قواسم عدد طبيعي القاسم المشترك الأكبر الكسور غير القابلة للاختزال –تمارين مع الحل السنة الرابعة متوسط-

التمرين1:

1- حدد المساواة التي تعبر عن القسمة الإقليدية للعدد 1512 على 21.

2- أكتب $\frac{720}{1512}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

التمرين2:

نعتبر العددين الطبيعيين 63 و 105.

1. عين قائمة قواسم كل من هذين العددين.
2. ما هو القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين؟ هل هما أوليان فيما بينهما؟ برر.
3. اجعل الكسر $\frac{63}{105}$ غير قابل للاختزال.

التمرين3:

نعتبر العددين 286 و 130.

1- باستعمال خوارزمية إقليدس عين $PGCD\,(286;130)$.

2- ليكن الكسر $A=\frac{286}{130}$. أكتب A على شكل كسر غير قابل للاختزال.

المسألة1:

يعرض بائع زهور للبيع 75 زهرة نرجس و 90 زهرة أقحوان.

1. باستعمال كل الزهور، هل يمكنه تشكيل 5 باقات متماثلة؟ 6 باقات؟
2. ما هو أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور؟ ما هو عدد زهور النرجس و زهور الأقحوان في كل باقة؟

المسألة2:

نعتبر العددين 3073 و 1317.

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 3073 و 1317.
2. يشارك تلاميذ في مسابقة في الرياضيات حسب الفرق. يوجد 3073 تلميذة و 1317 تلميذ. يجب تكوين فرق متماثلة (لها نفس عدد التلاميذ و نفس التوزيع بين البنات و الأولاد) بتعيين كل مشارك في فريق من الفرق.

أ) ما هو أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة التي يمكن تشكيلها؟

ب) عين في هذه الحالة تشكيلة كل فريق.(عدد البنات و عدد الأولاد) .

حل التمرين1

1. $1512 = 21 \times 72 + 0$. حاصل القسمة هو 72 بينما الباقي 0.
2. لدينا: $1512 = 21 \times 72$ و $720 = 10 \times 72$ و بالتالي:

$\frac{720}{1512} = \frac{10 \times 72}{21 \times 72} = \frac{10}{21}$. الكسر $\frac{10}{21}$ غير قابل للاختزال.

حل التمرين2

1. قواسم العدد 63 هي: $1، 3، 7، 9، 21، 63$.

قواسم العدد 105 هي: $1، 3، 5، 7، 15، 21، 35، 105$.

2. نلاحظ من القائمتين أن قواسمهما المشتركة هي: $1، 3، 7، 21$

و بالتالي فإن:

$PGCD\,(105;63) = 21$. و بما أن $PGCD\,(105;63) \neq 1$ فإن العددين 105 و 63 ليسا أوليين فيما بينهما.

3. لدينا: $105 = 21 \times 5$ و $63 = 21 \times 3$ و منه: $\frac{63}{105} = \frac{21 \times 3}{21 \times 5} = \frac{3}{5}$.

الكسر $\frac{3}{5}$ غير قابل للاختزال.

حل التمرين3

1.

	2	← الحاصل
286	130	26 ← القاسم و المقسوم
	26	0 ← الباقي

$286 = 130 \times 2 + 26$

$130 = 26 \times 5 + 0$

آخر باق غير معدوم للقسمات الإقليدية المتتابعة هو 26

و بالتالي: $PGCD\,(286;130) = 26$

2. حسب نتيجة السؤال الأول لدينا: $286 = 26 \times 11$ و $130 = 26 \times 5$ و منه:

$$A = \frac{286}{130} = \frac{26 \times 11}{26 \times 5} = \frac{11}{5}$$

الكسر $\frac{11}{5}$ غير قابل للاختزال.

1. عدد الزهور المعروضة للبيع هو: $165 = 90 + 75$. لدينا: $165 : 5 = 33$
و بالتالي يمكن البائع تشكيل 5 باقات متماثلة بحيث تشمل كل باقة 15 زهرة نرجس و 18 زهرة أقحوان لأن: $75 : 5 = 15$ و $90 : 5 = 18$.
في حين: $165 : 6 = 27.5$
و بالتالي لا يمكن للبائع تشكيل 6 باقات متماثلة(العدد 27.5 ليس عددا طبيعيا).

