



التحضير الجيد للبكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

مسائل شاملة

مرفقة بالحلول

العددية x
الأسية e^x
اللوغارتمية $\ln x$
في الدوال

الإصدار الأول

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 01

فهرس المحتويات

1

أسئلة متنوعة شائعة

في دراسة الدوال والإجابات عليها

- السلوك التقاربي \ المقاربات \ الوضعية النسبية
- عناصر تناظر منحنى \ شفعية دالة
- إشارة دالة \ مبرهنة القيم المتوسطة
- العدد المشتق وتفسيره الهندسي
- المماسات
- إيجاد عبارة $f(x)$ بثوابت مجهولة a, b
- رسم منحنى (C_g) إنطلاقاً من المنحنى (C_f)

2

قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية

النهايات

- بعض نهايات الدوال المرجعية
- نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $\pm\infty$
- حالات عدم التعيين
- طرق إزالة حالات عدم التعيين
- نهاية دالة مركبة
- النهايات بالمقارنة
- المستقيمات المقاربة

3

الدوال العددية:

المسائل الشاملة والحلول

انقر على المسألة أو الحل

- حل المسألة الشاملة رقم 01
- حل المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 03
- المسألة الشاملة رقم 01
- المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03

- حل المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 10

4

انقر على المسألة أو الحل

- حل المسألة الشاملة رقم 01
- حل المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 03
- حل المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 10
- حل المسألة الشاملة رقم 11
- حل المسألة الشاملة رقم 12

5

انقر على المسألة أو الحل

- حل المسألة الشاملة رقم 01

- المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10

الدوال الأسية:

المسائل الشاملة والحلول

- المسألة الشاملة رقم 01
- المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03
- المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10
- المسألة الشاملة رقم 11
- المسألة الشاملة رقم 12

الدوال اللوغارتمية:

المسائل الشاملة والحلول

- المسألة الشاملة رقم 01

- المسألة الشاملة رقم 02
 - المسألة الشاملة رقم 03
 - المسألة الشاملة رقم 04
 - المسألة الشاملة رقم 05
 - المسألة الشاملة رقم 06
 - المسألة الشاملة رقم 07
 - المسألة الشاملة رقم 08
 - المسألة الشاملة رقم 09
 - المسألة الشاملة رقم 10
 - المسألة الشاملة رقم 11
- حل المسألة الشاملة رقم 02
 - حل المسألة الشاملة رقم 03
 - حل المسألة الشاملة رقم 04
 - حل المسألة الشاملة رقم 05
 - حل المسألة الشاملة رقم 06
 - حل المسألة الشاملة رقم 07
 - حل المسألة الشاملة رقم 08
 - حل المسألة الشاملة رقم 09
 - حل المسألة الشاملة رقم 10
 - حل المسألة الشاملة رقم 11

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶

1

أسئلة متنوعة شائعة
في دراسة الدوال والإجابات عليها

① السلوك التقاربي \ المقاربات \ الوضعية النسبية

السؤال	الإجابة
<p>فسر بيانيا: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$</p>	<p>(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الترتيب، معادلته: $x = a$</p>
<p>فسر بيانيا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$</p>	<p>(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا محور الفواصل معادلته: $y = b$</p>
<p>فسر بيانيا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$</p>	<p>(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = ax + b$ عند $\pm\infty$</p>
<p>بين أن المستقيم $y = ax + b$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f)</p>	<p>نبرهن: $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$</p>
<p>بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلته</p> <p>ملاحظة: (*) خاص بشعبتي: رياضيات + تقني رياضي</p>	<p>• إذا كان: $f(x) = ax + b + g(x)$ نبرهن $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ ومعادلة المستقيم: $y = ax + b$ • إذا لم يكن ذلك (*): نحسب العددين a و b من \mathbb{R} كما يلي: $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax]$</p>
<p>ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = ax + b$: (Δ) نطبق نفس الإجابة على السؤال: ادرس وضعية المنحنيين (C_f) و (C_g)، بوضع: $d(x) = f(x) - g(x)$</p>	<p>ندرس إشارة الفرق: $d(x) = f(x) - y$</p> <p>• $d(x) > 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع فوق (Δ) • $d(x) = 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقطع (Δ) • $d(x) < 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع تحت (Δ)</p>
<p>فسر بيانيا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$</p>	<p>المنحنيين (C_f) و (C_g) متقاربان عند $\pm\infty$</p>

② عناصر تناظر منحنى \ شفعية دالة

D_f هي مجموعة تعريف الدالة f

الإجابة	السؤال
$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$ نبين أن:	بيّن أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر (C_f)
نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$	$f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$ بين أن ماذا تستنتج؟
$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) = f(x) \end{cases}$ نبين أن:	بيّن أن المستقيم $d: x = \alpha$ محور تناظر (C_f)
نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم $d: x = \alpha$	$f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$ بين أن ماذا تستنتج؟
$\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$ نبين أن:	بيّن أن الدالة f فردية
$\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$ نبين أن:	بيّن أن الدالة f زوجية
نستنتج أن: f فردية، ومبدأ المعلم مركز تناظر (C_f)	$f(-x) + f(x) = 0$ بين أن: ماذا تستنتج؟
نستنتج أن: زوجية، و (C_f) متناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب (yy')	$f(-x) - f(x) = 0$ بين أن: ماذا تستنتج؟
نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\beta}{2}\right)$	$f(\alpha - x) + f(x) = \beta$ بين أن: ماذا تستنتج؟
نستنتج أن: (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة: $x = \frac{\alpha}{2}$	بين أن: $f(\alpha - x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟

السؤال	الإجابة
<p>يعطى لك المنحنى (C_f) مرسوماً في معلم م م،</p> <p>• عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.</p> <p>• استنتج إشارة $f(x)$</p>	<p>• نحل بيانياً المعادلة: $f(x) = 0$</p> <p>• ثم نحدد المجالات التي يكون عليها (C_f) إما فوق محور الفواصل وإما أسفله</p> <p>وأخيراً نحدد إشارة $f(x)$</p>
<p>• أحسب $f(\alpha)$ واستنتج إشارة $f(x)$</p>	<p>نجد $f(\alpha) = 0$ ثم نحدد المجالات حيث: $f(x)$ إما موجبة أو سالبة</p>
<p>• بين أن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حل وحيد α حيث:</p> $a < \alpha < b$ <p>أو بصيغة أخرى:</p> <p>بين أن (C_f) يقطع المستقيم (Δ) الذي معادلته:</p> $y = k$ <p>في نقطة وحيدة فاصلتها α</p>	<p>• نبين أن f مستمرة ورتيبة تماماً على $[a; b]$</p> <p>• ونحسب: $f(a)$ و $f(b)$ ونبين أن k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فينتج وجود α وحيد من $[a; b]$ حيث: $f(\alpha) = k$</p>
<p>• بين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث:</p> $a < \alpha < b$ <p>أو بصيغة أخرى:</p> <p>بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α</p>	<p>• نبين أن f مستمرة ورتيبة تماماً على $[a; b]$</p> <p>• ونحسب: $f(a)$ و $f(b)$</p> <p>ونجد: $f(a) \times f(b) < 0$</p> <p>وينتج وجود α وحيد من $[a; b]$ حيث: $f(\alpha) = 0$</p>

الإجابة	السؤال
<p>• f تقبل الاشتقاق عند a و $f'(x) = l$</p> <p>• (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا معامل توجيهه l</p>	<p>فسّر:</p> $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l$ <p>أو:</p> $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$
<p>• f تقبل الاشتقاق عند a و $f'(x) = 0$</p> <p>• (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y = f(a)$</p>	<p>فسّر:</p> $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = 0$
<p>• f لا تقبل الاشتقاق عند a و (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا (أو نصف مماس) يوازي حامل محور الترتيب معادلته $x = a$</p>	<p>فسّر:</p> $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = \pm\infty$
<p>• f لا تقبل الاشتقاق عند a.</p> <p>• (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ نصفي مماسين معاملي توجيههما على الترتيب l_1 و l_2 وتسمى النقطة $A(a; f(a))$ نقطة زاوية.</p>	<p>فسّر:</p> $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l_1$ <p>و</p> $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l_2$ <p>حيث: $l_1 \neq l_2$</p>

السؤال	الإجابة
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب المعادلة $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ثم نحسب $f(x_0)$ و $f'(x_0)$ ونعوض في المعادلة أعلاه
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الترتيبة y_0	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ ثم نكتب معادلة المماس عند x_0
عين بيانيا العدد المشتق $f'(x_0)$ <u>ملاحظة:</u> معامل توجيه المماس = $f'(x_0)$	معامل التوجيه = $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ حيث A و B من المماس
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها يساوي a ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة $A(a; b)$ ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0)$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعامد المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ؟ (في معلم متعامد ومتجانس)	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات

⑥ إيجاد عبارة $f(x)$ بثوابت مجهولة a, b

المعطيات	ترجمتها إلى معادلات لتعيين الثوابت: a, b, c
<p>(C_f) يقبل في النقطة $A(x_0; y_0)$ مماسا يوازي محور الفواصل.</p> <p>أو: (C_f) يقبل ذروة في النقطة $A(x_0; y_0)$</p>	<p>نحل الجملة:</p> $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$
<p>(C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي المستقيم ذو المعادلة:</p> $y = mx + k$	<p>نحل الجملة:</p> $\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$
<p>(C_f) يقبل في النقطة $A(x_A; y_A)$ مماسا يشمل النقطة $B(x_B; y_B)$</p>	<p>نحل الجملة:</p> $\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f'(x_0) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$

٧ رسم منحنى (C_g) انطلاقاً من المنحنى (C_f)

التحويل	شرط الوجود	الدوال
(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $(b\vec{j})$	$x \in D$	$g(x) = f(x) + b$
(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $(-a\vec{i})$	$x + b \in D$	$g(x) = f(x + a)$
(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $(-a\vec{i} + b\vec{j})$	$x + b \in D$	$g(x) = f(x + a) + b$
(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')	$x \in D$	$g(x) = -f(x)$
لما $f(x) \geq 0$: (C_g) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \leq 0$: (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')	$x \in D$	$g(x) = f(x) $
لما $x \geq 0$: (C_g) ينطبق على (C_f) إذا $x \leq 0$: (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب (yy')	$ x \in D$	$g(x) = f(x)$

2

قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية النهايات

بعض نهايات الدوال المرجعية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $\pm\infty$:

• النهاية عند $\pm\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = +\infty$$

مثال:

• النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{x^2} \right) = 3$$

حالات عدم التعيين:

① $\infty - \infty$

② $0 \times \infty$

③ $\frac{\infty}{\infty}$

④ $\frac{0}{0}$

طرق إزالة حالات عدم التعيين:

(1) التحليل والإختزال:

نستعمل هذه الطريقة عند حساب $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ حيث: $f(x_0) = g(x_0) = 0$

في هذه الحالة نقوم بتحليل العبارتين f و g وكتابتهم على الشكل: $Q(x)(x - x_0)$ ثم نختزل الكسر ونحسب النهاية من جديد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x^2 + 3x - 7}{x^2 + 2x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x - 1)(4x + 7)}{(x - 1)(x + 3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4x + 7}{x + 3} \right) = \frac{11}{4} \quad \text{مثال 1:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)(x - 2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \right) = -3 \quad \text{مثال 2:}$$

ملاحظة: توجد ثلاث طرق لإيجاد عبارة $Q(x)$:

ط1: المطابقة:

مثال: كتابة العبارة $4x^2 + 3x - 7$ على الشكل: $(x - 1)Q(x)$:

بما أن $Q(x)$ من الدرجة الأولى فهو يكتب على شكل $ax + b$ ومنه:

$$(x - 1)Q(x) = (x - 1)(ax + b) = ax^1 + (b - x)x - b$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b - a = 3 \\ -b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 3x - 7 = (x - 1)(4x + 7)$$

ط2: القسمة الإقليدية:

مثال:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 8 & x + 2 \\ \hline -x^3 - 2x^2 & x^2 - 2x + 4 \\ \hline -2x^2 + 8 & \\ +2x^2 + 4x & \\ \hline +4x + 8 & \\ -4x - 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ط3: خوارزمية هورنر:

وهي أسهل الطرق، خاصة لما يكون كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق:

$$\text{مثال: } x_0 = 1, p(x) = 4x^2 + 3x - 7$$

$$\begin{cases} a' = a = 4 \\ b' = aa' + b = 1(4) + 3 = 7 \\ c' = x_0 b' + c = 1(7) - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 3x - 7 = (x - 1)(4x + 7)$$

	$a = 4$	$b = 3$	$c = -7$	معاملات $p(x)$
$x_0 = 1$	↓			x_0 الجذر
	$a' = 4$	$b' = 7$	$c' = 0$	معاملات $Q(x)$

(2) استعمال المرافق (خاصة بالجذور التربيعية):

مثال 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال 2:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{x+8} - 3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{5-x} - 2)(\sqrt{5-x} + 2)(\sqrt{x+8} + 3)}{(\sqrt{x+8} - 3)(\sqrt{5-x} + 2)(\sqrt{x+8} + 3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(1-x)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{\sqrt{x+8} + 3}{\sqrt{x+8} + 3} \right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

ملاحظة: لما يؤول x إلى $\pm\infty$ ، إما نستعمل المرافق في حالة تساوي معاملات x داخل الجذر وخارجه (المثال 3)

أو نستعمل التحليل في حالة عدم تساوي المعاملات (المثال 4)

