ثانوية: المجاهد صديقي نوري		الموسم الدراسي: 2021 / 2022
المستوى: 3 ثانوي علوم تجريبية	# الواجب المنزلي رقم ①	الأستاذ: قويسم براهيم الخليل
سُلم يوم: 05|10|2021		يُعاد يوم: 12|10|2021

◆ التمرين 01:

احسب النهايات التالية:

① $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$ ② $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{4-x^2}{x-2}\right)$ ③ $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)$

◆ التمرين 02:

عيّن النهايات التالية:

① $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$ ② $\lim\limits_{\substack{>\\x\to3}}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}\right)$ ③ $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2-2\sqrt{x}+1}{x-1}\right)$

◆ التمرين 03:

برهن أنّ المنحنى الممثل للدالة f على المجال I يقبل مستقيما مقاربا أفقيا أو عموديا في الحالات التالية:

① $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ، $I=]2;+\infty[$ ② $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}$ ، $I=]-\infty;-2[$

◆ التمرين 04:

برهن أنّ المستقيم (D) مقارب للمنحني (C_f) ، ثم أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D) :

① $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ ، $I=]2;+\infty[$ ، $D: y=x$

② $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ ، $I=]-\infty;-1[$ ، $D: y=x-1$

◆ التمرين 05:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+x-3}{x+1}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

② اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن (-1) :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

حيث: a، b و c أعدادا حقيقية يطلب تعيينها.

③ استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)

④ حدد الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم المقارب المائل.

⑤ مثل بيانيا في المعلم السابق المستقيمات المقاربة، والمنحنى (C_f)

◆ التمرين 06:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x^3+3x^2-4$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① ادرس تغيرات الدالة f ، ثم أنجز جدول التغيرات.

② عين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محوري الاحداثيات.

③ برهن أن النقطة $\omega(-1;-2)$ مركز تناظر لـ (C_f) .

④ عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω.

⑤ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

⑥ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^3+3x^2-4-m=0$.

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •

ثانوية: المجاهد صديقي نوري | الموسم الدراسي: 2021 | 2022

المستوى: 3 ثانوي | علوم تجريبية | الأستاذ: قويسم خليل

تصحيح الواجب المنزلي رقم ①

◆ التمرين 01:

①
$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}}{1-x}\right)=\frac{\sqrt{4}}{1-4}=\boxed{-\frac{2}{3}}$$

②
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(2-x)(2+x)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{-(x-2)(2+x)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\big(-(2+x)\big)=-(2+2)=\boxed{-4}$$

③
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{|x^2-1|+1}\right)=\frac{0^2+0}{|0^2-1|+1}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

◆ التمرين 02:

①
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)=\boxed{+\infty}$$

لأنّ:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\sqrt{x-1}\right)=0^+$$

و $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty$

②
$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{(x-3)^2}\right)=\boxed{+\infty}$$

لأنّ:

$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\left((x-3)^2\right)=0^+$ و

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{0^+}\right)=+\infty$$

③
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-2\sqrt{x}+1}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x^2-2\sqrt{x}+1)(x^2+2\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+2\sqrt{x}+1)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^4+2x^2-4x+1}{(x-1)(x^2+2\sqrt{x}+1)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x^3+x^2+3x-1)}{(x-1)(x^2+2\sqrt{x}+1)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3+x^2+3x-1}{x^2+2\sqrt{x}+1}\right)=\frac{4}{4}=\boxed{1}$$

◆ التمرين 03:

① لدينا:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}}\left(\frac{1}{x-2}\right)=+\infty$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي

بجوار $+\infty$ معادلته $y=0$

وآخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=2$

② لدينا:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=1$$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ <}}\left(\frac{x^2+4}{x^2+x-2}\right)=+\infty$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

معادلته $y=1$

وآخر مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=-2$

◆ التمرين 04:

① لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا:

$$f(x)-y=\frac{x^2-1}{x}-x=\frac{x^2-1-x^2}{x}=\frac{-1}{x}$$

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$	
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)	(C_f) تحت (D)

ومنه (C_f) يقع تحت (D) في المجال I

② لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-(x-1)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-(x-1)(x+1)}{x+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x^2+1}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x-1$ بجوار $\pm\infty$.

