وزارة التربية الوطنية
أولمبياد الجزائر للرياضيات

الأولى ثانوي
10 فيفري 2024

مسألة 1: جد كل أزواج الأعداد الصحيحة (n,p) حيث p عدد أولي و $p^2 = n^3 + 1$. -

مسألة 2: بين أنه من أجل كل ثلاث أعداد حقيقية a, b, c لدينا:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

مسألة 3: جد أكبر قيمة للعبارة $ab + bc + 2ac$ بحيث c, b, a أعداد حقيقية موجبة مجموعها 1.

مسألة 4: بعد عيد ميلادها في سنة 2003 اكتشفت منى أن عمرها في تلك السنة (أي في سنة 2003) كان يساوي مجموع أرقام السنة التي ولدت فيها.
- جد في أي سنة ولدت.

مسألة 5: الرباعي $ABCD$ قطراه متعامدان و متقاطعان في النقطة P, نعلم أن $AP = PB = 1$ و الطول BC ضعف الطول AB و نصف الطول CD. أحسب طول القطر BD.

مسألة 6: يملك نزيه كتابا, صفحاته مرقمة بحيث الورقة الأولى تحمل العددين 1 و 2 , الورقة الثانية تحمل العددين 3 و 4 الورقة الثالثة تحمل العددين 5 و 6 , و هكذا. تمزقت إحدى الأوراق, فعندما عدّ نزيه مجموع الأعداد من الأوراق الباقية وجد الناتج يساوي 2025.
- جد عدد الصفحات التي يمكن أن تكون في الكتاب قبل تمزق الورقة يوجد الكثير من الإمكانيات يطلب ايجاد واحدة منها

مسألة 7: x و y عددان طبعيان. جد x و y بحيث:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 10$$

مسألة 8: نرقم رؤوس مكعب بالأرقام من 1 الى 8 و نكتب فوق كل حرف من حروفه الإثنا عشر مجموع الرقمين من رأسيه. هل يمكن أن تكون الأرقام فوق الأحرف جميعها مختلفة مثنى مثنى؟

مسألة 9: ليكن m و n عددين طبيعين حيث :

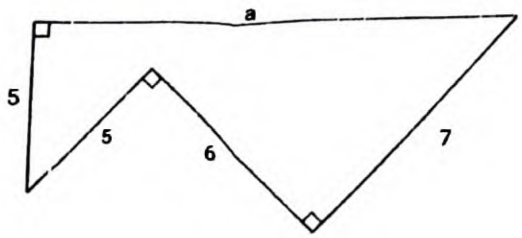
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{2024 \times 2025} = \frac{m}{n}$$

و $\frac{m}{n}$ غير قابل للاختزال.
– جد $m + n$.

مسألة 10:
حلل الى ابسط شكل ممكن العبارة: $a^6 - 1$.

مسألة 11: $ABCD$ رباعي بحيث $AB = BC = CD$، $\angle ABC = 70°$ و $\angle BCD = 170°$. ماهو قيس الزاوية $\angle BAD$ ؟

مسألة 12: جد قيمة الطول a المفقود في الشكل التالي:



يمنع استعمال الآلة الحاسبة و المنقلة
الوقت: 4 ساعات

مسألة 1: لدينا

$$p^2 = (n+1)(n^2-n+1)$$

منه الاحتمالات الممكنة هي

$$p^2 = 1\cdot p^2, p^2\cdot 1, p\cdot p$$

بدراسة الحالات الحالة الأولى تعطي $n=0$، وهو حل مرفوض لأن p أولي. الحالة الثانية تعطي $n\in\{0,1\}$، وهو حل مرفوض كذلك لنفس السبب. الحالة الممكنة الوحيدة هي لما

$$n+1 = p = n^2-n+1$$

ما يعني أن $n^2-2n=0$، و بما أن $n\neq 0$، نستنتج الحل الوحيد هو $\boxed{n=2, p=3}$.

