الجمهوريّة الجزائريّة الدّيمقراطيّة الشّعبيّة

وزارة التّربية الوطنيّة

اللّجنة الجزائريّة لأولمبياد الرّياضيّات — مديريّة التّعليم الثّانوي العام والتّكنولوجي

السّبت 30 رجب 1437 هـ

الموافق لـ 7 ماي 2016م

امتحان التّرشيح للمرحلة الأولى من التّحضير لأولمبياد الرّياضيّات الدّولي

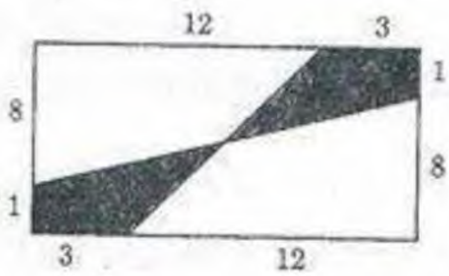
المستوى الثّانوي

تنبيه: هناك عشرة أسئلة، يقتصر حلّ التّلميذ في كلّ سؤال على كتابة النّاتج وهو عبارة عن عدد طبيعي. يمنع استعمال الآلة الحاسبة.

السّؤال 01 : ليكن ABC مثلّثا قائما أطوال أضلاعه a ، b ، c تحقّق $a+b+c=22$ و $a^2+b^2+c^2=200$. احسب مساحة ABC.

السّؤال 02 : ليكن $ABCD$ رباعيّا قائم الزّاويتين في الرّأسين B و C. تقع النّقطة X على الضّلع $[BC]$. إذا علمت أنّ $AB=40$ ، $BC=84$ ، $CD=23$ فاحسب أصغر قيمة ممكنة للمجموع $AX+XD$.

السّؤال 03 : لدينا مستطيل من القياس 15×9. ما هي مساحة المنطقة المظلّلة باعتبار الأطوال المكتوبة في الشّكل؟



السّؤال 04 : ليكن x و y عددين حقيقيّين يحقّقان $13x^2+4y^2+64\leq 12xy+32x$. احسب أكبر قيمة ممكنة للمقدار x^2+y^2.

السّؤال 05 : العدد الطّبيعي m يحقّق $m+7$ مربّع تامّ و $m-34$ مربّع تامّ. جد قيمة m.

السّؤال 06 : ليكن a و b عددين طبيعيّين يحقّقان $ab+a+b=79$ و $a^2b+ab^2=1008$. احسب قيمة a^2+b^2 .

السّؤال 07 : نقول عن عدد إنّه متّزن إذا كانت أرقامه الّتي يكتب بها الفارق بين كلّ متجاورين منها لا يتعدّى 1 . فمثلا الأرقام 123 ، 343 ، 211 متّزنة في حين أنّ الأرقام 312 ، 116 غير متّزنة لأجل $2 = 1 - 3$ و $5 = 1 - 6$. كم توجد من أعداد متّزنة تكتب بثلاثة أرقام؟ (ملاحظة: العدد $12 = 012$ يكتب برقمين وليس بثلاثة أرقام).

السّؤال 08 : أراد فيصل أن يكوّن من الأعداد 1 ؛ 2 ؛ 3 ؛ ... ؛ 2016 قائمة لا يوجد فيها عددان الفارق بينهما يساوي 17. فمثلا إذا اختار فيصل في قائمته العدد 1962 ، لا يمكنه أن يختار معه العدد 1979 ولا العدد 1945. كم يوجد من الأعداد في أطول قائمة يمكن لفيصل أن يكوّنها؟

السّؤال 09 : اخترنا عددا صحيحا $n \geq 2$ ، ثمّ قمنا بالعمليّة التّالية: طرحنا من n أكبر قاسم له مختلف عنه فحصلنا على عدد جديد n_1 ، طرحنا من n_1 أكبر قاسم لـ n_1 مختلف عنه فحصلنا على عدد جديد n_2 ، ثمّ كرّرنا العمليّة على n_2 ، وهكذا إلى أن نصل إلى 1. فمثلا إذا اخترنا العدد 30 ، طرحنا منه 15 لنحصل على 15 ، ثمّ طرحنا 5 لنحصل على 10 ، ثمّ طرحنا 5 لنحصل على 5 ، ثمّ طرحنا 1 لنحصل على 4 ، ثمّ طرحنا 2 لنحصل على 2 ، ثمّ طرحنا 1 لنحصل على 1 ، فنكون قد طبّقنا هذه العمليّة 6 مرّات حتّى نحصل على 1.
إذا اخترنا العدد 2016^{155} كم من مرّة سنطبّق هذه العمليّة حتّى نحصل على 1؟

السّؤال 10 : كتب ياسين الأعداد 1 ، 2 ، 3 ، ... ، n مرتّبة على دائرة، ثمّ بدأ بالعدد 1 فمحاه، ثمّ قفز العدد الّذي يليه 2 فمحا العدد 3 ، ثمّ قفز العدد 4 ، وهكذا كلّ مرّة يمحو عددا يقابله ويقفز عددا ويمرّ هكذا بكلّ الأعداد المتبقّية على الدّائرة عدّة مرّات إلى أن يبقى عدد وحيد على الدّائرة. فمثلا إذا كان $n = 10$ ، محا في الدّورة الأولى الأعداد 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9 وقفز الأعداد 2 ، 4 ، 6 ، 8 ، 10 ، وفي الدّورة الثّانية محا الأعداد 2 ، 6 ، 10 وقفز الأعداد 4 ، 8 ، ولأنّه محا في الدّورة الثّانية آخر عدد 10 يضطر في الدّورة الثّالثة أن يقفز أوّل عدد 4 ليمحو العدد 8 ، فيكون العدد الّذي يبقى في الأخير على الدّائرة هو 4.
إذا كان $n = 2016$ ، فما هو العدد الّذي يبقى في الأخير على الدّائرة؟