مثال 3:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x + 1 - \sqrt{x^2 + x - 2})(x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2})}{(x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2})} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x+1)^2 - (x^2 + x - 2)}{x+1 + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1 + |x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}\right)} \right) \quad (x \rightarrow +\infty \Rightarrow |x| = x) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}} \right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

مثال 4:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 1 - x \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) \Rightarrow (x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x| = -x) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(\underbrace{2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}_{\rightarrow 1} \right) \right) = -\infty
\end{aligned}$$

(2) استعمال العدد المشتق:

لاستعمال هذه الطريقة لا بد أن تكون النهاية من الشكل:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

وهذه النهاية تساوي العدد المشتق $f'(x_0)$

مثال 1:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sqrt{x - 1}; f(2) = 1; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}$$

مثال 2:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0) = 1$$

$$f(x) = \sin(x); f(0) = 0; f'(x) = \cos(x)$$

نهاية دالة مركبة:

$$f = v \circ u: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} v(x) = c \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2 - 2x - 1}}{x^2 - 5x + 3} \right); \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4x^2 - 2x - 1}{x^2 - 5x + 3} \right) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{x}}{u(x)} \right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

النهايات بالمقارنة:

الحالة ①:

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \cos(x)}{x + 1} \right) \text{ احسب}$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow 2x - 1 \leq 2x + \cos(x) \leq 2x + 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x - 1}{x + 1} \leq \frac{2x + \cos(x)}{x + 1} \leq \frac{2x + 1}{x + 1}$$

ملاحظة: المتراجحة لم تتغير لأنه لما $(x \rightarrow +\infty)$ فإن: $(x + 1 > 0)$

أما إذا كان $(x \rightarrow -\infty)$ فإن: $(x + 1 < 0)$ ، منه تتغير المتراجحة عند القسمة على $(x + 1)$

$$\begin{cases} \frac{2x - 1}{x + 1} \leq \frac{2x + \cos(x)}{x + 1} \leq \frac{2x + 1}{x + 1} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 1}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 1}{x + 1} \right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x + \cos(x)}{x + 1} = 2$$

الحالة ②:

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2 - \sin(x)} \right) \text{ احسب}$$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\sin(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2 - \sin(x) \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin(x)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin(x)} \leq x$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2 - \sin(x)} \geq \frac{x}{3} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{3} \right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2 - \sin(x)} \right) = +\infty$$

الحالة ③:

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

مثال:

$$\text{احسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x \cos(x))$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow x \leq x \cos(x) \leq -x$$

$$\Rightarrow -2x^2 + x \leq -2x^2 + \cos(x) \leq -2x^2 - x$$

$$\begin{cases} -2x^2 + \cos(x) - 2x^2 - x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 - x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + \cos(x)) = -\infty$$

ملاحظة:

غالبًا ما نستعمل المقارنة لحساب نهايات الدوال المثلثية $(\sin(x); \cos(x))$ لما x يؤول $\pm\infty$.

حيث أن هذه الدوال لا تقبل نهاية عند $\pm\infty$.

ولحصر $f(x)$ دائمًا نطلق من حصر الدالة المثلثية $(\sin(x); \cos(x))$ بين (-1) و $(+1)$.

المستقيمات المقاربة:

- ① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ المستقيم $x = a$ مستقيم مقارب عمودي
(يوازي محور الترتيب)
- ② $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow$ المستقيم $y = b$ مستقيم مقارب أفقي
(يوازي محور الفواصل)
- ③ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \Rightarrow$ المستقيم $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل

3

الدوال العددية
المسائل الشاملة

01

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x - 1)^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{i}; \vec{j})$.(1) أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسياً.ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.(2) أ- عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + b}{(x - 1)^2}$$

ب- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) والمستقيم (d) الذي معادلته $y = x - 2$ ؟ برر.ج- حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d) ، ولتكن A نقطة تقاطعهما.(3) بين أنه يوجد مماس $(T) \perp (C_f)$ مواز للمستقيم (d) .(4) بين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $]-\infty; 1[$ ، استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α .(5) مثل بيانياً المستقيم (d) والمماس (T) والمنحنى (C_f) .(6) استنتج بيانياً حلول المعادلة $f(x) = x + m$ حيث m وسيط حقيقي.(7) أ- نريد إيجاد نتيجة السؤال (5) باستعمال الحساب، بين أن فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y = x + m$ هي حلول المعادلة (E) حيث:

$$(E): (m + 2)x^2 - (2m + 7)x + m + 4 = 0$$

ب- جد حسب قيم m حلول المعادلة (E) .

02

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in] - 1.48; 1.47[$.ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.(II) نعتبر الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.(3) أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.(4) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .ب- ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

(5) بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.(6) مثل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .

03

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x - 7}{2 - x}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسياً.
ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- (2) بين أن النقطة $A(2; -3)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .
- (3) بين أنه توجد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازياً للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x + 4$ ، يطلب تعيين معادلة كل منهما.
- (4) اوجد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.
- (5) مثل بيانياً المنحني (C_f) .

04

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1; 3\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسياً.(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.(3) أوجد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.(4) أ- بين أنه إذا كان $x \in D_f$ فإن $(4 - x) \in D_f$.ب- بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) .(5) مثل بيانياً المنحني (C_f) .

05

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.(1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية: a, b, c بحيث كل x من D_f :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$$

(2) استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) عند $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.- حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .(3) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.(4) جد إحداثي النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين، وأثبت أنها مركز تناظر للمنحني (C_f) .(5) أنشئ المنحني (C_f) .(6) استنتج رسم المنحني (C_h) الممثل للدالة h المعرفة بـ:

$$h(x) = \frac{(x - 4)^2}{|x - 3|}$$

06

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$ (1) ادرس تغيرات الدالة g .(2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.4 < \alpha < -0.3$ ب- حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x - 1}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.(1) بين من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن:

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x - 1}$$

(2) أ- احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

ب- ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.(3) احسب: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$

وماتفسيرك الهندسي للنتيجة.

(4) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) و المنحني (C_p) الممثل للدالة:

$$p(x) = x^2 - 2x - 1$$

(5) بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{15}{2(1 - \alpha)} - 2$$

واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.(6) أنشئ بيانيا كل من (C_p) و (C_f) .

07

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة f المعرفة بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 3x + 2}$$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f ، ثم بين أنه من أجل كل x من D_f فإن:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية يُطلب تعيينها.(2) أ/ ادرس تغيرات الدالة f .ب/ أوجد المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) الممثل للدالة f .ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمقارب الأفقي (Δ) :(3) عين تقريب تآلفي للدالة f عند 0 .(4) أنشئ بيانيا المنحني (C_f) .(II) نعرف الدالة h كما يلي:

$$h(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2}$$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة h .(2) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.(3) أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند 0 .(4) ادرس شفعية الدالة h .(5) استنتج التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقاً من (C_f) .(6) ناقشاً بيانياً حسب الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة:

$$(m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m - 1 = 0$$

08

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

لتكن F دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ، حيث: $F(0) = 0$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

نقبل أن الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$.

(I) الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$G(x) = F(x) + F(-x)$$

(1) برر أن G تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} واحسب $G'(x)$ من أجل كل x حقيقي.

(2) احسب $G(0)$ واستنتج أن الدالة F فردية.

(II) الدالة المعرفة على المجال $I =]0; +\infty[$ بـ:

$$H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$$

(1) برر أن H تقبل الاشتقاق على I وأحسب $H'(x)$ من كل x من I .

(2) برهن أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$.

(3) استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] = 2F(1)$ ، ماذا ينتج عن المنحني (C) ؟

(III) الدالة المعرفة على $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ بـ:

$$T(x) = F(\tan x) - x$$

(1) أحسب $T'(x)$ ، ماذا ينتج عن الدالة T ؟

(2) أحسب $F(1)$.

(IV)

(1) انجز جدول تغيرات الدالة F على \mathbb{R} .

(2) أرسم المنحني (C) ، ومستقيماته المقاربة ومماساته عند النقط ذات الفواصل -1 ، 0 و 1 .

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على \mathbb{R} ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; +\infty[$.

ب/ أعط حصرا سعته 0.1 للعدد α .

ج/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) عيّن نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها واعط تفسيرها هندسيا للنتائج.

(2) أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ ، مع تحديد الأعداد الحقيقية a, b, c .

(3) أ- بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (d) يطلب إعطاء معادلة ديكرتية له.

ب- ادرس الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f).

(4) أ- شكل جدول تغيرات الدالة f .

ب- بين أن (C_f) يقطع مرة واحدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β حيث $-1 < \beta < 0$.

ج- بين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(5) أحسب $f(0)$ ثم ارسم المستقيمين المقاربين والمنحني (C_f).

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

أ- بين أن h زوجية.

ب- أشرح كيف تنشئ (C_h) ثم أنشئه.

ج- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين:

$$f(x) = x + m \quad \text{و} \quad f(x) = m$$

10

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$$

- (1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على مجال تعريفها.
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه.
- (3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = 2\sqrt{1 + x^2} - x$$

- (1) أ- احسب نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
ب- برهن أنه من أجل كل x حقيقي:
- $$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1 + x^2}}$$
- ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - (2) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 3x]$ وفسر النتيجة هندسيا.
 - (3) أ- ليكن (d') المستقيم ذو المعادلة $y = x$ ، بين أن (d') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.
ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيمين (d) و (d') .
 - (4) انشئ بيانيا كلا من المستقيمين (d) و (d') و المنحني (C_f) .

3

الدوال العددية

حُلُول المسائل الشاملة

01

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



1) أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$
- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x]$$

$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x]$$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{0^+}$$

$$= +\infty$$

- تفسير النتائج هندسيا:

• $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $+\infty$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال: $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

- دراسة $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1) - 2(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
x^2	+	0	+	+	+	
$x-3$	-		-	0	+	
$(x-1)^3$	-		-	+	+	
$f'(x)$	+	0	+	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$	$f(3)$	$+\infty$	

(2) أ- تعيين الأعداد a, b, c : من أجل كل $x \neq 0$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{cx + b}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(ax + b)(x-1)^2 + cx + b}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(ax + b)(x-1)^2 + cx + b}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + (2a + b)x^2 + (a - 2b)x + 2b}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -4 \\ a - 2b + c = 8 \\ 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

ب- استنتاج المستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - [x - 2]) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2} - [x - 2] \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x - 2}{(x-1)^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$.

ج- وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d) :

دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$f(x) - y = x - 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} - x + 2$$

$$= \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$$

لدينا: $(x - 1)^2 > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$3x - 2$	$-$	0	$+$	$+$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (d) لما: $x \in]-\infty; \frac{2}{3}[$.
- (C_f) يقطع (d) في النقطة $A(\frac{2}{3}; \frac{-4}{3})$.
- (C_f) فوق (d) لما: $x \in]\frac{2}{3}; 1[\cup]1; +\infty[$.

(3) إيجاد معادلة المماس (T) :

المماس (T) يوازي المستقيم (d) معناه: يوجد a حيث: $f'(a) = 1$

$$f'(a) = 1 \Rightarrow \frac{a^2(a - 3)}{(a - 1)^3} = 1$$

$$\Rightarrow a^2(a - 3) = (a - 1)^3$$

$$\Rightarrow 3a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

ومنه معادلة المماس (T) هي: $(T): f'(a)(x - a) + f(a)$

$$(T): y = x - \frac{1}{3} - \frac{47}{12}$$

(1) تبين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]1; -\infty[$:

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]1; -\infty[$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

ولدينا: $(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty) \times (\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]1; -\infty[$:

- استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α :

α	$-\infty$...	0.68	0.69	0.70	0.71	0.72	...	0.98	0.99	1
$f(\alpha)$	$+\infty$...	-0.92	-0.58	-0.18	0.25	0.76	...	2348.97	9698.98	$+\infty$

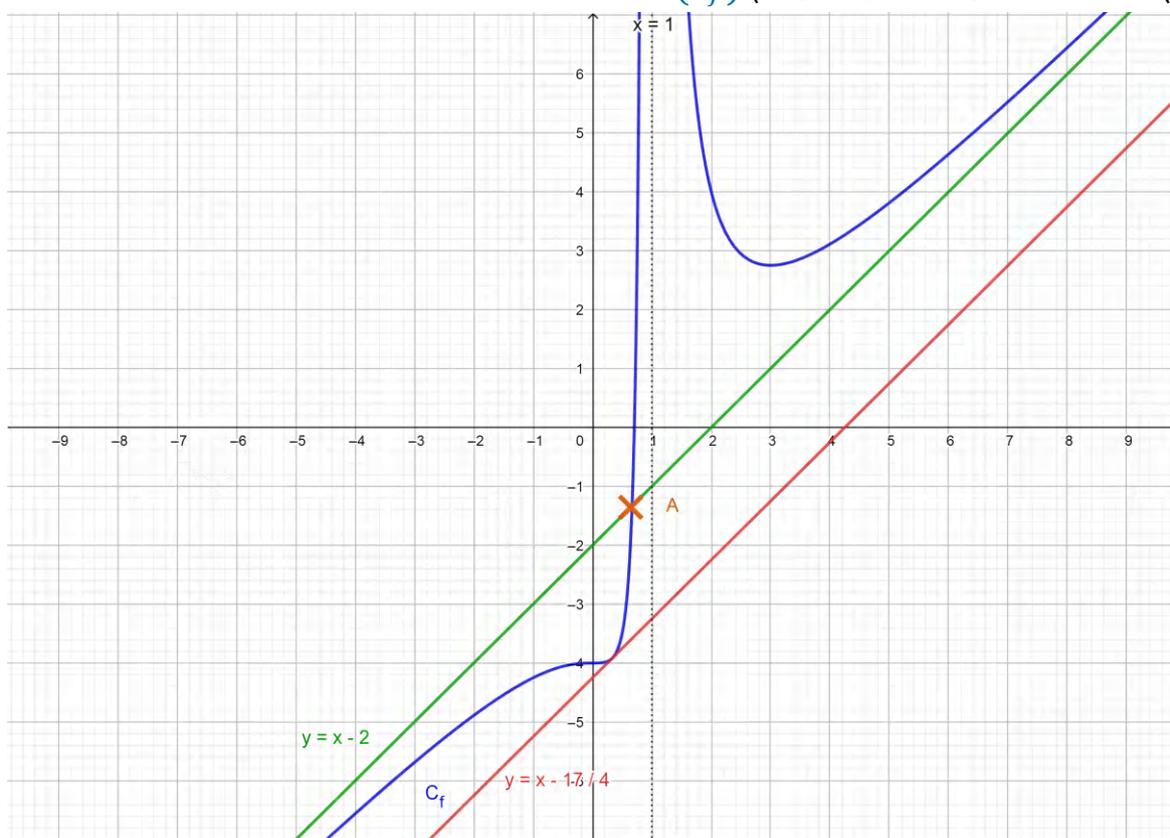
من الجدول نلاحظ أن: $0.70 < \alpha < 0.71$