مسألة 2: لدينا $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$، بنشر العبارة والقسمة على 2 نجد المطلوب

مسألة 3: بما ان $a+b+c=1$ فان $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 1$ وبالتالي $ab+bc+2ca = \frac{1-(c-a)^2-b^2}{2}$، وبما ان اصغر قيمة ممكنة لـ$b^2+(c-a)^2$ هي 0 فقط لما $b=0$ و $c=a=\frac{1}{2}$ فان اكبر قيمة ممكنة لـ$ab+bc+2ca$ هي لما $b=0, c=a=\frac{1}{2}$ اي $\frac{1}{2}$

مسألة 4: لنكتب سنة ميلادها كمجموع $a_0+10a_1+100a_2+1000a_3$ حيث a_3،a_2،a_1،a_0 هي أرقام سنة ميلادها. لدينا $a_0+a_1+a_2+a_3 = 2003-a_0-10a_1-100a_2-1000a_3$ لذلك $2a_0+11a_1+101a_2+1001a_3 = 2003$. لنفترض أن $a_3\geq 3$، بالتالي $1001a_3 \geq 3003$ وهو أمر مستحيل، إذا كان $a_3=2$ فان $2a_0+11a_1+101a_2+2002 = 2003$ وهو أمر مستحيل أيضًا لأن $2a_0+11a_1+101a_2$ لا يمكن أن يساوي 1، إذا كان $a_3=0$ فان $2a_0+11a_1+101a_2 = 2003$ وهو أمر مستحيل أيضًا لأن القيمة القصوى لـ $2a_0+11a_1+101a_2$ هي $2(9)+11(9)+101(9) < 2003$. لذا $a_3=1$ و $2a_0+11a_1+101a_2 = 1002$. لنفترض أن $a_2\leq 8$، بالتالي $2(9)+11(9) \geq 2a_0+11a_1 \geq 1002-8(101)$ وهو أمر مستحيل، لذا $a_2=9$ و $2a_0+11a_1=93$. لنفترض أن $a_1\leq 6$، بالتالي $2a_0 \geq 93-11(6) > 18$ وهو أمر مستحيل، إذا كان $a_1=8$ وبالتالي $2a_0=5$ وهو أمر مستحيل، إذا كان $a_1=9$ فان $2a_0=-6$ وهو أمر مستحيل، لذا $a_1=7$ و $a_0=8$. بما أن $1+9+7+8 = 25 = 2003-1978$ نستنتج أنها وُلِدَت في 1978.

مسألة 5: بواسطة نظرية فيثاغورس، نحصل على $AB=\sqrt{2}$، لذا $BC=2\sqrt{2}$ و $DC=4\sqrt{2}$، مرة أخرى بواسطة نظرية فيثاغورس نحصل على $PC=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1}=\sqrt{7}$ و $DP=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-7}=5$، لذا $BD=PD+BP=6$.

مسألة 6: لتكن n عدد الأوراق و m ترتيب الورقة المفقودة (بحيث تحتوي الورقة المفقودة على الاعداد $2m-1$ و $2m$)، لدينا $n \leq m$ و $(1+2+3+4+\ldots+2n-1+2n)-(2m-1+2m)=2025$، لذلك $\frac{2n(2n+1)}{2}=2025+(2m-1+2m)=2024+4m$، مما يعطي $2n^2+n-4m=2024$، وبالتالي $m=\frac{2n^2+n}{4}-506$، مما يعطي أن n قابل للقسمة على 4 (لأنه إذا كان n فرديًا فإن $2n^2+n$ فردي، لذا n يكون زوجيًا. هذا يعطي أن $2n^2$ قابل للقسمة على 4، لذا n قابل للقسمة على 4). إذا كانت $n \leq 28$ فإن $m<0$، إذا كانت $n036$ فإن $m>n$،ومنه $n=32$ و $m=14$. ملاحظة: لا يلزم على الطلاب إثبات أن الحل وحيد، إعطاء قيمة لـ n وإثبات صحتها يكفي.