2. إذا رمزنا إلى أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور بالرمز n فيجب أن يقسم n كلا من العددين 75 و 90 و بالتالي فإن n قاسم مشترك للعددين 75 و 90 و بالإضافة إلى ذلك فإن n هو أكبر هذه القواسم.
إذن n هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 75 و 90. لنحسب باستعمال مثلا خوارزمية إقليدس $PGCD(90,75)$.

$$90 = 75 \times 1 + 15$$
$$75 = 15 \times 5 + 0$$

آخر باق غير معدوم هو 15 و منه: $PGCD(90,75) = 15$.
إذن أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور هو: 15.
لدينا: $75 : 15 = 5$ و $90 : 15 = 6$ و بالتالي فعدد زهور النرجس في كل باقة هو: 5 بينما عدد زهور الأقحوان في كل باقة هو: 6.
نجد في كل باقة 11 زهرة.

1. لنحسب باستعمال مثلا خوارزمية إقليدس $PGCD(3073,1317)$.
لدينا:

$$3073 = 1317 \times 2 + 439$$
$$1317 = 439 \times 3 + 0$$

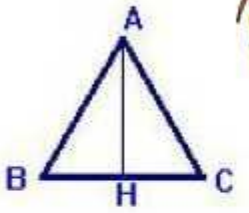
آخر باق غير معدوم هو 439 ومنه:
$PGCD(3073,1317) = 439$

2. ا) بما أن كل الفرق متماثلة و أن كل تلميذ سواء كان بنتا أو ولدا ينتمي إلى إحدى الفرق فإن عدد الفرق يقسم كلا من عدد الأولاد و عدد البنات أي يقسم 3073 و 1317.
و بما أننا نبحث عن أكبر عدد من الفرق فإن هذا العدد هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 3073 و 1317 أي 439. و بالتالي فإن أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة التي يمكن تشكيلها هو 439.

ب) عدد البنات في كل فريق هو: $3073 \div 439 = 7$.
عدد الأولاد في كل فريق هو: $1317 \div 439 = 3$.
يتشكل كل فريق من 10 تلاميذ من بينهم 7 بنات و 3 أولاد.

التمرين1: علما أن مساحة قاعة مربعة الشكل هي $18,49\,m^2$ عين بالمتر طول ضلعها.

التمرين2:



ABC مثلث متقايس الأضلاع و لتكن النقطة H منتصف القطعة $[BC]$.

1. أحسب الطول AH إذا علمت أن $BC = 7cm$.
2. أحسب الطول AH إذا علمت أن $BC = a\,cm$.

التمرين3: نعتبر العددين A و B بحيث:

$A = \sqrt{25} + \sqrt{20} + \sqrt{80}$ و $B = \left(\sqrt{5}+2\right)^2 - \left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$.

1. أكتب العددين A و B على الشكل $a + b\sqrt{5}$ حيث a و b عددان طبيعيان.
2. عين القيمة المدورة إلى 10^{-2} للعدد A.
3. أحسب قيمة مقربة إلى 10^{-2} بالنقصان للعدد B.

نهدف إلى إثبات أن العدد $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا. إذا كان $\sqrt{2}$ عددا ناطقا فإنه يكتب على شكل كسر غير قابل للاختزال $\frac{p}{q}$ حيث p و q عددان طبيعيان غير معدومين.

1. تحقق أن $p^2 = 2q^2$ ثم استنتج أن p^2 عدد زوجي.
2. بين انه إذا كان p زوجيا يكون p^2 زوجيا و إذا كان p فرديا يكون p^2 فرديا ثم استنتج أن العدد p زوجي.
3. بوضع $p = 2p'$ و بإتباع نفس منهجية السؤال السابق أثبت أن العدد q زوجي.
4. اشرح لماذا أجوبة السؤالين 2 و 3 مناقضة للمعطيات ثم استنتج أن $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا.

إذا رمزنا إلى طول ضلع القاعة بالرمز x يكون لدينا: $x^2 = 18,49$ لأن مساحة المربع هي x^2. للمعادلة $x^2 = 18,49$ حلان هما $-4,3$ و $4,3$. و علما أن الأطوال أعداد موجبة فإن $x = 4,3$. و هكذا طول ضلع القاعة المربعة الشكل هو $4,3m$.