(1) التمثيل البياني للمستقيم (d) والمماس (T) والمنحنى (C_f) :

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمتين المقاربتين: $x \equiv 1$

- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 2$
- نرسم معادلة المماس (T) ذو المعادلة $y = x - \frac{17}{4}$
- نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (d)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(2) استنتاج بيانيا حلول المعادلة $f(x) = x + m$

المعادلة لا تقبل حلول	$m < \frac{-17}{4}$	لما
المعادلة تقبل حلا مضاعفا	$m = \frac{-17}{4}$	لما
المعادلة تقبل حلان	$\frac{-17}{4} < m < -2$	لما
المعادلة تقبل حل وحيد $x = \frac{2}{3}$	$m = -2$	لما
المعادلة تقبل حلان	$m > -2$	لما

02

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ومنه: $g'(x) = 3x^2 + 6$ ولدينا $3x^2 + 6 > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على \mathbb{R} .2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على \mathbb{R} ولدينا: $g(-1.48) = -0.12$ و $g(-1.47) = 0.0035$ ولدينا $g(-1.48) \times g(-1.47) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ب- حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2)(x^2 + 2) - (2x)(x^3 - 6)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{x(x^3 + 6x + 12)}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2} \end{aligned}$$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
x	$-$	$ $	$-$	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow f(\alpha)$	$\searrow -3$	$\nearrow +\infty$

(2) أ- تبين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 6 - x^3 - 2x}{x^2 + 2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-6 - 2x}{x^2 + 2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2x}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-2}{x} \right] = 0 \end{aligned}$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$ على \mathbb{R} :

$$f(x) - y = \frac{-2x - 6}{x^2 + 2}$$

لدينا: $(x^2 + 2) > 0$ ومنه الإشارة من $(-2x - 6)$:

$$\begin{aligned} -2x - 6 = 0 &\Rightarrow -2x = 6 \\ &\Rightarrow x = -3 \end{aligned}$$

ومنه إشارة $y - f(x)$:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) على المجال: $]-\infty; -3[$
- (C_f) يقطع (Δ) عند النقطة $A(-3; -3)$
- (C_f) تحت (Δ) على المجال: $]-3; +\infty[$

3) تبين أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

يكفي أن نبرهن أن $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha &= \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3}{2}\alpha \\ &= \frac{2\alpha^3 - 12 - 3\alpha^3 - 6\alpha}{\alpha^2 + 2} \\ &= \frac{-(\alpha^3 + 6\alpha + 12)}{\alpha^2 + 2} \\ &= -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2 + 2} \end{aligned}$$

ولدينا سابقا: $g(\alpha) = 0$ ومنه:

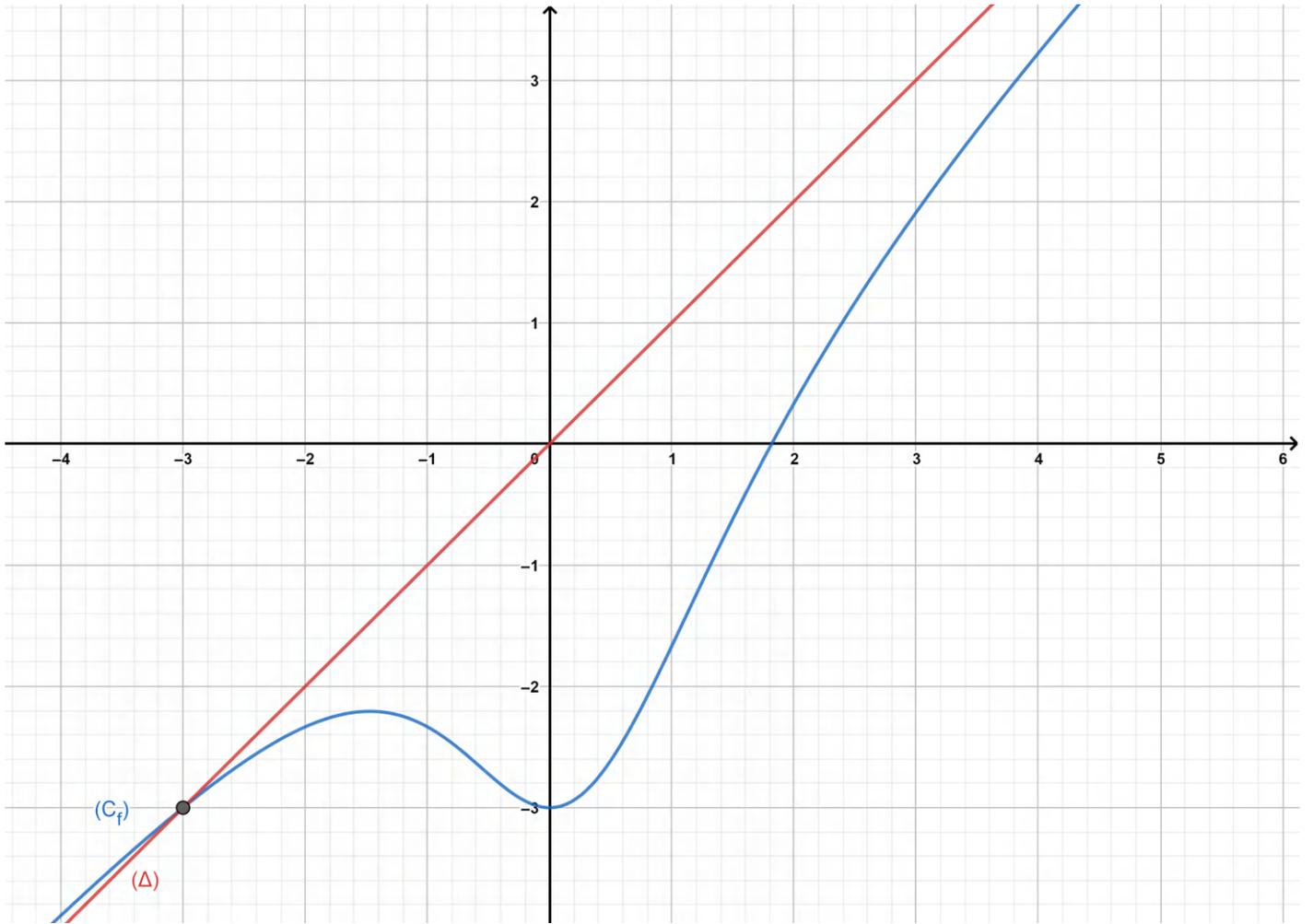
$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = -\frac{0}{\alpha^2 + 2} = 0$$

إذن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

- حصر $f(\alpha)$:

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } -1.47 < \alpha < -1.48 \quad \text{ولدينا: } f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha \\ \frac{3}{2}(-1.48) < \frac{3}{2}\alpha < \frac{3}{2}(-1.47) \\ -2.22 < f(\alpha) < -2.21 \end{aligned}$$

4) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) :



03

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(4) أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x - 7}{2 - x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x}{-x} \right] \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x - 7}{2 - x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x}{-x} \right] \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{3x - 7}{2 - x} \right] \\ &= \frac{-1}{0^+} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{3x - 7}{2 - x} \right] \\ &= \frac{-1}{0^-} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- تفسير النتائج هندسيا:

- $y = -3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x = 2$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة إتجاه تغير الدالة f :لدينا الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال تعريفهاأولا نحسب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(2 - x) - (3x - 7)}{(2 - x)^2} \\ &= \frac{-1}{(2 - x)^2} < 0 \end{aligned}$$

لدينا $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما:

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f'(x)$	-3		$+\infty$
		$-\infty$	-3

(5) تبين أن النقطة A هي مركز تناظر لـ (C_f) :

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{array} \right. \quad \text{أو} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{array} \right.$$



- نثبت أن $(2(2) - x) \in D_f$

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 2 \text{ أو } x < 2 \\ x \in]-\infty; 2[\text{ أو } x \in]2; +\infty[\end{array} \right. \Leftrightarrow -x < -2 \text{ أو } -x > -2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (4 - x) < 2 \text{ أو } (4 - x) > 2 \\ (4 - x) \in]-\infty; 2[\text{ أو } (4 - x) \in]2; +\infty[\end{array} \right. \Leftrightarrow (4 - x) \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

إذن: $(4 - x) \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

- نثبت أن $f(2(2) - x) + f(x) = 2(-3)$

لدينا:

$$\begin{aligned} f(4 - x) + f(x) &= \frac{3(4 - x) - 7}{2 - (4 - x)} + \frac{3x - 7}{2 - x} \\ &= \frac{5 - 3x}{-2 + x} + \frac{7 - 3x}{x - 2} \\ &= \frac{12 - 6x}{-2 + x} \\ &= \frac{-2 + x}{-6(-2 + x)} \\ &= \frac{-2 + x}{-2 + x} \\ &= -6 \end{aligned}$$

إذن النقطة $A(2; -3)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .

(6) إيجاد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x + 4$

◀ المماس لـ (C_f) عن النقطة ذات الفاصلة a يعطى بالمعادلة التالية: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ ▶

لدينا المماس مواز للمستقيم ذو المعادلة $y = -x + 4$ $f'(a) = -1$ \Leftrightarrow

$$a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(2-a)^2} = -1 \Leftrightarrow$$

لدينا: $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4 > 0$ إذن:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \\ a_2 = \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$$

إذن يوجد مماسان لـ (C_f) موازيان للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x + 4$ ، معادلتيهما:

$$\begin{aligned} y_1 &= f'(a_1)(x - a_1) + f(a_1) \\ &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= -1(x - 1) + (-4) \\ &= -x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= f'(a_2)(x - a_2) + f(a_2) \\ &= -1(x - 3) + (-2) \\ &= -x + 1 \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{cases} y_1 = -x - 3 \\ y_2 = -x + 1 \end{cases}$$

7 إيجاد نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

- مع محور الترتيب:

◀ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الترتيب نحسب $f(0)$ ▶

$$f(0) = \frac{3(0) - 7}{2 - (0)} = -\frac{7}{2}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{ \left(0; -\frac{7}{2} \right) \right\}$$

- مع محور الفواصل:

◀ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ ▶

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x - 7}{2 - x} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 7 = 0 \\ \text{و} \\ 2 - x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ \text{و} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

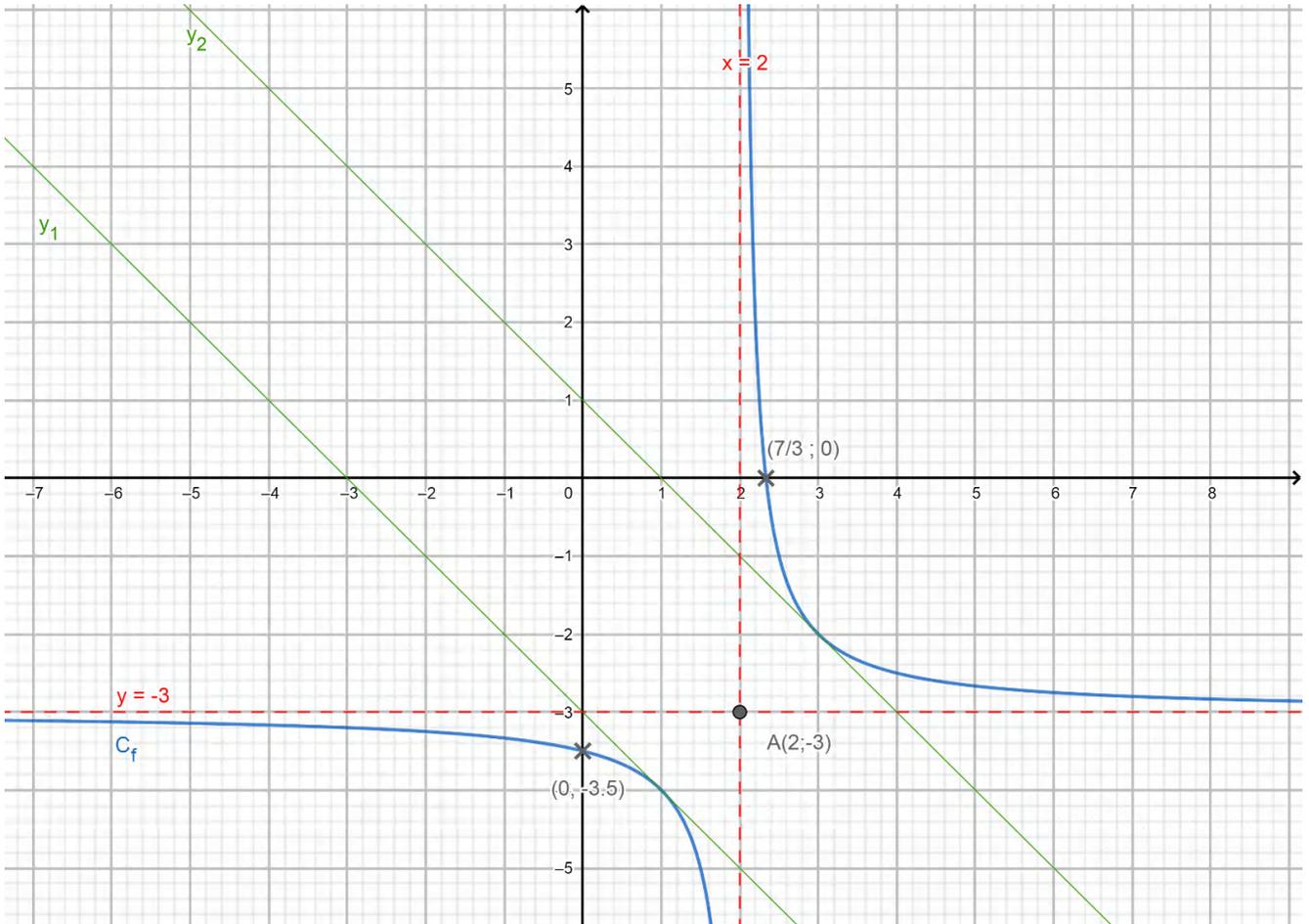
ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{ \left(\frac{7}{3}; 0 \right) \right\}$$

8) التمثيل البياني لـ المنحنى (C_f) :

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y = -3$ و $x = 2$
- نرسم معادلات المماس:
$$\begin{cases} y_1 = -x - 3 \\ y_2 = -x + 1 \end{cases}$$
- نعين النقطة $A(2; -3)$ مركز تناظر لـ (C_f) .
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات (xx') و (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



04

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1; 3\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

لدينا إشارة المقام كالآتي:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$(x^2 - 4x + 3)$	+	0	-	0	+

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x^2}{x^2} \right] \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2}{x^2} \right] \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right] \\ &= \frac{1}{0^+} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right] \\ &= \frac{1}{0^-} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right] \\ &= \frac{1}{0^+} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \right] \\ &= \frac{1}{0^+} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- تفسير النتائج هندسيا:

- $y = 3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $\pm\infty$
- $x = 3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الترتيب بجوار $\pm\infty$

(2) دراسة إتجاه تغير الدالة f :

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها

أولا: نحسب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x - 12)(x^2 - 4x + 3) - (2x - 4)(3x^2 - 12x + 10)}{(x^2 - 4x + 3)^2} \\ &= \frac{-2x + 4}{(x^2 - 4x + 3)^2} \end{aligned}$$

ثانيا: ندرس إشارة $f'(x)$

لدينا $(x^2 - 4x + 3)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x + 4)$

لدينا: $-2x + 4 = 0$ ومنه $-2x = -4$ ومنه $x = 2$

ثالثا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	3	$+\infty$	$-\infty$	2	$-\infty$
				$+\infty$	3

(3) إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

مع محور الترتيب:

◀ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الترتيب نحسب $f(0)$ ▶

$$f(0) = \frac{3(0)^2 - 12(0) + 10}{(0)^2 - 4(0) + 3} = \frac{10}{3}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{ \left(0; \frac{10}{3} \right) \right\}$$

مع محور الفواصل:

◀ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ ▶

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x + 10 \dots (1) \\ \text{و} \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

نحل (1) نجد:

$$\Delta = (-12)^2 - 4(3)(10) = 24$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 - \sqrt{24}}{6} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 + \sqrt{24}}{6} \end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{ \left(\frac{12 - \sqrt{24}}{6}; 0 \right), \left(\frac{12 + \sqrt{24}}{6}; 0 \right) \right\}$$

(4) أ- تبين أنه إذا كان $x \in D_f$ فإن $(4-x) \in D_f$:

لدينا $x \in D_f$ ومنه: $x \in]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

ومنه: $x \in]3; +\infty[$ أو $x \in]1; 3[$ أو $x \in]-\infty; 1[$

ومنه: $x > 3$ أو $1 < x < 3$ أو $x < 1$

ومنه: $-x < -3$ أو $-3 < -x < -1$ أو $-x > -1$

ومنه: $4 - x < 1$ أو $1 < 4 - x < 3$ أو $4 - x > 3$

ومنه: $(4-x) \in]-\infty; 1[$ أو $(4-x) \in]1; 3[$ أو $(4-x) \in]3; +\infty[$

إذن: $(4-x) \in]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

ب- تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) :



لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ (C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

أولا نثبت أن $(2(2) - x) \in D_f$

من السؤال السابق لدينا: $(4 - x) \in D_f$

ثانيا نثبت أن $f(2(4) - x) = f(x)$

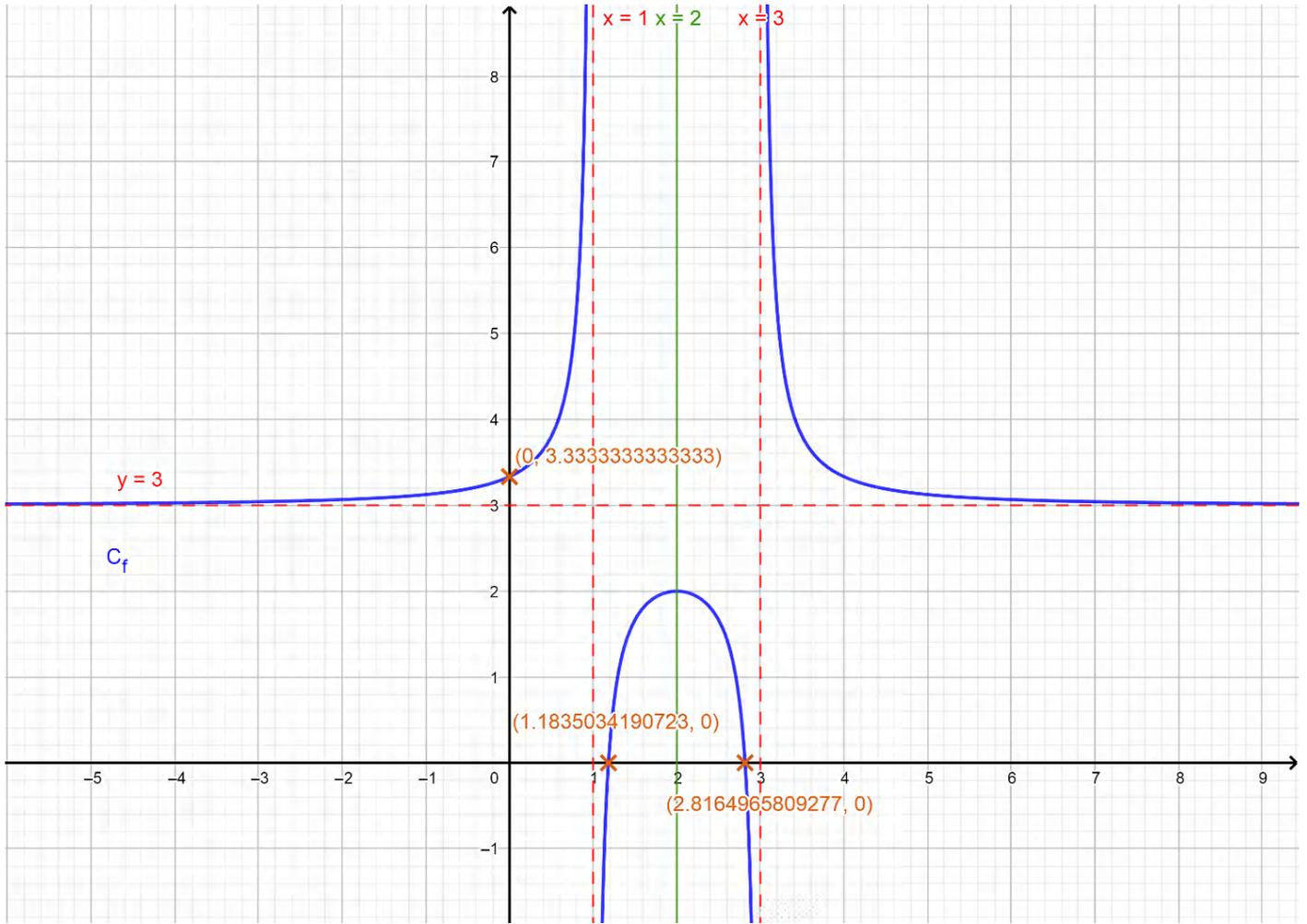
$$\begin{aligned} f(4 - x) &= \frac{3(4 - x)^2 - 12(4 - x) + 10}{(4 - x)^2 - 4(4 - x) + 3} \\ &= \frac{3(4^2 - 2(4)(x) + x^2) - 48 + 12x + 10}{4^2 - 2(4)(x) + x^2 - 16 + 4x + 3} \\ &= \frac{3(16 - 8x + x^2) - 38 + 12x}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

اذن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f) .

(5) التمثيل البياني للمنحنى (C_f) :

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y = 3$ و $x = 1$ و $x = 3$
- نرسم المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f)
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات (xx') و (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



05

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(1) إيجاد الأعداد c, b, a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{x-3} \\ &= \frac{ax^2 - 3ax + bx - 3b + c}{x-3} \\ &= \frac{ax^2 + (b-3a)x - 3b + c}{x-3} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -8 \\ -3b + c = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 5 + \frac{1}{x-3}$$

(2) استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) :

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x-5)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x - 5 + \frac{1}{x-3} - (x-5) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{x-3} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 5$ مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ - تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{1}{x-3}$$

لدينا: $1 > 0$ ، إذن الإشارة من إشارة المقام: $(x-3)$:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$\frac{1}{x-3}$	-		+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

(3) دراسة تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left[x - 5 + \frac{1}{x - 3} \right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[x - 5 + \frac{1}{x - 3} \right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 8x + 16}{x - 3} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty$$

التفسير الهندسي:

- المستقيم $x = 3$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.
- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$$

لدينا: $(x - 3)^2 > 0$ ومنه الإشارة من $(x^2 - 6x + 8)$:

$$\Delta = 36 - 4(1)(8) = 4 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - 2}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + 2}{2} = 4 \end{cases}$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
-----	-----------	---	---	---	-----------

$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-4	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

(4) إيجاد إحداثي النقطة ω :

$$\begin{cases} y = x - 5 \dots (1) \\ x = 3 \dots (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1) نجد: $y = 3 - 5 = -2$ ومنه $\omega(3; -2)$

- اثبات أن ω مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

$$\text{أولا نثبت أن } (2(3) - x) \in D_f$$

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

$$\Leftrightarrow x > 3 \text{ أو } x < 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 3[\text{ أو } x \in]3; +\infty[\Leftrightarrow -x < -3 \text{ أو } -x > -3$$

$$\Leftrightarrow (6 - x) < 3 \text{ أو } (6 - x) > 3 \Leftrightarrow (6 - x) \in]-\infty; 3[\text{ أو } (6 - x) \in]3; +\infty[$$

إذن: $(6 - x) \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

$$\text{ثانيا نثبت أن } f(2(3) - x) + f(x) = 2(-2)$$

لدينا:

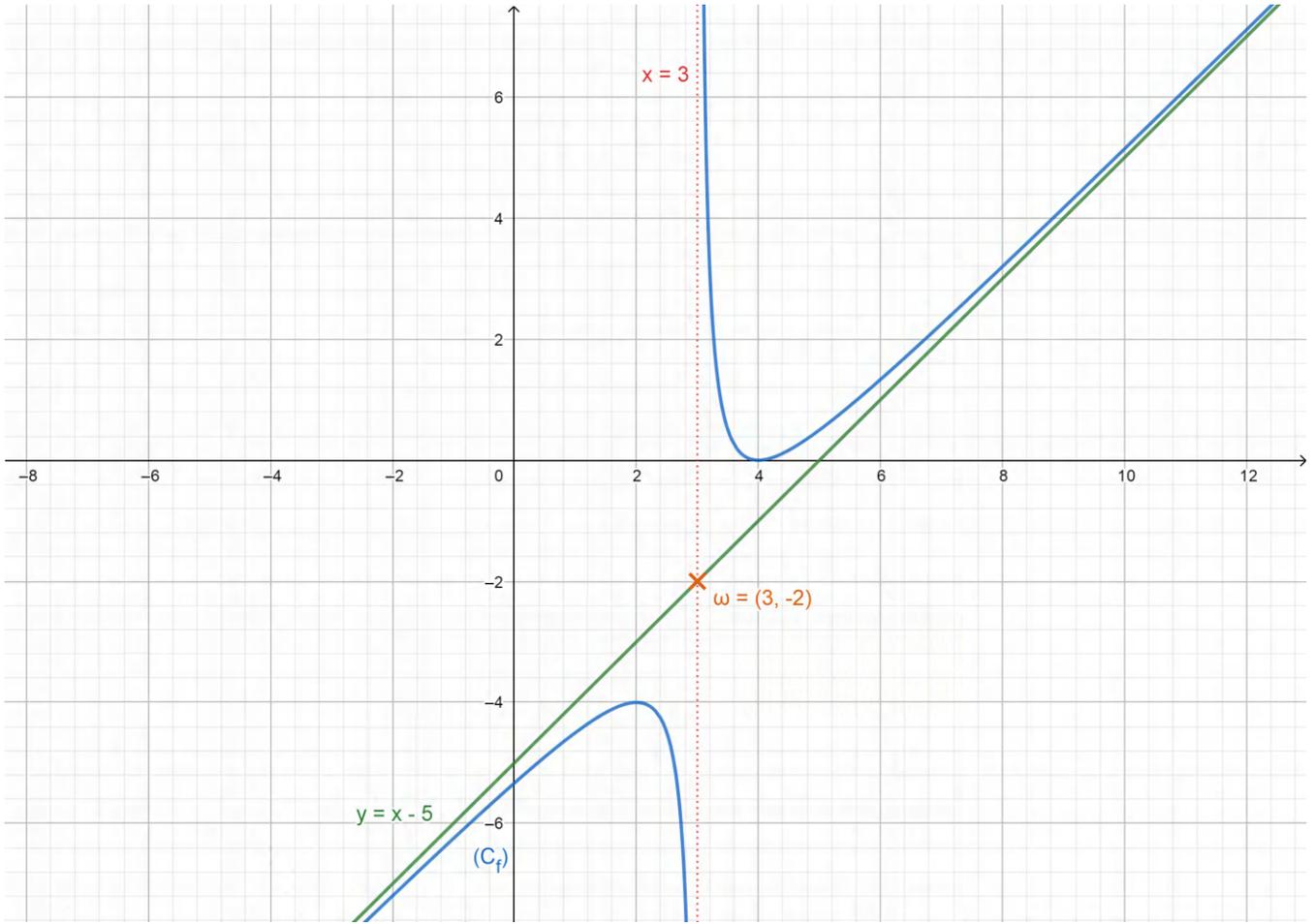
$$\begin{aligned} f(6 - x) + f(x) &= 6 - x - 5 + \frac{1}{6 - x - 3} + x - 5 + \frac{1}{x - 3} \\ &= \frac{1}{3 - x} + \frac{1}{x - 3} - 4 \\ &= \frac{1}{3 - x} - \frac{1}{3 - x} - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

إذن النقطة $\omega(3; -2)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) .

(5) التمثيل البياني:

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

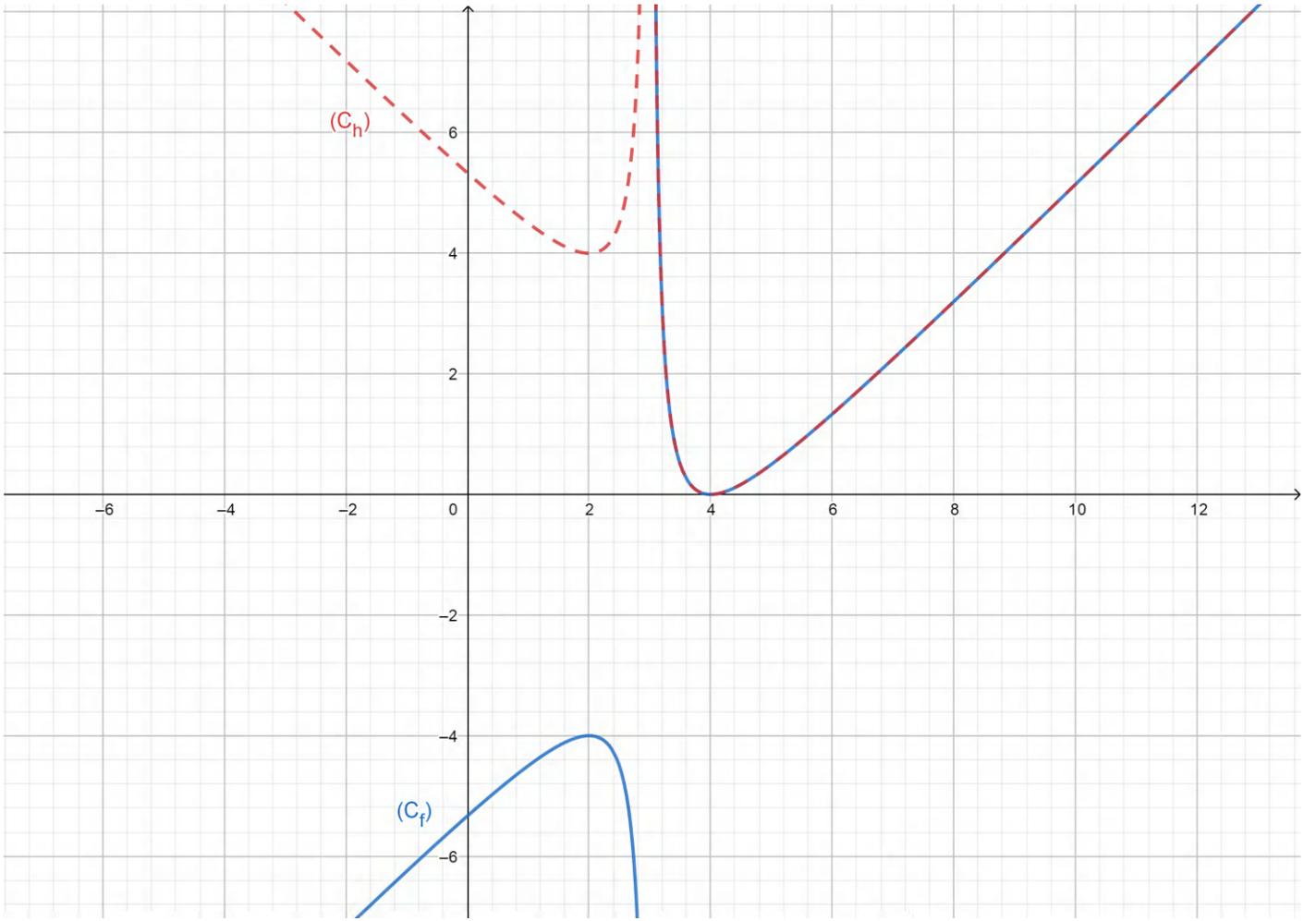
- **نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 3$**
- **نرسم المستقيم المائل ذو المعادلة $y = x - 5$**
- **نعين ω مركز تناظر المنحنى (C_f)**
- **ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)**



6 استنتاج رسم المنحني (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) إذا كان $f(x) \geq 0$

(C_h) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$.



06

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x^3 - 6x^2 + 6x + 3] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{6}{x^1} + \frac{3}{x^3} \right) \right] \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x^3 - 6x^2 + 6x + 3] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{6}{x^1} + \frac{3}{x^3} \right) \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- حساب $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6x^2 - 12x + 6 \\ &= 6(x - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

- تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
$g(x)$	$-\infty$	3	$+\infty$

(2) أ- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α لدينا الدالة g رتيبة ومستمرة على مجال تعريفهاولدينا: $g(-0.4) = -4.88$ و $g(-0.3) = 0.606$ ولدينا: $g(-0.3) \times g(-0.4) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ب- تحديد حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

(II)

1) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن $f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1}$

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1} &= \frac{(x^2 - 2x - 1)(x-1) - 5}{x-1} \\
&= \frac{(x^2 - 2x - 1)(x-1) - 5}{x-1} \\
&= \frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x-1} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

(2) أ- حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x-1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2] \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x-1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2] \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-2 - \frac{5}{0^-} \right] \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-2 - \frac{5}{0^+} \right] \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

نلاحظ أن المستقيم $(x = 1)$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة تغيرات الدالة f :

أولاً: حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x - 2 + \frac{5}{(x-1)^2} \\
&= \frac{2(x-1)^3 + 5}{(x-1)^2} \\
&= \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x + 3}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

لدينا $(x-1)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة $g(x)$.

ثانياً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$	$+\infty$

(3) حساب: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[-\frac{5}{x-1} \right] = 0$$

المنحني (C_p) الممثل للدالة: $(x^2 - 2x - 1)$ هو منحنى تقارب للدالة f بجوار $\pm\infty$

(4) دراسة الوضع النسبي بين (C_p) والمنحني (C_f) :

دراسة إشارة الفرق: $[f(x) - p(x)]$

لدينا:

$$f(x) - p(x) = -\frac{5}{x-1} = \frac{5}{1-x}$$

لدينا: $5 > 0$ إذن الإشارة من المقام

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - p(x)$	+	-	
الوضعية	(C_p) فوق (C_f)	(C_p) تحت (C_f)	

(5) تبين أن $\left[f(\alpha) = \frac{15}{2(1-\alpha)} - 2 \right]$

$$\left(f(\alpha) - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 = 0 \right)$$

لدينا: $g(\alpha) = 0$ ، ولدينا:

$$f(\alpha) - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 = \alpha^2 - 2\alpha - 1 - \frac{5}{\alpha-1} - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2$$

$$= \frac{2(\alpha-1)(\alpha^2 - 2\alpha - 1) - 2(5) + 15 + 2(2(\alpha-1))}{2(\alpha-1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2(\alpha - 1)} \\
&= \frac{g(\alpha)}{2(\alpha - 1)} = \frac{0}{2(\alpha - 1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

-حصرا $f(\alpha)$:

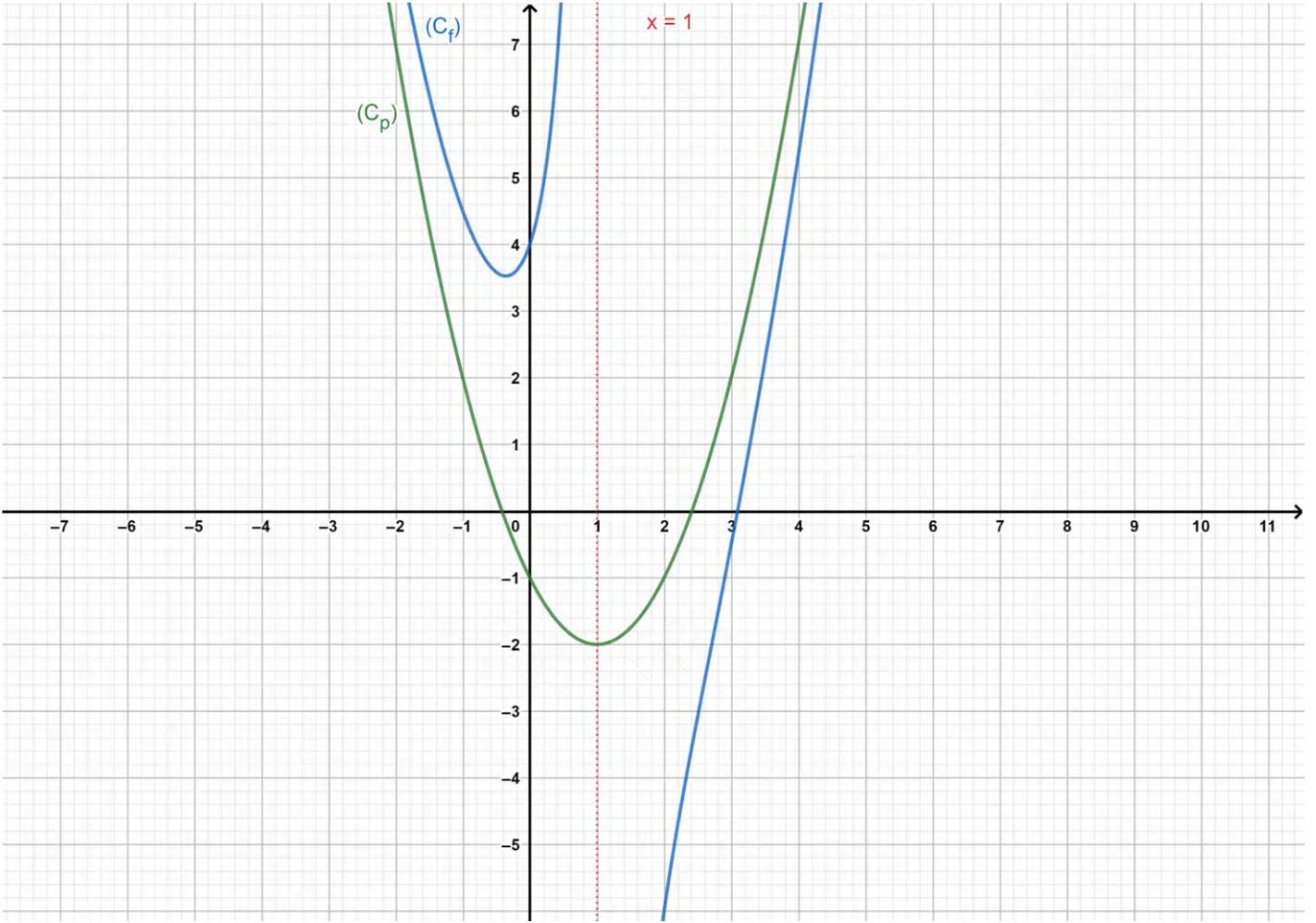
لدينا:

$$\begin{aligned}
0.4 < \alpha < -0.3 \\
0.3 < -\alpha < 0.4 \\
1.3 < 1 - \alpha < 1.4 \\
2.6 < 2(1 - \alpha) < 2.8 \\
\frac{1}{2.8} < \frac{1}{2(1 - \alpha)} < \frac{1}{2.6} \\
\frac{15}{2.8} - 2 < \frac{15}{2(1 - \alpha)} - 2 < \frac{15}{2.6} - 2 \\
3.36 < f(\alpha) < 3.77
\end{aligned}$$

(7) التمثيل البياني لكل من (C_p) و (C_f) :

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $x = 1$
- نرسم المنحني المقارب ذو المعادلة $(x^2 - 2x - 1)$.
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



07

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة

(I) لتكن الدالة f المعرفة بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 3x + 2}$$

(1) تعيين D_f مجموعة تعريف الدالة f :لكي تكون الدالة f معرفة يجب أن يكون:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &\neq 0 \\ (x-1)(x-2) &\neq 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ \text{و} \\ x-2 \neq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \text{و} \\ x \neq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه: $D_f = \mathbb{R} - \{1; 2\}$ - تبين أنه من أجل كل x من D_f فإن: $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} \\ &= \frac{a(x-1)(x-2) + b(x-2) + c(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{ax^3 + (-3a + b + c)x + (2a - 2b - c)}{x^2 - 3x + 2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -3a + b + c = 2 \\ 2a - 2b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + c = 5 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 - c \\ c = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 9 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}$$

(2) أ / دراسة تغيرات الدالة f :

أولاً: حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} \right] \\ &= 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[-8 - \frac{4}{0} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= +\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \left[-3 + \frac{9}{0} \right] \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

ثانياً: حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{9}{(x-2)^2} \\
&= \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\
&= \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\
&= \frac{-5x^2 + 2x + 7}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\
&= \frac{(x+1)\left(x - \frac{7}{5}\right)}{(x^2 - 3x + 2)^2}
\end{aligned}$$

لدينا: المقام $(x^2 - 3x + 2)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$(x+1)\left(x - \frac{7}{5}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 9 \\ x - \frac{7}{5}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 9 \\ x=\frac{7}{5} \end{cases}$$

ثالثاً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	$\frac{7}{5}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	1	0	$+\infty$	$-\infty$	-24	$+\infty$

ب/ المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) :

- $y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$
- $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$
- $x = 2$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمقارب الأفقي (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} - 1$$

$$= -\frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}$$

$$= \frac{-4(x-2) + 9(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{5x-1}{(x-1)(x-2)}$$

إشارة الكسر من إشارة البسط × إشارة المقام

دراسة إشارة البسط:

$$5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

دراسة إشارة المقام:

$$(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{و} \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{و} \\ x=2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	1	2	$+\infty$
$5x-1$	-	0	+	+	+
x^2-3x+2	+		+	0	+
$f(x)-y$	-	0	-	-	+
الوضعية	تحت (C_f) (Δ)		فوق (C_f) (Δ)		فوق (C_f) (Δ)
	يقطع (C_f) في (Δ) في $x = \frac{1}{5}$				

3) تعيين تقريب تآلفي للدالة f عند 0.

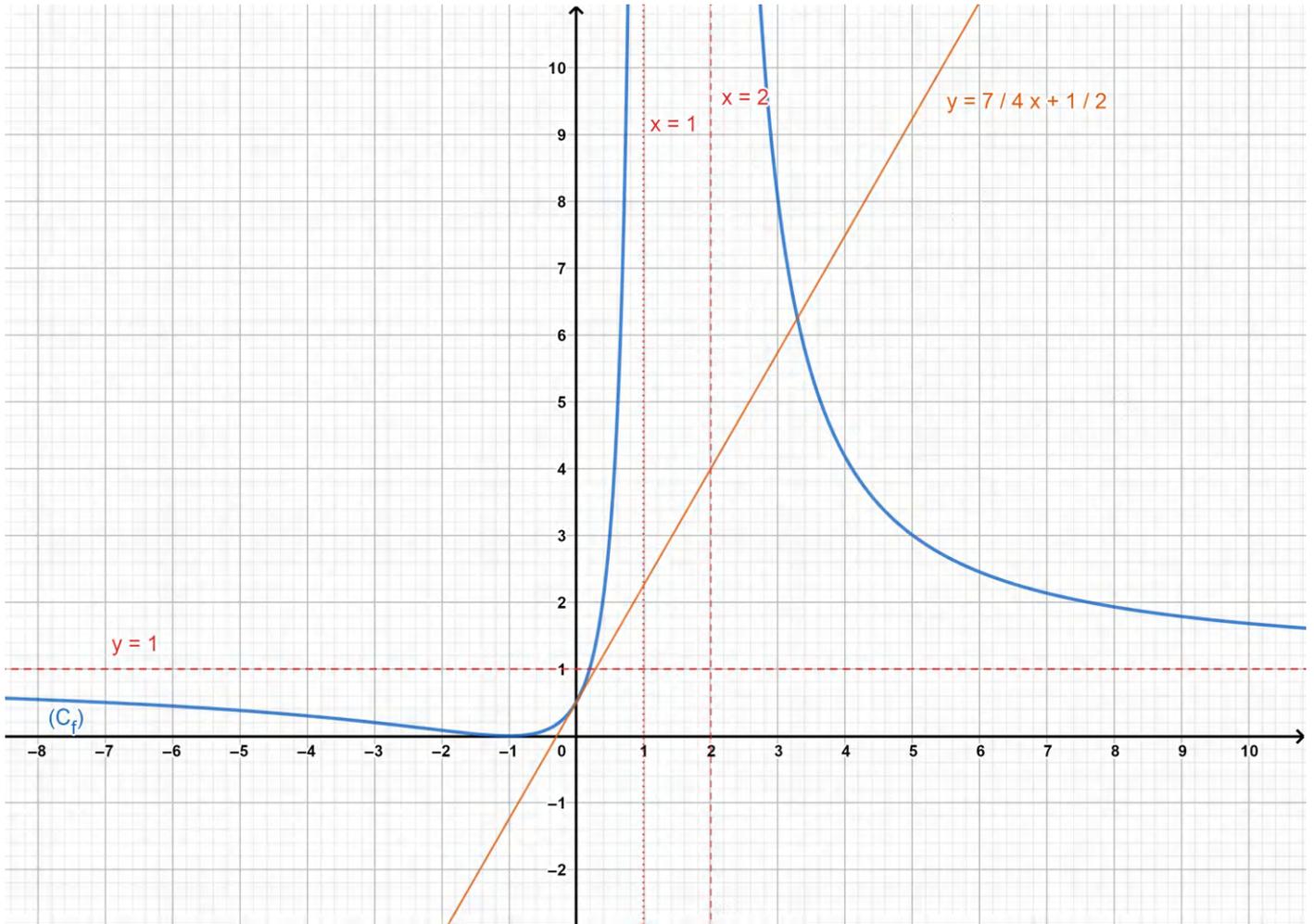
$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$$

4) التمثيل البياني:

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=3$.
- نعين المماس ذو المعادلة $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(II) نعرف الدالة h كما يلي:

$$h(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2}$$

1) تعيين مجموعة تعريف الدالة h :

لتكون الدالة h معرفة يجب أن يكون:

$$\begin{aligned} x^2 - 3|x| + 2 \neq 0 &\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \neq 0, x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 \neq 0, x < 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x - 2)(x - 1) \neq 0 \\ (x + 2)(x + 1) \neq 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \\ x \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه: $D_h = \mathbb{R} - \{-2; -1; 1; 2\}$

2) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}, x \geq 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}, x < 0 \end{cases}$$

لاحظ أنه لما $x \geq 0$ فإنه $h(x) = f(x)$

(3) دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند 0 :

◀ عندما تتساوى النهايتان من اليمين واليسار عند a وكلا النهايتان تساوي $f(a)$ ، نقول أن الدالة مستمرة عند ذلك العدد ▶

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \right] = \left[\frac{0^2 - 2(0) + 1}{0^2 + 3(0) + 2} \right] = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \right] = \left[\frac{0^2 - 2(0) + 1}{0^2 + 3(0) + 2} \right] = \frac{1}{2}$$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} [h(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [h(x)] = \frac{1}{2}$ فإن: الدالة h مستمرة عند 0.

- قابلية الاشتقاق:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2} - \frac{1}{2}}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2x^2 + 4|x| + 2 - x^2 + 3|x| - 2}{2x(x^2 - 3|x| + 2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^2 + 7x}{2x(x^2 - 3|x| + 2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x + 7}{2(x^2 - 3|x| + 2)} \right] \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2} - \frac{1}{2}}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^2 + 7|x|}{2x(x^2 - 3|x| + 2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x - 7}{2(x^2 - 3|x| + 2)} \right] \\ &= -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

بما أن النهايتين غير متساويتين نقول أن: الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند 0. ومنه المنحنى (C_h) يقبل نصفي مماسيين معامل توجيه كل منهما: $\frac{7}{4}$ و $-\frac{7}{4}$

(4) دراسة شفعية الدالة h :

◀ شاهد هذا التذكير ▶

دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية)

$$\begin{aligned}
 h(-x) &= \frac{(-x)^2 + 2|-x| + 1}{(-x)^2 - 3|-x| + 2} \\
 &= \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2} \\
 &= h(x)
 \end{aligned}$$

(5) استنتاج التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقاً من (C_f) :

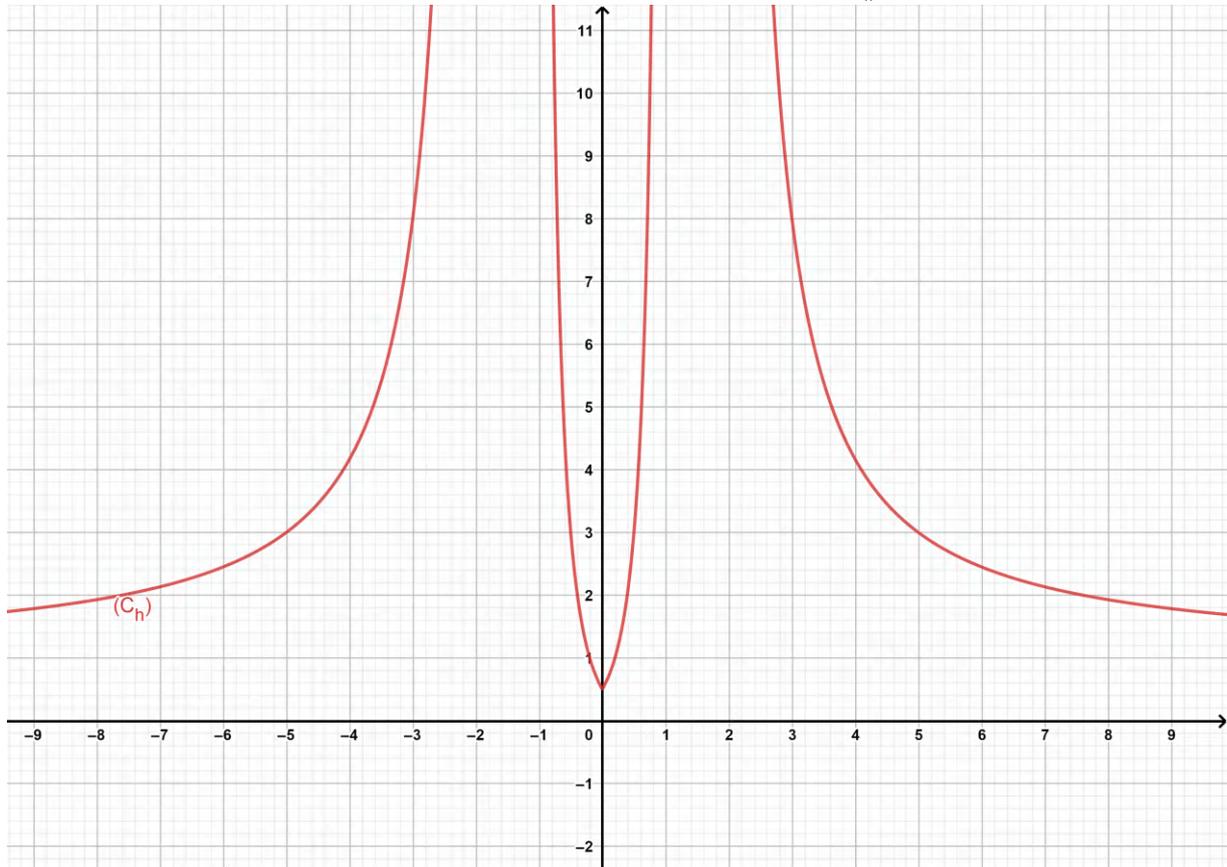
لدينا:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}, & x \geq 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}, & x < 0 \end{cases}$$

ومنه منحنى الدالة h ينطبق على منحنى الدالة f لما $x \geq 0$

ولدينا: $h(-x) = h(x)$

ومنه الدالة h زوجية ومنحها البياني متناظر بالنسبة لمحور الترتيب



(6) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 (m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m-1 &= 0 \\
 \Rightarrow mx^2 - x^2 - 3mx - 2x + 2m-1 &= 0 \\
 \Rightarrow m(x^2 - 3x + 2) &= x^2 + 2x + 1 \\
 \Rightarrow m &= \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

ومنه: $m = h(x)$ لما: $x \geq 0$
إذن المناقشة كالآتي:

لما: $m < \frac{1}{5}$ المعادلة لا تقبل حلول

لما: $m = \frac{1}{5}$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا

لما: $1 \geq m > \frac{1}{5}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

لما: $m > 1$ المعادلة تقبل حلان

(1) برهان أن G تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} :

G مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R} إذن G قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} .