دراسة الوضعية: لدينا:

$$f(x)-y=0\Rightarrow\frac{1}{x+1}=0\Rightarrow x+1\neq 0\Rightarrow x\neq -1$$

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (D)	(C_f) فوق (D)

ومنه (C_f) تحت (D) في المجال I

◆ **التمرين 05:**

① تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

- $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=-\infty$

- $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=+\infty$

لأنّ: $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}(x+1)=0^-$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{x^2+x-3}{0^-}\right)=+\infty$

- $\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=-\infty$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$

② اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 نجد: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1}=\frac{ax^2+x(a+b)+b+c}{x+1}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=1\\b+c=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\end{cases}$

- استنتاج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) :

بما أنّ: $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=+\infty$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right)=-\infty$

فإنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x=-1$

ولدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-\frac{3}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{3}{x+1}\right)=0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته $y=x$.

③ تحديد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل:

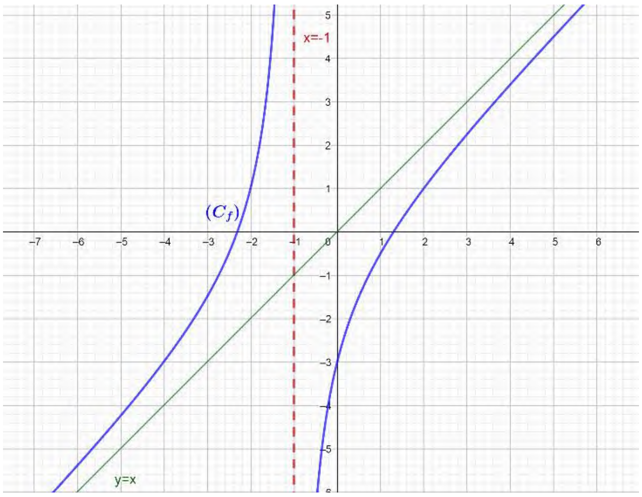
لدينا:

$$f(x)-x=\frac{-3}{x+1}\Rightarrow f(x)-x=\frac{3}{-x-1}\Rightarrow -x-1\neq 0\Rightarrow x\neq -1$$

ومنه:

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (D)	(C_f) تحت (D)

④ التمثيل البياني:



لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة: $x = -1$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة: $y = x$
- باستعمال جدول الوضع النسبي والنهايات نمثل المنحني (C_f) .

◆ **التمرين 06:**

① دراسة تغيرات الدالة f ، ثم انجاز جدول التغيرات:

- تعيين النهايات:

• $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2-4) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+3x^2-4) = +\infty$

- تعيين $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2+6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \\ \text{أو} \\ x+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = -2 \end{cases}$$

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

② تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

لدينا:

$$f(1) = 1^3 + 3(1)^2 - 4 = 0$$

نلاحظ أنّ 1 حل للمعادلة $f(x) = 0$ ، ومنه لحل المعادلة نستعمل طريقة المطابقة أو القسمة الاقليدية:

$$f(x) = x^3+3x^2-4 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x^2+ax+b) \Rightarrow f(x) = x^3+ax^2+bx-x^2-ax-b$$
$$\Rightarrow f(x) = x^3+(a-1)x^2+(b-a)x-b$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a-1 = 3 \\ b-a = 0 \\ -b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$

إذن: $f(x) = (x-1)(x^2+4x+4)$ ومنه:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+4x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2+4x+4 = 0 \end{cases}$$

لدينا: $x - 1 = 0$ ومنه: $x = 1$

ولدينا: $x^2+4x+4 = 0$: لحلها نستعمل المميز Δ:

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(4) = 0$$

ومنه المعادلة السابقة تقبل جذر مضاعف هو $x = -\frac{4}{2}$ أي $x - 2$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي : $s=\{1;-2\}$ وهي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.