حل التمرين2

المثلث AHC قائم في النقطة H. لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس:

$AC^2 = AH^2 + HC^2$ و منه: $AH^2 = AC^2 - HC^2$

بما أن H منتصف $[BC]$ فإن: $HC = \frac{BC}{2}$ و بالتالي: $HC^2 = \frac{BC^2}{4}$

و علما أن: $AC = BC$ فإن: $AH^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{2^2}$ أي: $AH^2 = \frac{3BC^2}{2^2}$

1. لدينا: $AH^2 = \frac{3\times 7^2}{2^2}$ و منه: $AH = \sqrt{\frac{3\times 7^2}{2^2}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

2. لدينا: $AH^2 = \frac{3\times a^2}{2^2}$ و منه: $AH = \sqrt{\frac{3\times a^2}{2^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

و علما أن: $AC = BC$ فإن: $AH^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{2^2}$ أي: $AH^2 = \frac{3BC^2}{2^2}$

1. لدينا: $AH^2 = \frac{3\times 7^2}{2^2}$ و منه: $AH = \sqrt{\frac{3\times 7^2}{2^2}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

2. لدينا: $AH^2 = \frac{3\times a^2}{2^2}$ و منه: $AH = \sqrt{\frac{3\times a^2}{2^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

حل التمرين3

1.

$$A = \sqrt{25} + \sqrt{20} + \sqrt{80}$$

$$A = 5 + \sqrt{4\times 5} + \sqrt{16\times 5}$$

و

$$A = 5 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$$

$$A = 5 + 6\sqrt{5}$$

$$B = \left(\sqrt{5}+2\right)^2 - \left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$$

$$B = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\times\sqrt{5}\times 2 + 2^2 - \left(\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1\right)$$

$$B = 5 + 4\sqrt{5} + 4 - 5 + 1$$

$$B = 5 + 4\sqrt{5}$$

2.باستعمال آلة حاسبة علمية نتحصل على: $A = 18,41640\ldots$.

إذن $18,42$ هي القيمة المدورة إلى 10^{-2} للعدد A لأن $5 \geq 6$.

3.باستعمال آلة حاسبة علمية نتحصل على: $B = 13,94427\ldots$.

إذن $13,94$ قيمة مقربة إلى 10^{-2} بالنقصان للعدد B.

حل المسألة1

1.بوضع: $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ يكون لدينا: $\frac{p^2}{q^2} = 2$ و منه: $p^2 = 2q^2$. بما أن p^2 يكتب على الشكل: $2k$ فإن p^2 عدد زوجي.

2. *نفرض أن p زوجي و منه: $p = 2k$ حيث k عدد طبيعي و بالتالي: $p^2 = 4k^2$ و هكذا $p^2 = 2\left(2k^2\right) = 2k'$ مع $k' = 2k^2$.إذن: p^2 عدد زوجي.

* نفرض أن p فرديا و منه: $p = 2k+1$ حيث k عدد طبيعي و بالتالي: $p^2 = \left(2k+1\right)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

و هكذا $p^2 = 2\left(2k^2+2k\right)+1 = 2k'+1$ مع $k' = 2k^2+2k$.إذن: p^2 عدد فردي.

و منه لو كان p عددا فرديا لكان p^2 عددا فرديا و بما أن p^2 زوجي فإن p زوجي.

3. بما أن p زوجي نضع $p = 2p'$ و منه: $p^2 = 4p'^2$ و بعد التعويض في العلاقة: $p^2 = 2q^2$ نتحصل على $4p'^2 = 2q^2$ و نجد هكذا: $q^2 = 2p'^2$.

و باستعمال نتائج السؤال الثاني نستنتج أن العدد q زوجي لأنه في نفس وضعية p.

4. استنتجنا في السؤالين 2 و 3 أن العددين p و q زوجيان و بالتالي فإن العدد 2 قاسم مشترك لهما و هذا يعني أن الكسر $\frac{p}{q}$ غير قابل للاختزال و هذا مناقض للفرضية " $\frac{p}{q}$ كسر غير قابل للاختزال " إذن $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا.