بسم الله الرحمن الرحيم

# أهم الخواص التي تساعد على البرهان في الهندسة

## في التعليم المتوسط

ترجمة الأستاذ : فرقوس عبدالحق

# أهم الخواص التي تساعد على البرهان في الهندسة

لإثبات خاصية ما في الهندسة، يمكن اتّباع الخطوات التالية :

- نبدأ برسم شكل يمثِّل الوضعية المدروسة.
- نُشفِّر الشكل حسب المعطيات (منتصف قطعة، زاوية قائمة، مستقيمات متوازية، ...إلخ.)
- من بين الخواص التي تنطبق على المطلوب، نبحث عن الخاصية التي يكون الشكل فيها (العمود الأوسط من الجدول الآتي) مماثلا للشكل المرسوم.

لتحرير الجواب، يكفي ذكر الخاصية المستعملة (كما في العمود الأيمن) ثمّ تحقيق فرضياتها و استخلاص المطلوب (كما في العمود الأيسر).


(1) إثبات أنّ نقطة هي منتصف قطعة ........ خاصية 01 إلى خاصية 06

(2) إثبات توازي مستقيمين ........ خاصية 07 إلى خاصية 14

(3) إثبات تعامد مستقيمين ........ خاصية 15 إلى خاصية 22

(4) إثبات أنّ رباعيا ما متوازي أضلاع ........ خاصية 23 إلى خاصية 29

(5) إثبات أنّ رباعيا ما معيّن ........ خاصية 30 إلى خاصية 32

(6) إثبات أنّ رباعيا ما مستطيل ........ خاصية 33 إلى خاصية 35

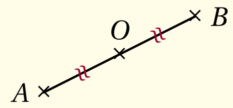
(7) إثبات أنّ رباعيا ما مربع ........ خاصية 36 إلى خاصية 39

(8) إيجاد طول قطعة ........ خاصية 40 إلى خاصية 53

(9) تحديد قيس زاوية ........ خاصية 54 إلى خاصية 62

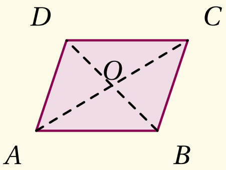
(10) البرهان بتوظيف خواص المستقيمات الخاصة في المثلث ........ خاصية 63 إلى خاصية 69

**خاصية 1** إذا انتمت نقطة إلى قطعة مستقيمة و كانت متساوية البعد عن طرفيها فإنّ هذه النقطة هي منتصف القطعة.




النقطة $O$ تنتمي إلى القطعة $[AB]$ و $OA = OB$ (أو $OA = \frac{1}{2}AB$) و بالتالي $O$ هي منتصف $[AB]$ .

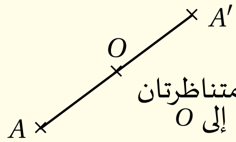
**خاصية 2** في متوازي الأضلاع (كيفي، مستطيل، مربع، معين) ، القطران متناصفان (يتقاطعان في منتصفيهما).




$ABCD$ متوازي أضلاع

بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع فإنّ قطريه متناصفان و بالتالي $O$ منتصف $[AC]$ و أيضا $O$ منتصف $[BD]$ .

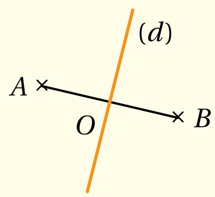
**خاصية 3** إذا كانت $A$ و $A'$ متناظرتين بالنسبة إلى $O$ فإنّ $O$ هي منتصف القطعة $[AA']$ .




$A$ و $A'$ متناظرتان بالنسبة إلى $O$

بما أنّ $A'$ نظيرة $A$ بالنسبة إلى $O$ فإنّ $O$ هي منتصف القطعة $[AA']$.

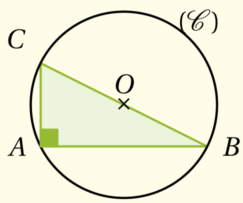
**خاصية 4** محور قطعة مستقيم هو المستقيم العمودي على هذه القطعة في منتصفها.




$(d)$ هو محور القطعة $[AB]$

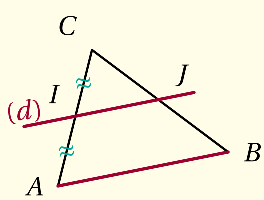
بما أنّ المستقيم $(d)$ محور القطعة $[AB]$ يقطعها في $O$ فإنّ $O$ منتصف $[AB]$ .

**خاصية 5** مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم هو منتصف الوتر.



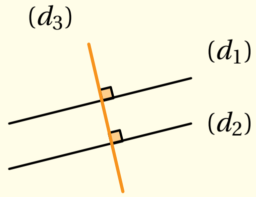

بما أنّ $ABC$ مثلث قائم وتره $[BC]$ و $O$ مركز الدائرة المحيطة به فإنّ $O$ منتصف الوتر $[BC]$ .

**خاصية 6** في مثلث، المستقيم الذي يشمل منتصف أحد الأضلاع و يوازي ضلعاً ثانيا فإنه يشمل منتصف الضلع الثالث (**النظرية العكسية لنظرية مستقيم المنتصفين**).



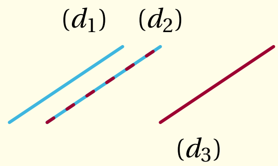

في المثلث $ABC$ ، المستقيم $(d)$ يشمل $I$ ، منتصف $[AC]$ ، و يوازي الضلع $[AB]$ و بالتالي $J$ هي منتصف الضلع $[BC]$.

**خاصية 7** المستقيمان العموديان على نفس المستقيم هما مستقيمان متوازيان.



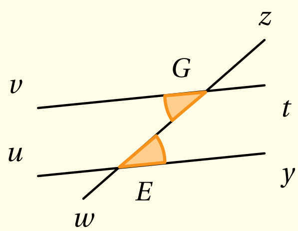

بما أنّ $(d_1) \perp (d_3)$ و $(d_2) \perp (d_3)$ فإنّ $(d_1)//(d_2)$.

**خاصية 8** إذا كان مستقيمان متوازيين فإنّ كل مستقيم يوازي أحدهما فهو يوازي الآخر.



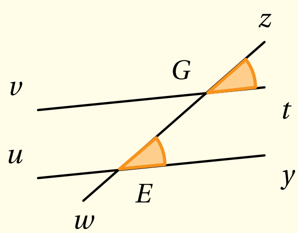

بما أنّ $(d_1)//(d_2)$ و $(d_2)//(d_3)$ فإنّ $(d_1)//(d_3)$.

**خاصية 9** حتى يتوازى مستقيمان، يكفي أن يُشكِّل معهما قاطع زاويتين متبادلتين داخليا و متقايستين.



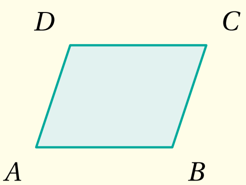

المستقيمان $(vt)$ و $(uy)$ مقطوعان بالقاطع $(zw)$ و الزاويتان $\widehat{vGw}$ و $\widehat{zEy}$ متبادلتان داخليا و متقايستان إذن $(vt)//(uy)$.

**خاصية 10** حتى يتوازى مستقيمان، يكفي أن يُشكِّل معهما قاطع زاويتين متماثلتين و متقايستين.




المستقيمان $(vt)$ و $(uy)$ مقطوعان بالقاطع $(zw)$ و الزاويتان $\widehat{vGw}$ و $\widehat{zEy}$ متماثلتان و متقايستان إذن $(vt)//(uy)$.

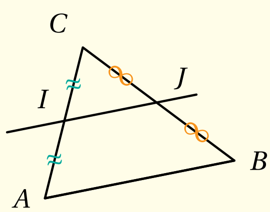
**خاصية 11** في متوازي الأضلاع (كيفي، مستطيل، معيّن، مربع) كل ضلعين متقابلين (متقايسان و) حاملاهما متوازيان.




$ABCD$ متوازي الأضلاع

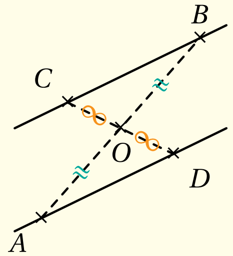
بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع فإنّ $(AB)//(CD)$ و $(AD)//(BC)$.

**خاصية 12** في مثلث، المستقيم الذي يشمل منتصفَيْ ضلعين يوازي حامل الضلع الثالث (**نظرية مستقيم المنتصفين**).



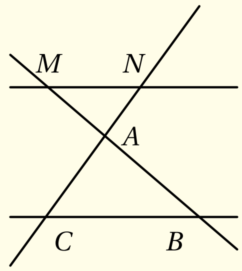

في المثلث $ABC$ لدينا $I$ منتصف $[AC]$ و $J$ منتصف $[BC]$ فحسب **نظرية مستقيم المنتصفين** نستنتج أنّ $(IJ)//(AB)$.

**خاصية 13** المستقيمان المتناظران بالنسبة إلى نقطة هما مستقيمان متوازيان.



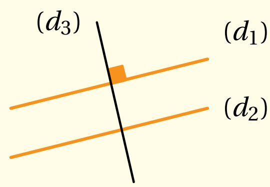

بما أنّ $(AD)$ و $(BC)$ متناظران بالنسبة إلى $O$ فإنّ $(AD)//(BC)$.

**خاصية 14** **عكس نظرية طاليس**
إذا كانت النقط $A$ ، $B$ ، $M$ من جهة و النقط $A$ ، $C$ ، $N$ من جهة أخرى على استقامة واحدة و بنفس الترتيب بحيث $\frac{AC}{AN} = \frac{AB}{AM}$ فإنّ المستقيمين $(BC)$ و $(MN)$ متوازيان.



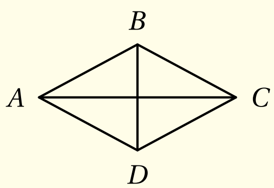

النقط $M$ ، $A$ ، $B$ من جهة و النقط $N$ ، $A$ ، $C$ من جهة أخرى على استقامة واحدة و بهذا الترتيب مع $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ فحسب **النظرية العكسية لنظرية طاليس** نستنتج أنّ $(MN)//(BC)$.

**خاصية 15** إذا عامد مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فإنه يعامد الآخر.




بما أنّ $(d_1)//(d_2)$ و $(d_1) \perp (d_3)$ فإنّ $(d_2) \perp (d_3)$.

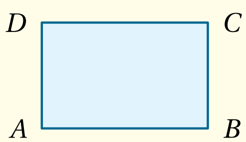
**خاصية 16** قُطرا المعيّن (أو المربع) متعامدان.




$ABCD$ معيّن

بما أنّ $ABCD$ معيّن فإنّ قطرَيْه متعامدان أي $(AC) \perp (BD)$.

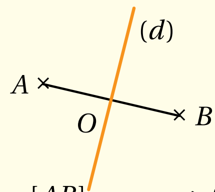
**خاصية 17** في المستطيل (أو المربع)، كل ضلعين متتاليين حاملاهما متعامدان.




$ABCD$ مستطيل

بما أنّ $ABCD$ مستطيل فإنّ $(AB) \perp (AD)$ ، $(AD) \perp (DC)$ ، $(DC) \perp (BC)$ و $(BC) \perp (AB)$.

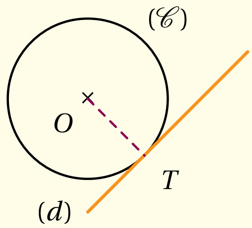
**خاصية 18** محور قطعة مستقيم هو مستقيم يعامدها (في المنتصف).




$(d)$ هو محور $[AB]$

بما أنّ $(d)$ هو محور $[AB]$ فإنّ $(d)\perp(AB)$.

**خاصية 19** المماس لدائرة في نقطة منها يعامد المستقيم القطري الذي يمرّ من هذه النقطة.

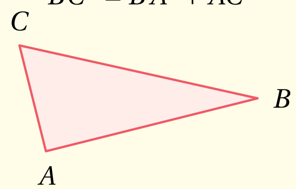



بما أنّ $(d)$ هو المماس في النقطة $T$ للدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها $O$ فإنّ $(d)\perp(OT)$.

**خاصية 20** **عكس نظرية فيثاغورث**

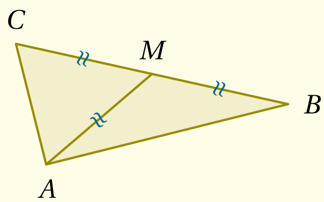
في مثلث $ABC$، إذا كان $[BC]$ هو الضلع الأطول بحيث $BC^2=BA^2+AC^2$ فإنّ المثلث $ABC$ قائم و وتره هو الضلع $[BC]$.

$BC^2=BA^2+AC^2$



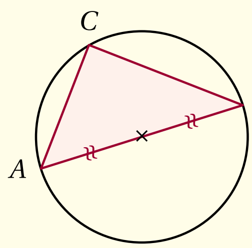

بما أنّ $BC^2=BA^2+AC^2$ فحسب **النظرية العكسية لنظرية فيثاغورث** نستنتج أنّ المثلث $ABC$ قائم في $A$ أي $(AB)\perp(AC)$.

**خاصية 21** في مثلث، إذا كان طول المتوسط المتعلق بأحد الأضلاع يساوي نصف طول هذا الضلع فإن هذا المثلث قائم و وتره هو ذلك الضلع.



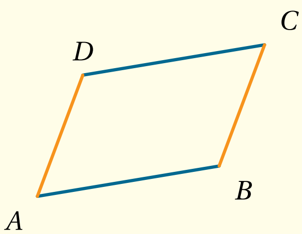

بما أنّ $[AM]$ هو المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ بحيث $AM=BC\div 2$ فإنّ المثلث $ABC$ قائم في $A$ أي $(AB)\perp(AC)$.

**خاصية 22** إذا كان أحد أضلاع مثلث قطراً للدائرة المحيطة به فإن هذا المثلث قائم و وتره هو ذلك الضلع.



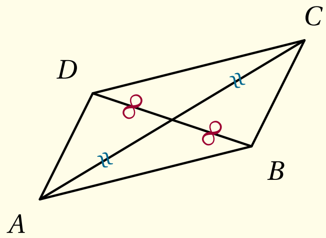

بما أنّ الرأس $C$ ينتمي إلى الدائرة التي قطرها $[AB]$ فإنّ المثلث $ABC$ قائم في $C$ أي $(AC)\perp(BC)$.

**خاصية 23** إذا كان في رباعي كل ضلعين متقابلين حاملاهما متوازيان فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.



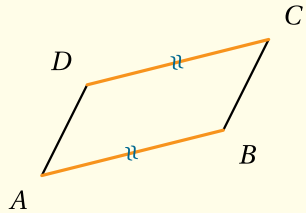

بما أنّ :
$(AB)//(DC)$ و $(AD)//(BC)$
فإنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع.

**خاصية 24** إذا كان لرباعي قطران متناصفان (يتقاطعان في منتصفيهما) فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.



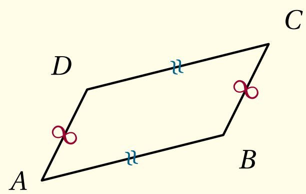

بما أنّ القطرين $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان فإنّ الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

**خاصية 25** إذا كان لرباعي (غير متصالب) ضلعان متقايسان و حاملاهما متوازيان فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.



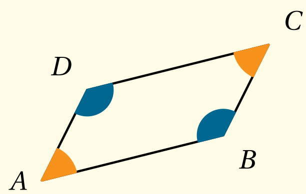

الرباعي $ABCD$ غير متصالب و فيه $AB = DC$ و $(AB)//(CD)$ و بالتالي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

**خاصية 26** إذا كان في رباعي كل ضلعين متقابلين متقايسان فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.



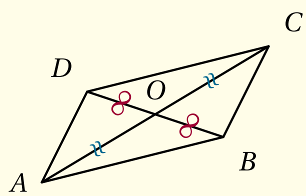

بما أنّ $AB = CD$ و $AD = BC$ فإنّ الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

**خاصية 27** إذا كان في رباعي كل زاويتين متقابلتين متقايستان فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.



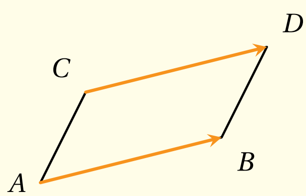

في الرباعي $ABCD$ لدينا :
$\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ و $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$
إذاً $ABCD$ متوازي الأضلاع.

**خاصية 28** إذا كان لرباعي مركز تناظر فإنّ هذا الرباعي متوازي الأضلاع.



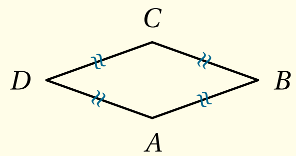

النقطتان $A$ و $C$ من جهة، و النقطتان $B$ و $D$ من جهة أخرى، متناظرتان بالنسبة إلى $O$ و بالتالي فالرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

**خاصية 29** إذا كانت $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ أربع نقط بحيث $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ فإنّ الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع.



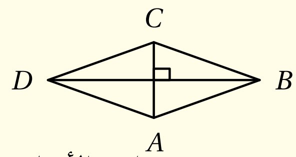

بما أنّ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ فإنّ الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع.

**خاصية 30** إذا كان لرباعي أربعة أضلاع متقايسة فإنّ هذا الرباعي معيّن.




بما أنّ $AB = BC = CD = DA$ فإنّ الرباعي $ABCD$ معيّن.

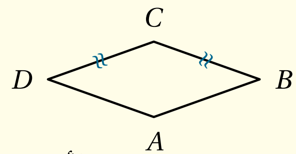
**خاصية 31** إذا كان لمتوازي الأضلاع قطران متعامدان فإنه معيّن.




$ABCD$ متوازي الأضلاع

$ABCD$ متوازي الأضلاع بحيث $(AC) \perp (BD)$ (قطراه متعامدان) و بالتالي $ABCD$ معيّن.

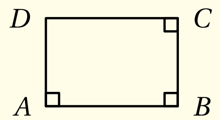
**خاصية 32** إذا كان لمتوازي الأضلاع ضلعان متتاليان متقايسان فهو معيّن.




$ABCD$ متوازي الأضلاع

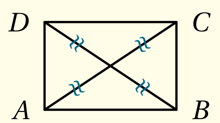
بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع و فيه $CD = CB$ فإنّ الرباعي $ABCD$ معيّن.

**خاصية 33** إذا كان لرباعي ثلاث زوايا قائمة فإنّ هذا الرباعي مستطيل.




بما أنّ $(AD) \perp (AB)$ ، $(AB) \perp (BC)$ و $(BC) \perp (DC)$ فإنّ الرباعي $ABCD$ مستطيل.

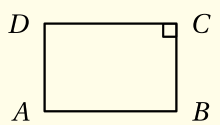
**خاصية 34** إذا كان لمتوازي الأضلاع قطران متقايسان فهو مستطيل.




$ABCD$ متوازي الأضلاع

بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع بحيث $AC = BD$ (قطراه متقايسان) فإن $ABCD$ مستطيل.

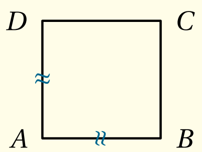
**خاصية 35** إذا كان لمتوازي الأضلاع ضلعان متتاليان متعامدان فهو مستطيل.




$ABCD$ متوازي الأضلاع

بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع و فيه $(BC) \perp (CD)$ فإنّ $ABCD$ مستطيل.

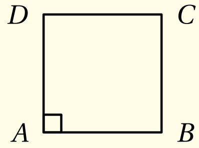
**خاصية 36** إذا كان لمستطيل ضلعان متتاليان متقايسان فهو مربع.




$ABCD$ مستطيل

بما أنّ $ABCD$ مستطيل بحيث $AB = AD$ (ضلعان متتاليان متقايسان) فإنّ $ABCD$ مربّع.

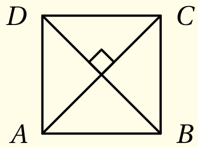
**خاصية 37** إذا كان لمعيّن ضلعان متتاليان متعامدان فهو مربّع.



$ABCD$ معيّن

بما أنّ $ABCD$ معيّن بحيث $(AB) \perp (AD)$ (ضلعان متتاليان و متعامدان) فإنّ $ABCD$ مربّع.

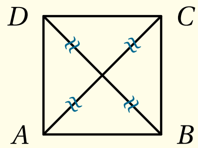
**خاصية 38** إذا كان لمستطيل قطران متعامدان فهو مربّع.



$ABCD$ مستطيل

بما أنّ $ABCD$ مستطيل بحيث $(AC) \perp (BD)$ (قطراه متعامدان) فإنّ $ABCD$ مربّع.

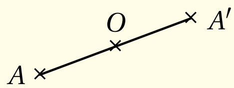
**خاصية 39** إذا كان لمعيّن قطران متقايسان فهو مربّع.



$ABCD$ معيّن

بما أنّ $ABCD$ معيّن بحيث $AC = BD$ (قطراه متقايسان) فإنّ $ABCD$ مربّع.

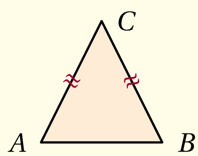
**خاصية 40** منتصف قطعة مستقيم تبعد بنفس المسافة عن طرفيها.



$O$ منتصف $[AA']$

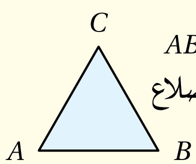
بما أنّ $O$ منتصف القطعة $[AA']$ فإنّ $OA = OA' = AA' \div 2$.

**خاصية 41** للمثلث المتساوي الساقين ضلعان متقايسان (لهما نفس الطول)




المثلث $ABC$ متساوي الساقين رأسه الأساسي $C$ و بالتالي $CA = CB$.

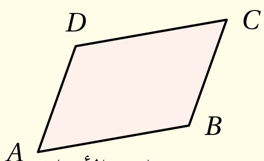
**خاصية 42** للمثلث المتقايس الأضلاع ثلاثة أضلاع متقايسة (لها نفس الطول).



المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع

المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع و بالتالي $AB = BC = CA$.

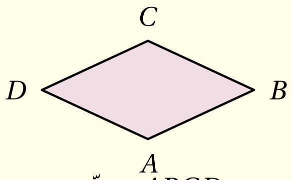
**خاصية 43** في متوازي الأضلاع (كيفي، معيّن، مستطيل، مربّع)، كل ضلعين متقابلين متقايسان.



$ABCD$ متوازي الأضلاع

بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع فإنّ $AB = DC$ و $AD = BC$.

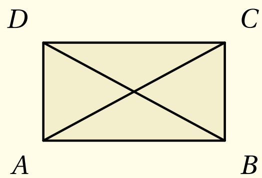
**خاصية 44** الأضلاع الأربعة للمعيّن (أو المربع) متقايسة (لها نفس الطول).



$ABCD$ معيّن

بما أنّ $ABCD$ معيّن فإنّ أضلاعه الأربعة متقايسة أي $AB = BC = CD = DA$.

