الأستاذ: حمزة بريك

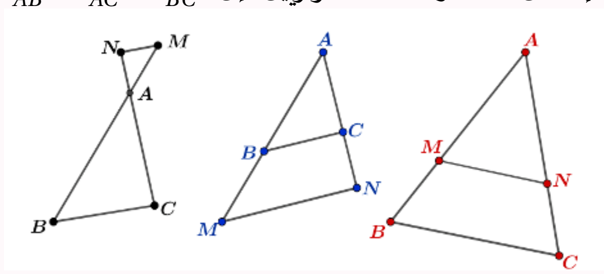
2 خاصية طالس وحساب المثلثات في مثلث قائم

1 خاصية طالس

خاصية طالس

خاصية

(BM) و (CN) مستقيمان متقاطعان في النقطة A.
إذا كان (BC) و (MN) متوازيين فإنّ: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$



نتائج

أطوال أضلاع المثلث AMN	AM	AN	MN
أطوال أضلاع المثلث ABC	AB	AC	BC

والمثلث AMN هو تكبير أو تصغير للمثلث ABC.

نظرية طالس

ABC ، AMN مثلثين حيث: $\begin{cases} M \in (AB) \\ N \in (AC) \\ (BC)//(MN) \end{cases}$ يكون

لدينا:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

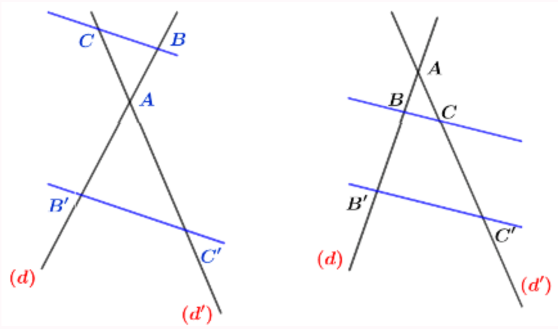
ملاحظة مهمة

تسمح خاصية طالس بحساب الأطوال والنسب.

خاصية طالس العكسية

خاصية

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A.
B و B' نقطتان من (d) تختلفان عن A.
C ، C' نقطتان من (d') تختلفان عن A.
إذا كان $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}$ وكانت النقط A ، B ، B' والنقط A ، C و C' مرتبة بنفس الترتيب فإن المستقيمين (BC) و $(B'C')$ متوازيان.
يمكن ترجمة هذه الخاصية بإحدى الوضعيتين التاليتين:



ملاحظة مهمة

- تسمح خاصية طالس العكسية بإثبات توازي مستقيمين.
- لإثبات توازي مستقيمين يكفي توازي نسبتين فقط

إنشاء هندسيّة بسيطة

لتقسيم القطعة $[AB]$ إلى n قطعة متقايسة نتبع ما يلي:

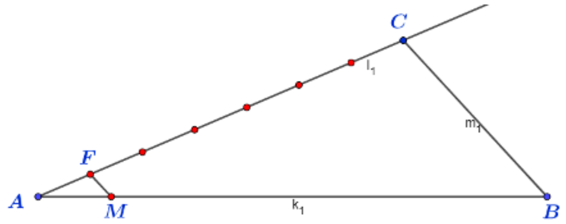
- ننشئ نصف مستقيم مدرج مبدؤه A وحامله يختلف عن (AB).
- على نصف المستقيم نعين النقطتين C و F بحيث:

$AC = n$ و $AF = 1$.

❀ ننشئ مستقيما يشمل F ويوازي (BC) يقطع $[AB]$ في M

❀ نقسم القطعة $[AB]$ إلى قطع متقايسة طولها AF باستعمال المدور.

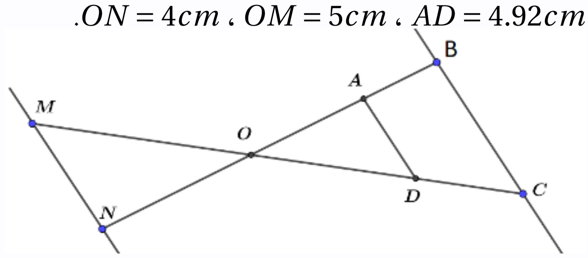
مثال نأخذ $n = 7$



2 توظيف خاصية طالس

وضعية 1

إليك الشكل التالي، حيث: $(AD) // (BC)$ و $OC = 12.5cm$ ، $OB = 10cm$ ، $AB = 4cm$ ، $ON = 4cm$ ، $OM = 5cm$ ، $AD = 4.92cm$.



❶ احسب الطولين OD و BC.

❷ استنتج الطول DC.

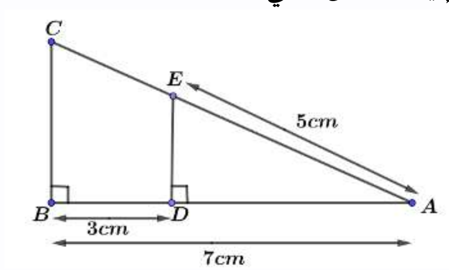
❸ بيّن أنّ (BC) ، (MN).

❹ احسب الطول MN.

❺ بيّن أنّ $MN = \frac{2}{5}BC$

وضعية 2

إليك الشكل التالي:



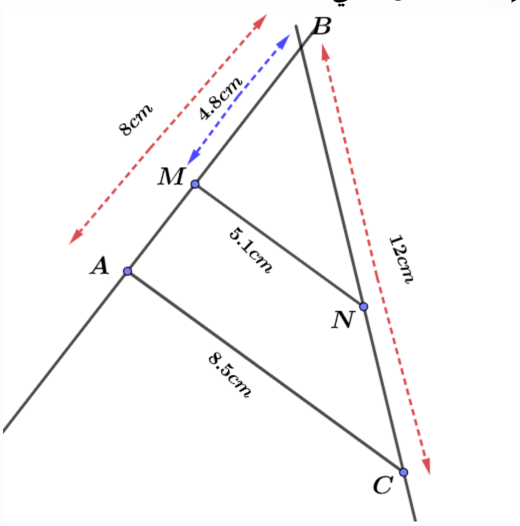
❶ اشرح لماذا $(BC) // (DE)$.

❷ احسب الطول DE.

❸ احسب الطولين AB و BC

وضعية 3

إليك الشكل التالي:



❶ بيّن أنّ $(MN) // (AC)$

❷ احسب الطول NC.

3 النسب المثلثية في مثلث قائم

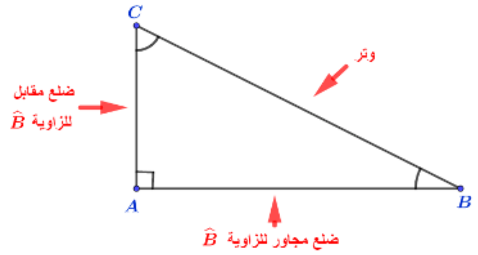
جيب تمام وظل زاوية حادة

❀ جيب تمام زاوية حادة هو: $\dfrac{\text{طول الضلع المجاور لهذه الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$
ونرمز له بـ: cos.

❀ جيب زاوية حادة هو: $\dfrac{\text{طول الضلع المقابل لهذه الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$
ونرمز له بـ: sin.

❀ ظل زاوية حادة هو: $\dfrac{\text{طول الضلع المقابل لهذه الزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور لهذه الزاوية}}$
ونرمز له بـ: tan.

مثال



$$\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC}$$
$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}$$
$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$$

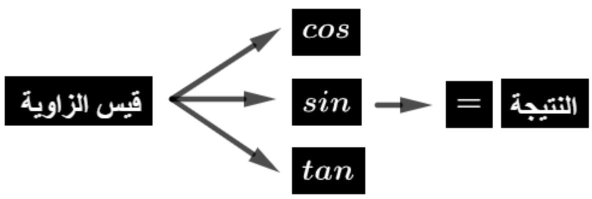
ملاحظة مهمة

الوتر هو أطول ضلع في المثلث القائم وبالتالي النسبتين cos و sin محصورتين بين 0 و 1.

حساب النسب المثلثية أو قيس زاوية حادة باستخدام آلة حاسبة

حساب النسب المثلثية

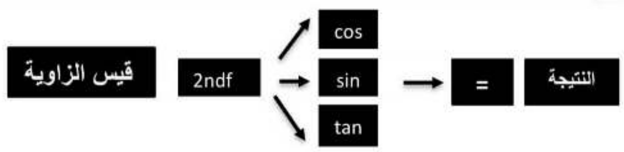
النوع الأول:



النوع الثاني:

حساب قيس زاوية

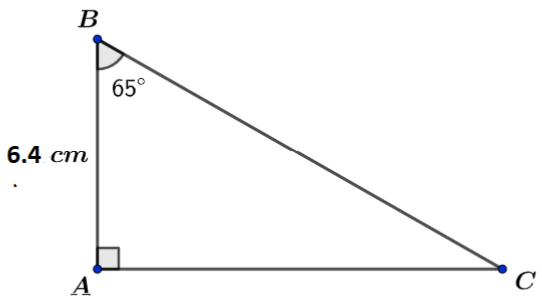
النوع الأول:



النوع الثاني:

حساب أطوال وزوايا باستعمال النسب المثلثية

في الأشكال (1) ، (2) و (3) نريد حساب الطول BC في كل حالة (بالتدوير إلى جزء من 100).



(1)

❶

① حساب الطول BC

❂ من المثلث ABC: $\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{6.4}{BC}$

❂ باستعمال الحاسبة: $\cos \widehat{B} = cos65° = 0.42$
ومنه نستنتج أنّ: $\frac{6.4}{BC} = 0.42$

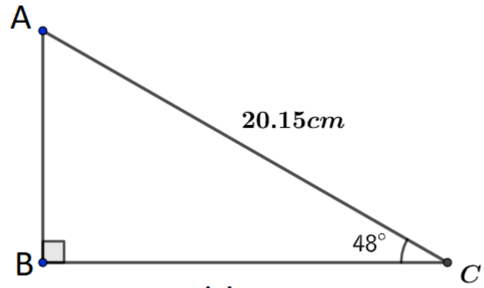
وبالتالي: $BC = \dfrac{6.4}{0.42} = 15.24m$

② حساب قيس الزاوية $\widehat{C}$ بإستعمال إحدى النسب المثلثية (بالتدوير إلى الوحدة):

❂ $\sin \widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{6.4}{15.24} = 0.42$

❂ باستعمال الحاسبة:

shift sin^{-1} 0.42 = 25°



(2)

❷ ① حساب الطول BC

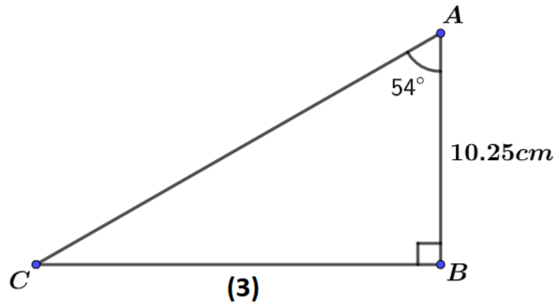
- من المثلث ABC: $\sin\widehat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{20.15}$
- باستعمال الحاسبة: $\sin\widehat{A} = \sin 48° = 0.74$ ، ومنه نستنتج أنّ: $\frac{BC}{20.15} = 0.74$

وبالتالي: $BC = 0.74 \times 20.15 = 14.91m$

② حساب قيس الزاوية $\widehat{C}$ بإستعمال إحدى النسب المثلثية (بالتدوير إلى الوحدة):

- $\cos\widehat{C} = \frac{BC}{AC} = \frac{14.91}{20.15} = 0.74$
- باستعمال الحاسبة:

shift | cos^{-1} | 0.74 | = | 42°



(3)

❸ ① حساب الطول BC

- من المثلث ABC: $\tan\widehat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{10.25}$
- باستعمال الحاسبة: $\tan\widehat{A} = \tan 54° = 1.38$ ، ومنه نستنتج أنّ: $\frac{BC}{10.25} = 1.38$

وبالتالي: $BC = 1.38 \times 10.25 = 14.15m$

② حساب قيس الزاوية $\widehat{C}$ بإستعمال إحدى النسب المثلثية (بالتدوير إلى الوحدة):

- $\tan\widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{10.25}{14.15} = 0.72$
- باستعمال الحاسبة:

shift | tan^{-1} | 0.72 | = | 36°

العلاقات بين النسب المثلثية

من أجل كل زاوية x في مثلث قائم لدينا:
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\frac{sinx}{cosx} = tanx$

ملاحظة مهمة

الكتابة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ تعني $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

مثال

لديناِ: $\cos\alpha = 0.5$

☆ احسب $\sin\alpha$ ثمّ $\tan\alpha$.

