرسم H_1 و H_2 و H_3 نظيرات النقطة H على التوالي بالنسبة إلى المستقيمات (AB) و (BC) و (CA).
4. أرسم J_1 و J_2 و J_3 نظيرات النقطة H على التوالي بالنسبة إلى النقاط I_1 و I_2 و I_3 منتصفات أضلاع المثلث ABC.
5. ما الخواص التي تستخلصها من الشكل الذي رسمته؟.

التمرين (35)

اقرأ النص والحل المنجز من قبل أحد الطلاب. ثم حرِّرْ الحل مع الأخذ بجمل ملاحظات المصحح.

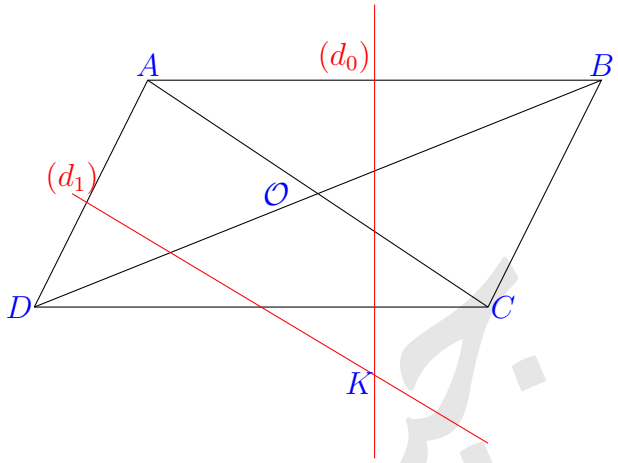
النص :

$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه $\mathcal{O}$ و (d_0) و (d_1) محورا $[AB]$ و $[AD]$ على التوالي، متقاطعان في K.

1. ارسم شكلاً متفقاً مع معطيات التمرين.
2. أثبت أنَّ : $[OK]\perp[BD]$.

حل الطالب، مع ملاحظات المصحح :

1. الرسم :



2.

◁ K هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABD.

هذا ليس من معطيات النص، عليك أن تشرح لماذا.

◁ إذن OK هو محور $[BD]$.

جيد، لكنك نسيت تأكيد أنَّ O هي منتصف $[BD]$ ولماذا؟.

◁ إذن، $[OK]$ و $[BD]$ متعامدان.

التمرين (36)

ABC مثلث. I و J و K هي، على التوالي، منتصفات أضلاعه $[BC]$ و $[AB]$ و $[AC]$.

1. أرسم شكلاً.
2. أثبت أنَّ الرباعي $AJIK$ هو متوازي أضلاع.
3. وضِّحْ النقطة G مركز ثقل المثلث ABC، والنقطة O منتصف القطعة $[JK]$.
4. أثبت أنَّ النقطة O هي منتصف القطعة $[AI]$.
5. أثبت أنَّ النقطة G هي مركز ثقل المثلث IJK.

التمرين (37)

1. أرسم مثلثاً ABC، ثمّ أرسم ارتفاعه $[AH]$ ومركز ثقله G.

أرسم أيضاً $[GK]$ ارتفاع المثلث BCG.

2. أثبت أنَّ المستقيمين (AH) و (GK) متوازيان.
3. أثبت أنَّ : $GK = \frac{1}{3}AH$.
4. استنتج أنَّ مساحة المثلث BCG تساوي ثُلث مساحة المثلث ABC.

التمرين (38)

ABC مثلث قائم في A، والنقطة O هي مركز الدائرة المرسومة داخله.

◀ أرسم شكلاً مناسباً للتمرين، ثمّ أثبت أنَّ $\widehat{BOC} = 135°$.

التمرين (39)

1. أرسم مثلثاً ABC، بحيث : $AB = 7cm$ و $AC = 9cm$ و $\widehat{BAC} = 70°$.
2. أرسم النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.
3. المستقيم المار بالنقطة G موازياً (AB) يقطع (AC) في M.

◀ أُحسب الطولين MC و MG بالتقريب إلى أقرب جزء من مئة.

التمرين (40)

◀ أرسم مثلثاً BCG، ثمّ أرسم، باستعمال المسطرة والمدور فقط!، النقطة A التي تجعل G مركز ثقل المثلث ABC. أكتب بلغة سليمة وبالتفصيل الخطوات المتبعة في الرسم.

﴿لا تنسوني بالدعاء لي ولوالدي الكريمين - حفظهما الله -﴾