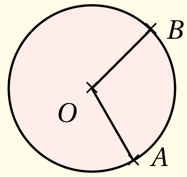
**خاصية 45** قطرا المستطيل متقايسان (لهما نفس الطول).



$ABCD$ مستطيل

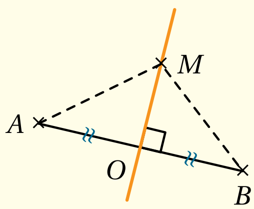
بما أنّ $ABCD$ مستطيل فإنّ قطريه متقايسان أي $AC = BD$.

**خاصية 46** إذا انتمت نقطتان إلى نفس الدائرة فإنهما تبعدان بنفس المسافة عن مركزها.



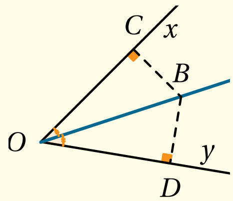

النقطتان $A$ و $B$ تنتميان إلى الدائرة التي مركزها $O$ إذاً $OA = OB$.

**خاصية 47** إذا انتمت نقطة إلى محور قطعة مستقيم فإنها تبعد بنفس المسافة عن طرفيها.



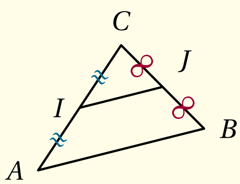

النقطة $M$ تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ إذاً فهي تبعد بنفس المسافة عن طرفيها أي $MA = MB$

**خاصية 48** إذا انتمت نقطة إلى منصِّف زاوية فإنها تبعد بنفس المسافة عن ضلعيها.




$B$ تنتمي إلى منصف الزاوية $\widehat{xOy}$ مع $(BC) \perp (OC)$ و $(BD) \perp (OD)$ إذاً فهي تبعد بنفس المسافة عن ضلعيها أي $BC = BD$.

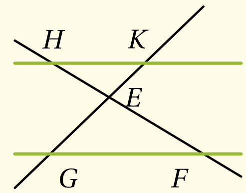
**خاصية 49** في مثلث، طول القطعة الواصلة بين منتصفَيْ ضلعين يساوي نصف طول الضلع الثالث (**نظرية مستقيم المنتصفين**).




في المثلث $ABC$ لدينا : $I$ منتصف $[AC]$ و $J$ منتصف $[BC]$ فحسب **نظرية مستقيم المنتصفين** نستنتج أنّ $IJ = AB \div 2$.

**خاصية 50** **نظرية طاليس**

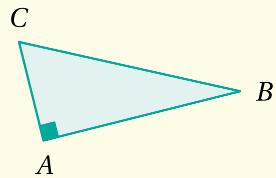
إذا كانت $M \in (AB)$ و $N \in (BC)$ بحيث $(BC)//(MN)$ فإنّ :
$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$.




بما أنّ $H \in (EF)$ و $K \in (EG)$ بحيث $(HK)//(GF)$ فحسب **نظرية طاليس** نستنتج أنّ :
$\frac{EF}{EH} = \frac{EG}{EK} = \frac{GF}{HK}$.

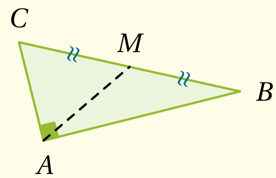
**خاصية 51** **نظرية فيثاغورث**

في المثلث القائم، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعَيْ طولَيْ الضلعين القائمين.



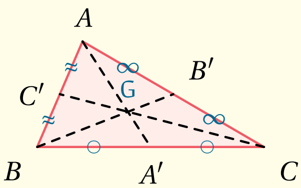

بما أنّ المثلث $ABC$ قائم في $A$ فحسب **نظرية فيثاغورث** نستنتج أنّ : $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

**خاصية 52** في المثلث القائم، طول المتوسط المتعلق بالوتر يساوي نصف طول الوتر (**نظرية طول المتوسط المتعلق بالوتر في المثلث القائم**).



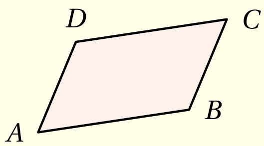

المثلث $ABC$ قائم في $A$ و $M$ منتصف الوتر $[BC]$ فحسب نظرية **طول المتوسط المتعلق بالوتر** نستنتج أنّ : $AM = BC \div 2$.

**خاصية 53** مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات) يبعد عن كل رأس بثُلثَيْ طول المتوسط الذي يشمل هذا الرأس.




النقطة $G$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$ و $[AA']$ هو المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ و بالتالي :
$AG = \frac{2}{3} AA'$.