☆ نعلم أنّ: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ومنه $\sin^2\alpha + (0.5)^2 = 1$
أي: $\sin^2\alpha = 1 - (0.5)^2 = 1 - 0.25 = 0.75$ إذن: $\sin\alpha = \sqrt{0.75} \simeq 0.87$.

☆ نعلم أنّ: $tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ومنه: $tan\alpha = \frac{0.87}{0.5} \simeq 1.73$

تمرين 1

ABC مثلث قائم في A حيث: $AB = 3cm$ ، $AC = 4cm$

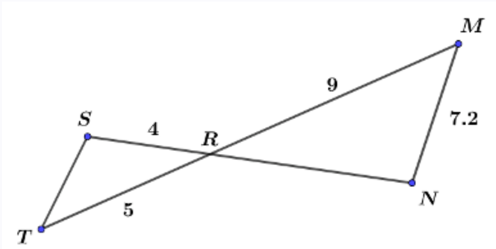
❶ احسب الطول BC

❷ (C) دائرة مركزها B ونصف قطرها $[AB]$ تقطع $[BC]$ في E ، ارسم المستقيم الذي يشمل E ويعامد $[AC]$ في k.

✯ احسب EK و CK.

تمرين 2

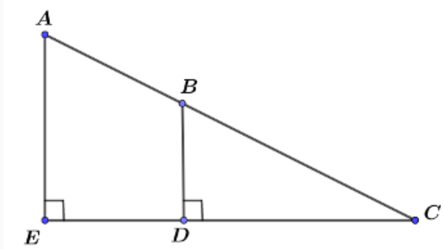
وحدة الطول هي (cm) (الشكل ليس مرسوما بالأطوال الحقيقية) حيث $(ST)//(MN)$



✪ بيّن أنّ المثلثين RTS و RMN متساويا الساقين.

تمرين 3

الشكل التالي ليس مرسوما بالأطوال الحقيقية حيث: $CB = 5cm$ ، $CE = 6cm$ ، $CA = 7.5cm$



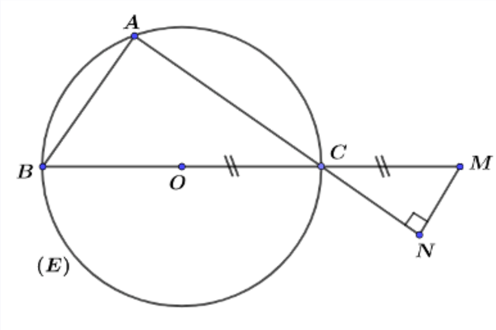
❶ احسب الطول AE

❷ بيّن أنّ $(AE)//(BD)$ ثمّ احسب CD

❸ علما أنّ $ED = 2cm$ ، $BD = 3cm$ ، احسب S مساحة شبه المنحرف القائم $AEDB$ بطريقتين مختلفتين.

تمرين 4

تمعّن جيّدا في الشكل التالي: (وحدة الطول هي سنتيمتر)



(E) دائرة مركزها O ونصف قطرها $[BC]$ حيث $AC = 6cm$ ، $OB = 4cm$

❶ بيّن أنّ المثلث ABC قائم في A.

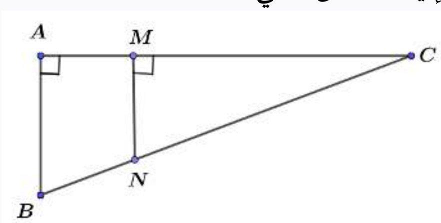
❷ بيّن أنّ $(AB)//(MN)$

❸ احسب الطول CN

❹ بيّن أنّ $AB = 2\sqrt{7}cm$

تمرين 5

إليك الشكل التالي:

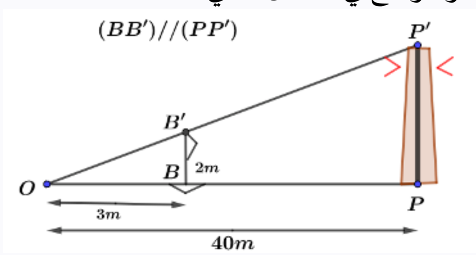


حيث: $BC = 10cm$ ، $AB = 6cm$ و $CM = 5cm$

✪ احسب الأطوال AC ، CN ، MN.