- حساب $G'(x)$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) - F'(-x) \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(-x)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه الدالة G ثابتة.

(2)

- حساب $G(0)$:

$$G(0) = F(0) - F(-0) = 0$$

- استنتاج أن G فردية:

بما أن الدالة G ثابتة، إذن من كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$F(x) + F(-x) = 0 \Leftrightarrow F(-x) = -F(x)$$

ومنه الدالة F فردية

(III)

(1)

تبرير أن H تقبل الاشتقاق على I وحساب $H'(x)$:

H مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* إذن H قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* .

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(x) + \left[F\left(\frac{1}{x}\right) \right]' \\ &= F'(x) - \frac{1}{x^2} F'(x) \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \end{aligned}$$

ومنه الدالة H ثابتة.

(2) برهان أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$

$$H(1) = F(1) + F\left(\frac{1}{1}\right) = 2F(1)$$

وبما أن الدالة H ثابتة فإنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$ فإنه:

$$H(x) = 2F(1)$$

(3) استنتاج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] = 2F(1)$

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [H(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] + F(0) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)]\end{aligned}$$

ومنه:

$$2F(1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)]$$

الاستنتاج: (C_f) يقبل مقارب بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

وبما أن F فردية فإن (C_f) يقبل مقارب بجوار $-\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

$$T(x) = F(\tan x) - x \quad \text{بـ} \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{المعرفة على } T \quad \text{(IV)}$$

(1) حساب $T'(x)$:

$$\begin{aligned}T'(x) &= [F(\tan x) - x]' \\ &= (\tan x)' F'(\tan x) - 1 \\ &= (1 + \tan^2 x) \left(\frac{1}{\tan^2 x + 1} \right) - 1 \\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

ومنه T دالة ثابتة.

(2) حساب $F(1)$:

لدينا: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \in 0$ ومنه $0 \in D_T$ أي:

$$\begin{aligned}T(0) &= F(\tan 0) - 0 \\ &= F(0) - 0 \\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

وبما أن T ثابتة فإنه من أجل كل $x \in D_T$ فإنه $T(x) = 0$

إذن

$$\begin{aligned}F(\tan x) &= T(x) + x \\ &= 0 + x \\ &= x\end{aligned}$$

ولدينا من جهة أخرى: $F(\tan x) = F(1)$ أي $\tan x = 1$

وهذا يكافئ: $x = \frac{\pi}{4}$ لأن: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \in x$

إذن:

$$F(1) = F\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(V)

1) انجاز جدول تغيرات الدالة F على \mathbb{R} :

لدينا الدالة F' موجبة تماما ومنه الدالة F متزايدة تماما على \mathbb{R} .

ولدينا $F(1) = \frac{\pi}{4}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] = 2F(1)$ ومنه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x)] = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

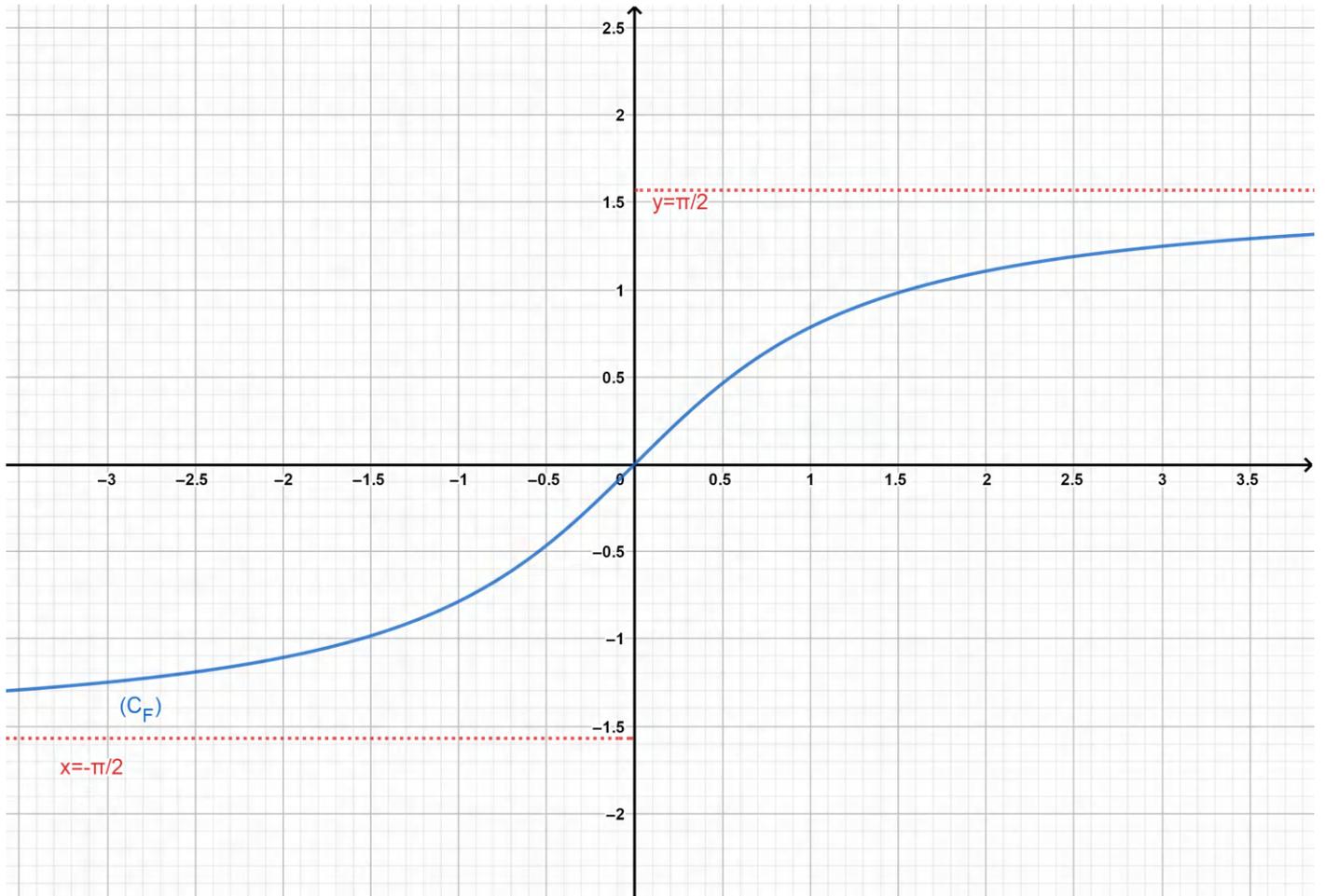
وبما أن الدالة F فردية فإن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [F(x)] = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

2) رسم المنحنى (C_f) والمستقيمات المقاربة:



09

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(1)

أ / حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^3 - 3x^2 + 3x - 5] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right) \right] \\ &= -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - 3x^2 + 3x - 5] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right) \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

ب / دراسة تغيرات الدالة g :أولاً: حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

معادلة من الدرجة الثانية لحلها نستعمل المميز Δ

$$\begin{aligned} \Delta &= (-6)^2 - 4(3)(3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المعادلة لها حل مضاعف هو:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$$

ومنه:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \\ &= 3(x - 1)^2 \end{aligned}$$

لدينا $g'(x) \geq 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماماً.ولدينا $g'(1) = 0$ ، ومنه الدالة g تنعدم ولا تغير اشارتها.

ثانياً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

(2) أ / تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α :لدينا الدالة g مستمرة ومنتزيدة على مجال تعريفها،

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$ و $g(2) = -3$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \times g(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; +\infty[$.

ب/ حصر العدد α :

α	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.7	2.8	...	$+\infty$
$g(\alpha)$	-3	-2.6	-2.2	-1.8	-1.2	-0.6	0.1	1.8	...	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن: $2.5 < \alpha < 2.7$

ج/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) تعيين نهايات الدالة f :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{0^+} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

2) تحديد الأعداد الحقيقية c, b, a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax^3 + x^2(-2a+b) + x(a-2b) + b+c}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -3 \\ a - 2b = 3 \\ b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$$

(3) أ- تبين أن (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً (d) :

$$y = x - 1 \quad \text{ليكن:}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2} - (x-1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2}{(x-1)^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f) :

دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2}{(x-1)^2} > 0$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+		+
الوضعية	(d) فوق (C_f)		(d) فوق (C_f)

(4) أ- دراسة تغيرات الدالة f :

أولاً: حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4}{(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-1)^3 - 4}{(x-1)^3} \\ &= \frac{g(x)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط في المقام

ثانياً: جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	α	$-\infty$
$g(x)$	-	-	0	+
$(x-1)^3$	-	+		+

$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

ب- تبين أن (C_f) يقطع مرة واحدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β :

لدينا: $f(0) = 1$ و $f(-1) = -1.5$

ولدينا $f(-1) \times f(0) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث: $-1 \leq \beta \leq 0$

ج- تبين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$

يكفي أن نثبت أن: $f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} = 0$

لدينا سابقا: $g(\alpha) = 0$ ، إذن:

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} &= \alpha - 1 + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2} + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2} = \frac{0}{(\alpha-1)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

حصر $f(\alpha)$

لدينا:

$$2.5 < \alpha < 2.7$$

$$1.5 < \alpha - 1 < 1.7$$

$$2.25 < (\alpha - 1)^2 < 2.89$$

$$\frac{1}{2.89} < \frac{1}{(\alpha - 1)^2} < \frac{1}{2.25}$$

$$\frac{6}{2.89} < \frac{6}{(\alpha - 1)^2} < \frac{6}{2.25}$$

$$2.07 < f(\alpha) < 2.66$$

(5) إنشاء (C_f) :

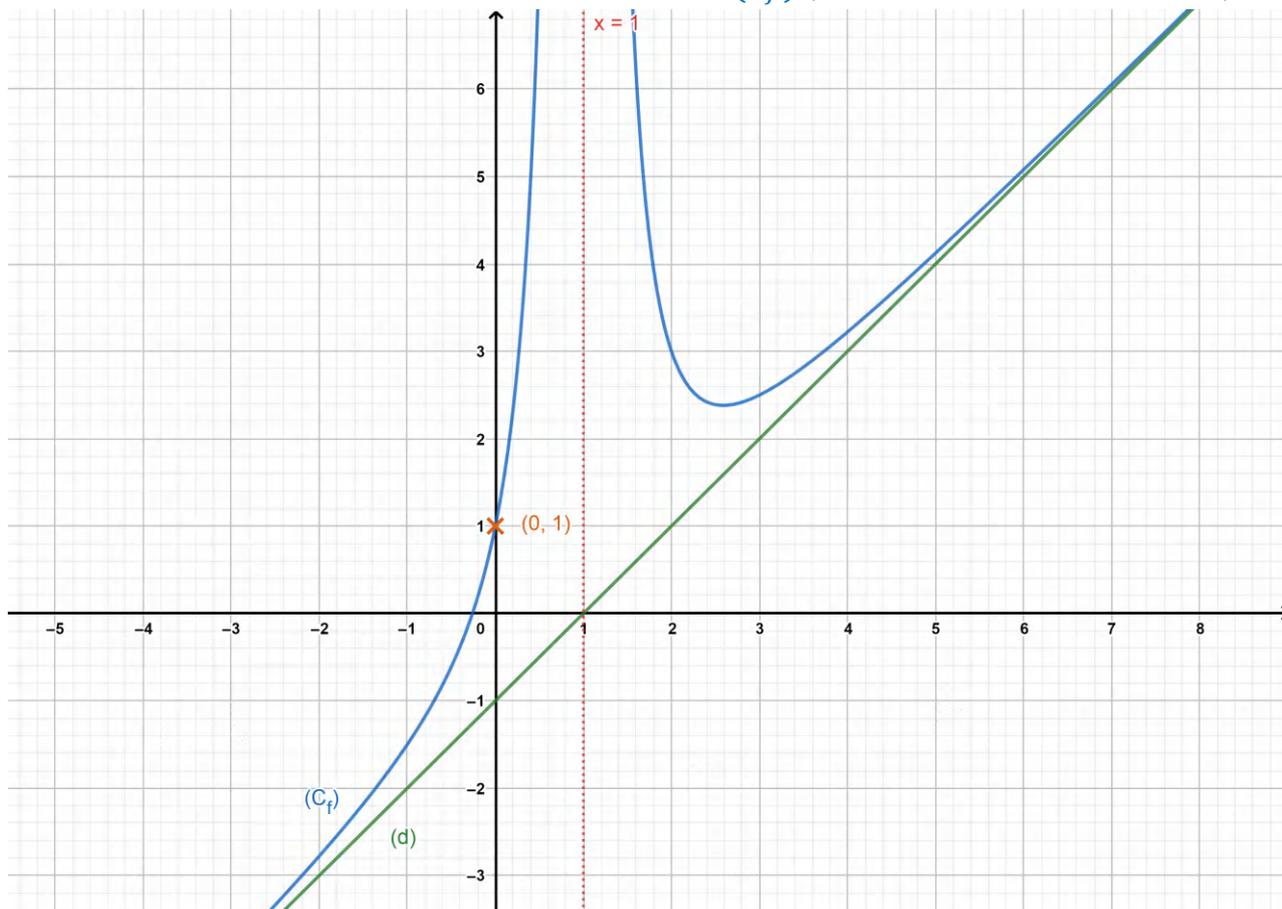
حساب $f(0)$:

$$f(0) = 0 - 1 + \frac{2}{(0-1)^2} = 1$$

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$

- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 1$
- نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(6) أ- تبين أن h زوجية:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