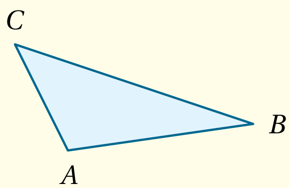
**خاصية 54** في متوازي الأضلاع (كيفي، معين، مستطيل، مربع)، كل زاويتين متقابلتين متقايستان.




$ABCD$ متوازي الأضلاع

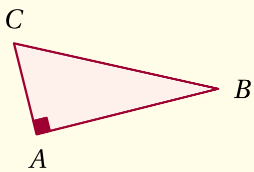
بما أنّ $ABCD$ متوازي الأضلاع فإنّ $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$ و $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$.

**خاصية 55** مجموع أقياس زوايا المثلث يساوي $180°$.



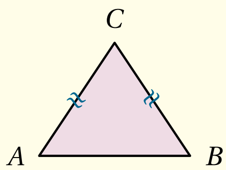

في المثلث $ABC$ لدينا :
$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

**خاصية 56** في المثلث القائم، الزاويتان الحادتان متتامتان (مجموعهما يساوي $90°$).



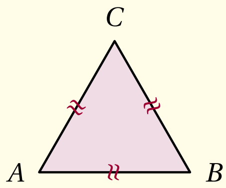

بما أنّ المثلث $ABC$ قائم في $A$ فإنّ :
$\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$.

**خاصية 57** في المثلث المتساوي الساقين، زاويتا القاعدة متقايستان.



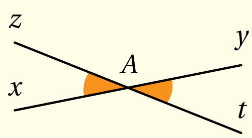

بما أنّ المثلث $ABC$ متساوي الساقين رأسه الأساسي $C$ فإنّ : $\widehat{A}=\widehat{B}$.

**خاصية 58** للمثلث المتقايس الأضلاع ثلاث زوايا متقايسة و قيس كل منها يساوي $60°$.




بما أنّ المثلث $ABC$ متقايس الأضلاع فإنّ : $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}=60°$.

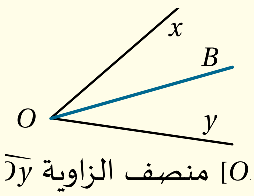
**خاصية 59** الزاويتان المتقابلتان بالرأس متقايستان.




الزاويتان $\widehat{xAz}$ و $\widehat{yAt}$ متقابلتان بالرأس إذاً :

$\widehat{xAz}=\widehat{yAt}$.

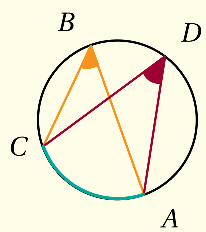
**خاصية 60** منصِّف زاوية يقسمها إلى زاويتين متجاورتين و متقايستين (لهما نفس القيس).




بما أنّ $[OB)$ هو منصِّف الزاوية $\widehat{xOy}$ فإنّ :

$\widehat{xOB}=\widehat{BOy}=\widehat{xOy}\div 2$.

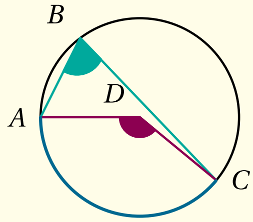
**خاصية 61** الزاويتان المرسومتان داخل دائرة و اللتان تحصران نفس القوس هما زاويتان متقايستان.




الزاويتان $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ADC}$ تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AC}$ و بالتالي فهما متقايستان أي :

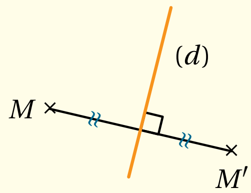
$\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$.

**خاصية 62** قيس زاوية محيطية في دائرة يساوي نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر نفس القوس معها.



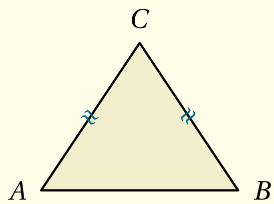

الزاوية المحيطية $\widehat{ABC}$ و الزاوية المركزية $\widehat{ADC}$ تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AC}$ و بالتالي :
$\widehat{ADC} = 2\widehat{ABC}$.

**خاصية 63** إذا كانت نقطتان متناظرتين بالنسبة إلى مستقيم فإنّ هذا المستقيم هو محور القطعة الواصلة بين النقطتين.



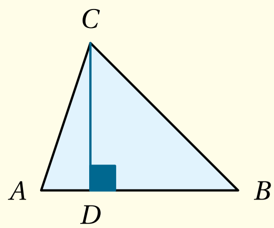

النقطتان $M$ و $M'$ متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم $(d)$ إذاً $(d)$ هو محور القطعة $[MM']$.