- مع محور التراتيب:

$$f(0)=0^3+3(0)^2-4=-4$$

إذن (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة ذات الاحداثيات $(0;-4)$

③ برهان أن النقطة $\omega(-1;-2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

لدينا: $x\in\mathbb{R}$ ومنه: $(-x)\in\mathbb{R}$ إذن $\left(\underbrace{2(-1)-x}_{2\alpha-x}\right)\in\mathbb{R}$

ولدينا:

$$\begin{aligned}f(2(-1)-x)+f(x)&=(-2-x)^3+3(-2-x)^2-4+x^3+3x^2-4\\&=-(-2-x)^2(2+x)+3(2+x)^2-8+x^3+3x^2\\&=-(4+x^2+4x)(2+x)+12+3x^2+12x-8+x^3+3x^2\\&=-8-4x-2x^2-x^3-8x-4x^2+4+6x^2+12x+x^3\\&=-4=2(-2)\end{aligned}$$

ومنه النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) .

④ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω:

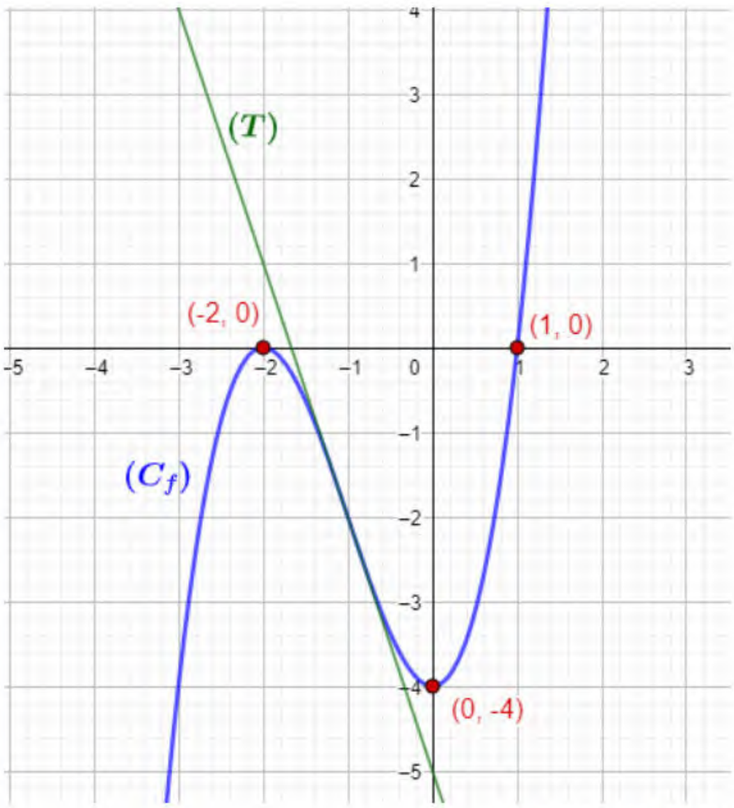
$$(T): y=f'(-1)\big(x-(-1)\big)+f(-1)$$
$$(T): y=\big(3(-1)^2+6(-1)\big)(x+1)+(-1)^3+3(-1)^2-4$$
$$(T): y=-3x-3-2$$
$$(T): y=-3x-5$$

ومنه معادلة المماس (T) هي $y=-3x-5$.

⑤ التمثيل البياني كل من (T) و (C_f) :

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الاحداثيات.
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة: $y=-3x-5$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



⑥ المناقشة البيانية:

لدينا: $x^3+3x^2-4-m=0\Rightarrow f(x)=m$

ومنه حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y=m$ وعليه المناقشة أفقية:

لما $m<-4$	أي	$x<-4$	للمعادلة حل وحيد سالب
لما $m=-4$	أي	$x=-4$	المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والأخر مضاعف
لما $-4<m<0$	أي	$-4<x<0$	المعادلة تقبل حلان سالبان وحل موجب
لما $m=0$	أي	$x=0$	المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وحل موجب
لما $m>0$	أي	$x>0$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب

• بالتوفيق في شهادة البكالوريا •