تمرين 6

يريد سائح معرفة ارتفاع منارة، فوضع طوافة على الماء في النقطة B وثبّت عليها علم ارتفاعه $BB' = 2m$ ثمّ ابتعد عنه إلى أن أصبح رأس العلم وقمة المنارة في نفس الخط كما هو موضح في الشكل التالي:



✪ احسب PP' ارتفاع المنارة.

تمرين 7

ش.ت.م 2007

❶ ارسم المثلث القائم ABC حيث: $AB = 4.5cm$ ، $BC = 7.5cm$.

❷ احسب AC.

❸ لتكن النقطة E من $[AB]$ حيث: $AB = 3AE$ و D نقطة من $[AC]$ حيث $DC = \frac{2}{3}AC$.

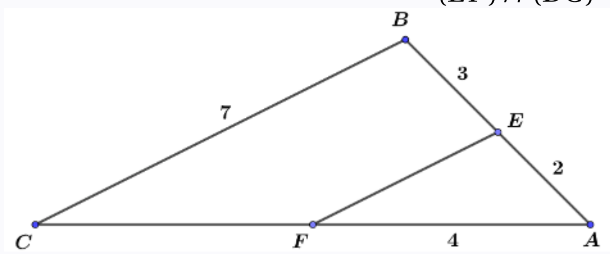
۞ عين على الشكل النقطتين D و E.

❹ بيّن أنّ: $(DE) // (BC)$ ثمّ احسب DE.

تمرين 8

ش.ت.م 2010

في الشكل التالي:
$(EF) // (BC)$



۞ احسب الطولين EF و FC.

تمرين 9

ش.ت.م 2013

ABC مثلث قائم في B حيث:
$AB = 4cm$ و $CB = 8cm$.
لتكن النقطة M من $[BC]$ حيث $BM = \frac{BC}{4}$، المستقيم (Δ) العمودي على (BC) في النقطة M يقطع $[AC]$ في النقطة H.

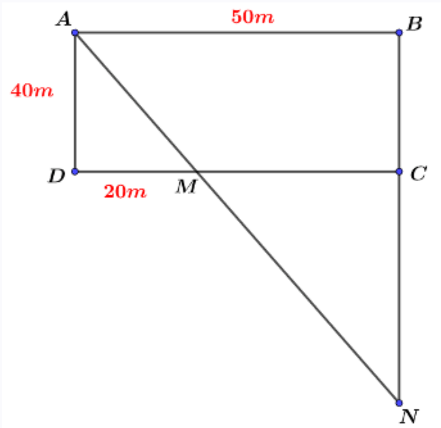
❶ احسب الطول MH.

❷ احسب $\tan\widehat{AMB}$ ثمّ استنتج قيس الزاوية $\widehat{AMB}$ بالتدوير إلى الوحدة

تمرين 10

ش.ت.م 2016

لجدّك قطعة أرض لها الشكل التالي:



حيث: $ABCD$ مستطيل أبعاده $50m$ و $40m$، M نقطة من $[DC]$ حيث: $DM = 20m$ ، N هي نقطة تقاطع (AM) و (BC)

❶ بين أنّ $\frac{MA}{MN} = \frac{2}{3}$

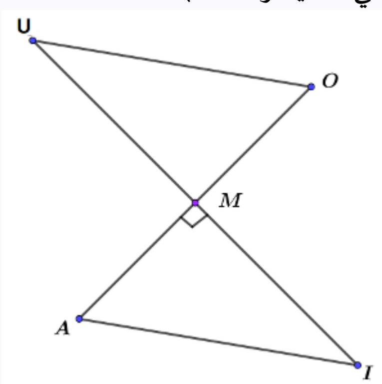
❷ احسب الطول BN

❸ احسب بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة قيس الزاوية $\widehat{MAD}$

تمرين 11

ش.ت.م 2017

الشكل التالي غير مرسوم بالأبعاد الحقيقية (وحدة الطول هي سنتيمتر (cm)).



$MU = 28cm$ ، $MI = 36cm$ ، $MO = 21cm$ ، $MA = 27cm$

❶ بيّن أنّ $(AI) // (OU)$

❷ احسب قيس الزاوية $\widehat{AIM}$.