**خاصية 64** كل نقطة متساوية المسافة عن طرفَيْ قطعة مستقيم هي نقطة تنتمي إلى محور هذه القطعة.



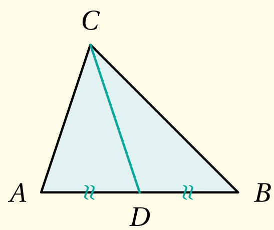

بما أنّ $CA = CB$ فإنّ النقطة $C$ تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$.

**خاصية 65** المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس مثلث و يعامد حامل الضلع المقابل لهذا الرأس هو الارتفاع المتعلق بهذا الضلع.



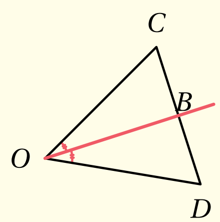

بما أنّ $(AB) \perp (CD)$ فإنّ المستقيم $(CD)$ هو الارتفاع المتعلق بالضلع $[AB]$ في المثلث $ABC$.

**خاصية 66** القطعة التي طرفاها أحد رؤوس مثلث و منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس هي المتوسط المتعلق بهذا الضلع.



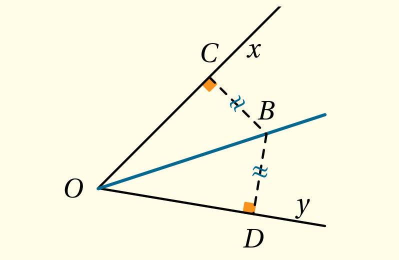

بما أنّ النقطة $D$ هي منتصف الضلع $[AB]$ فإنّ القطعة $[CD]$ هي المتوسط المتعلق بالضلع $[AB]$ في المثلث $ABC$.

**خاصية 67** المستقيم الذي يقسم زاوية إلى زاويتين متقايستين هو منصف هذه الزاوية.



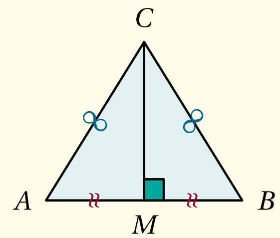

المستقيم $(OB)$ يقسم الزاوية $\widehat{COD}$ إلى زاويتين متقايستين إذاً $(OB)$ هو منصف الزاوية $\widehat{COD}$.

**خاصية 68** كل نقطة متساوية البعد عن ضلعيْ زاوية هي نقطة تنتمي إلى منصف هذه الزاوية.




بما أنّ $BC = BD$ ، $(OC) \perp (BC)$ و $(BD) \perp (OD)$ فإنّ النقطة $O$ تنتمي إلى منصف الزاوية $\widehat{COD}$ (إذاً نصف المستقيم $[OB)$ هو منصف الزاوية $\widehat{COD}$).

**خاصية 69** محور قاعدة المثلث المتساوي الساقين هو أيضا الارتفاع المتعلق بهذه القاعدة، المتوسط المتعلق بها و منصف زاوية الرأس الأساسي.




بما أنّ المثلث $ABC$ متساوي الساقين رأسه الأساسي $C$ ، $M$ منتصف $[AB]$ و $(CM) \perp (AB)$ فإنّ $(CM)$ هو : المتوسط المتعلق بالقاعدة $[AB]$ ، محور القاعدة $[AB]$ ، الارتفاع المتعلق بالقاعدة $[AB]$ و منصف الزاوية $\widehat{ACB}$.

العِلمُ مَغرِسُ كُلِّ فَخرٍ فَافْتَخِرْ     و احْذَرْ يَفُوتُكَ فَخْرُ ذَاكَ المَغرِسِ
وَ اعْلَمْ بِأَنَّ العِلْمَ لَيْسَ يَنَالُهُ     مَنْ هَمُّهُ فِي مَطْعَمٍ أَوْ مَلْبَسِ
إِلاَّ أَخُو العِلْمِ الذِي يُعْنَى بِهِ     فِي حَالَتَيْهِ: عَارِياً أَوْ مُكْتَسِ
فَاجْعَلْ لِنَفْسِكَ مِنْهُ حَظاً وَافِراً     وَ اهْجُرْ لَهُ طِيبَ الرَّقَادِ وَ عَبِّسِ
فَلَعَلَّ يَوْماً إِنْ حَضَرْتَ بِمَجْلِسٍ     كُنْتَ الرَّئِيسَ وَ فَخْرَ ذَاكَ المَجْلِسِ

أَخِي لَنْ تَنَالَ العِلْمَ إِلاَّ بِستَّةٍ     سَأُنْبِيكَ عَنْ تَفْصِيلِهَا بِبَيَانِ
ذَكَاءٌ وَ حِرْصٌ وَ اجْتِهَادُ وَ بُلْغَةٌ     وَ صُحْبَةُ أُسْتَاذٍ وَ طُولُ زَمَانِ