مسألة 7: : لنفترض بدون فقدان للعمومية أن $x \geq y$. لدينا $x^2+y^2=10(x+y)$،
لذا $(x^2-10x+25)+(y^2-10y+25)=50$،ومنه $(x-5)^2+(y-5)^2=50$. الطرق الوحيدة لكتابة 50 كمجموع لـ 2 مربعات هي $7^2+1^2=50$ و $5^2+5^2=50$، لذا جميع الحلول لـ (x,y) هي $(0,10)$, $(10,10)$, $(4,12)$, $(-2,4)$, $(-2,6)$, $(6,12)$
(نستبعد حالة $x=y=0$ لأن $x+y\neq 0$).

مسألة 8: نثبت بالتناقض المطلوب. لنفترض أنها ممكنة. لاحظ أن القيمة الدنيا لمجموع نقاط على حافة هو $1+2=3$، والقيمة الكبرى هي $7+8=15$، لذا هناك $15-3+1=13$ قيمة ممكنة لمجموع النقاط على كل حافة. نظرًا لوجود 12 حافة على المكعب، فهناك بالضبط قيمة واحدة ممكنة لمجموع نقاط على حافة لم يتم استخدامها. لاحظ أن مجموع كل الحواف هو $3(1+2+\ldots+8)=108$ ومجموع كل القيم الممكنة هو $3+4+\ldots+15=117$، لذا لا يوجد حافة بقيمة $117-108=9$. لذا هناك حواف بقيم 12،13،14،15. من الواضح ان الحافة بمجموع 15 يجب أن تحتوي على 7 و 8 على نقاطها. بالمثل، $8+6=14$. لذا، 6 و 7 لا يشتركان في حافة واحدة. لذا يجب أن يتم تشكيل 13 بواسطة 5 و 8. الآن، $8+4=12$ أو $7+5$. نظرًا لأن 8 لديها بالفعل 3 حواف متصلة بها، فإن $8+4=12$ يتم رفضها. أيضًا، نظرًا لعدم مشترك 5 و 7 في حافة واحدة، فإن 12 لا يمكن تشكيلها. لذا لدينا تناقض، وهو أمر مستحيل.

مسألة 9: لدينا $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\ldots+\frac{1}{2024\times 2025}=\frac{2-1}{1\times 2}+\frac{3-2}{2\times 3}+\ldots+\frac{2025-2024}{2024\times 2025}=$ $\frac{2024}{2025}=1+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})+(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3})+\ldots+(-\frac{1}{2024}+\frac{1}{2024})-\frac{1}{2025}$ ، لذا $m+n=2024+2025=4049$.

مسألة 10:

$$a^6-1=(a^3-1)(a^3+1)=(a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)$$

مسألة 11: لتكن E نقطة تقاطع القطعة (CD) و (BA)، ولتكن F نقطة تقاطع القطعة CA و BD. نظرًا لأن $\angle DCB=170^\circ$ و $\angle ABC=70^\circ$، فنحصل على $\angle ECB=10^\circ$ و $\angle EBC=110^\circ$، وبالتالي $\angle CEB=60^\circ$. من ناحية أخرى، لدينا $CB=CD=BA$، لذا $\angle BCA=55^\circ$ و $\angle CBD=5^\circ$، مما يعطي $\angle CFB=60^\circ=180^\circ-60^\circ$، وبالتالي $ECFC$ هو معين رباعي، مما يعطي $\angle FEB=\angle FCB=55^\circ=\angle CAB=\angle FAE$ و $\angle CEF=\angle CBF=\angle CDF$، لذا $AF=EF=DF$، وبالتالي $2\angle FAD=60^\circ$ مما يعطي $\angle FAD=30^\circ$ و $\angle BAD=85^\circ$.