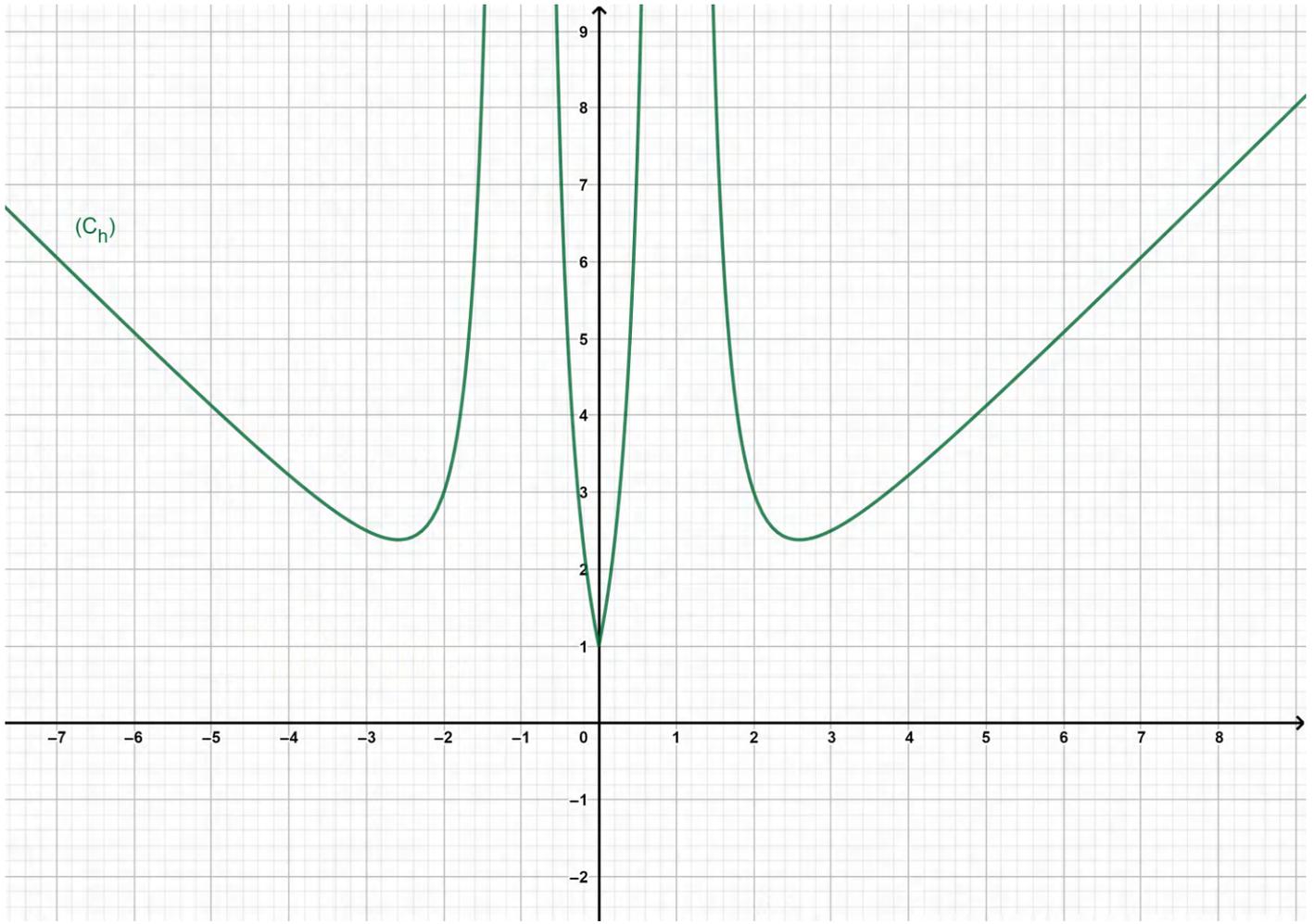
ومنه الدالة h زوجية.

ب/ انشاء (C_h):

لدينا: $f(|x|) = h(x)$

ومنه لما $x \geq 0$ ، يكون (C_h) منطبقا على (C_f)

ولما: $x \leq 0$ ، يكون (C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة إلى محور الترتيب (yy')



ج- المناقشة البيانية:

أولاً: $f(x) = m$:

المعادلة تقبل حل وحيد سالب	$m < 1$	لما
المعادلة تقبل حل وحيد معدوم	$m = 1$	لما
المعادلة تقبل حل وحيد موجب	$1 < m < f(\alpha)$	لما
المعادلة تقبل حلين موجبين أحدهما $x = \alpha$	$m = f(\alpha)$	لما
المعادلة تقبل ثلاث حلول موجبة	$m > f(\alpha)$	لما

ثانياً: $f(x) = x + m$:

المعادلة لا تقبل حلول	$m \leq -1$	لما
المعادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة	$-1 < m < 1$	لما
المعادلة تقبل حلان هما: $x = 0, x = 2$	$m = 1$	لما
المعادلة تقبل حلان موجبان متمايزان	$m > 1$	لما

10

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- أولاً: حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x - \sqrt{1 + x^2}] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2x - \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2x + x \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 + \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \right) \right] \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

بنفس الطريقة نجد أن:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$$

- حساب $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2 - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{2\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة البسط:لما: $x \geq 0$ لدينا:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{1+x^2} - x &= \frac{(2\sqrt{1+x^2} - x)(2\sqrt{1+x^2} + x)}{2\sqrt{1+x^2} + x} \\
&= \frac{4(1+x^2) - x^2}{2\sqrt{1+x^2} + x} \\
&= \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{1+x^2} + x} > 0
\end{aligned}$$

لما: $x \leq 0$ واضح أن $2\sqrt{1+x^2} - x > 0$

ومنه $g'(x) > 0$ أي أن الدالة g متزايدة تماما على \mathbb{R} .

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

بما أن الدالة g مستمرة ومنتزعة تماما على \mathbb{R}

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \times \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

- تعيين α :

لدينا: $g(x) = 0$ أي:

$$\begin{aligned} 2x - \sqrt{1+x^2} &= 0 \Rightarrow 2x = \sqrt{1+x^2} \\ &\Rightarrow 4x^2 = 1+x^2 \\ &\Rightarrow 3x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \dots (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

x_2 مرفوض لأن $x \geq 0$.

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ومنه}$$

(3) استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

(1) أ- حساب نهايات الدالة f :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{1+x^2} - x] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-2x \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(2 \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)} + 1 \right) \right] = +\infty \\
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{1+x^2} - x] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)} - x \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)} - 1 \right) \right] = +\infty
\end{aligned}$$

ب- حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1 \\
&= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \\
&= \frac{2x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}} \\
f'(x) &= \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$.

ج- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة الدالة $g(x)$ ومنه:

x	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	$+\infty$

(2) حساب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x]$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 3x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{1+x^2} - x + 3x]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} [2\sqrt{1+x^2} + 2x] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(2\sqrt{1+x^2} + 2x)(2\sqrt{1+x^2} - 2x)}{2\sqrt{1+x^2} - 2x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{4(x^2 + 1) - 4x^2}{2(\sqrt{1+x^2} - x)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{4}{2\sqrt{1+x^2} - x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} - x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{|x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{-x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} - x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{-x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right)} \right] = 0
\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $-3x = y$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

(3) أ- تبين أن (d') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{1+x^2} - x - x] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{1+x^2} - 2x] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2\sqrt{1+x^2} - 2x)(2\sqrt{1+x^2} + 2x)}{2\sqrt{1+x^2} + 2x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4(x^2 + 1) - 4x^2}{2(\sqrt{1+x^2} + x)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4}{2\sqrt{1+x^2} + x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} + x} \right]
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right)} \right] = 0$$

ومنه المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) :

بما أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = -3x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-3x)$ لما $x < 0$

$$f(x) - (-3x) = 2\sqrt{1+x^2} - x + 3x$$

$$= \frac{2}{-x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right)}$$

لما $x < 0$:

$$\text{لدينا: } \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right) > 0 \text{ و } (-x) > 0$$

ومنه: إشارة الفرق موجبة

اذن: المنحني (C_f) فوق (d) .

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d') :

بما أن المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ لما $x > 0$

$$f(x) - (-3x) = 2\sqrt{1+x^2} - x - x$$

$$= \frac{2}{x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right)}$$

لما $x > 0$:

$$\text{لدينا: } \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1 \right) > 0 \text{ و } x > 0$$

ومنه: إشارة الفرق موجبة

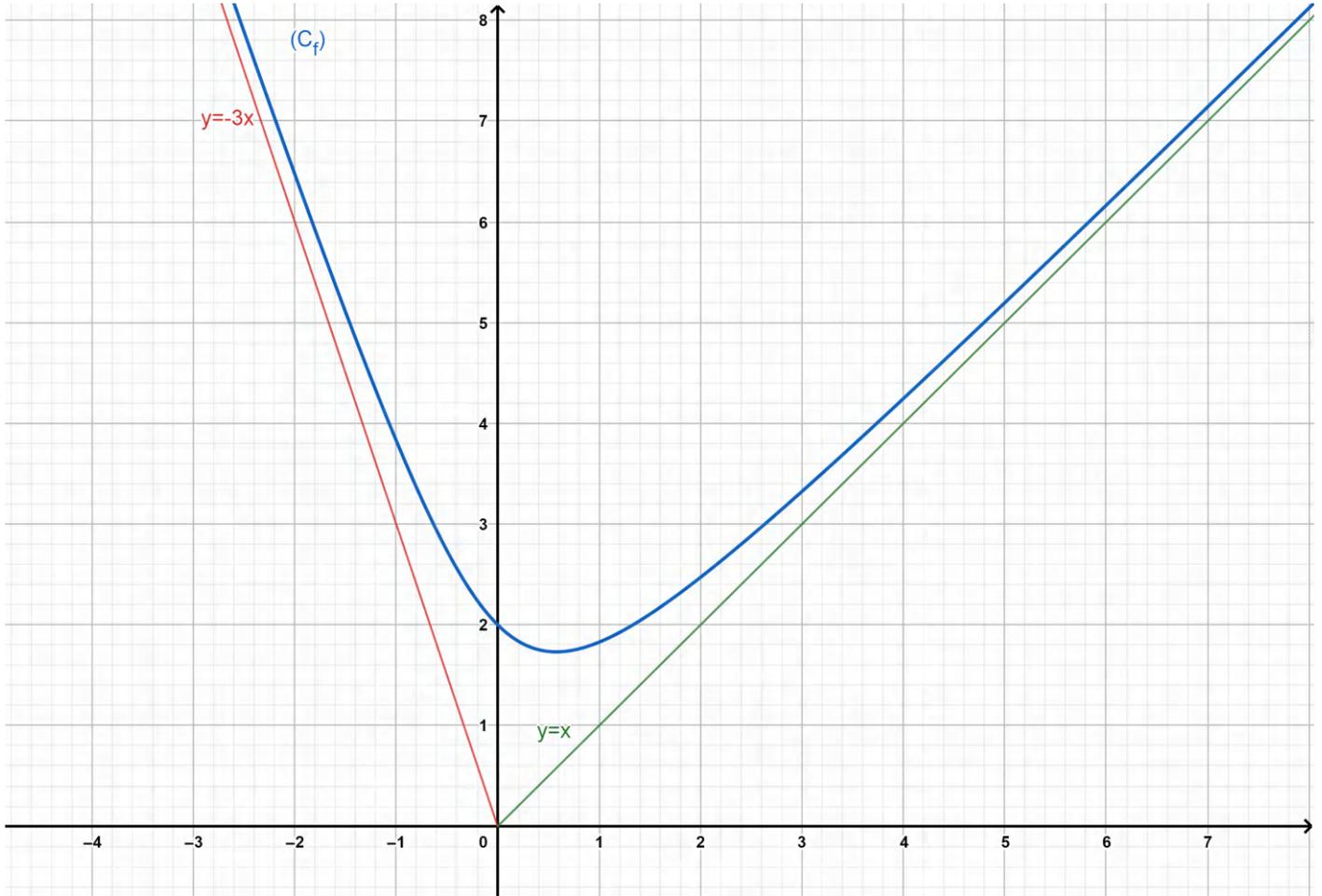
اذن: المنحني (C_f) فوق (d') .

(4) إنشاء المنحني (C_f) :

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

• نرسم المستقيمتين المقاربتين المائلتين: (d) و (d')

• ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



4

الدوال الأسية المسائل الشاملة

01

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = x - e^{-x}$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .(2) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$.ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.(2) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

ب/ عيّن دون حساب: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ فسر النتيجة هندسيا.(3) شكل جدول تغيرات الدالة f .(4) بين أن $x = f(x)$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$ ، ثم استنتج قيمة $f(\alpha)$.(5) مثل بيانيا (C_f) .(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال \mathbb{R} كما يلي:

$$h(x) = |f(x)|$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.(1) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.(2) انطلقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_h) .

02

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر f الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.(2) بيّن أنه من أجل كل x من \mathbb{R} فإن:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$$

(3) أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.ب/ عيّن $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f'''(x) - f''(x)$ - برر اجابتك.(4) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$.ب/ بيّن أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.(5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .(6) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.(7) بيّن أن النقطة $A(\ln 3; \ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .(8) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-2; -1[$ ، ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-2} .(9) مثل بيانيا كلا من: (Δ_1) ، (Δ_1) ،(10) ناقش بيانيا حسب القيم الوسيط الحقيقي غير المعدوم m المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = f(3x - 2)$$

(عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) تحقق من أن:

$$g\left(\frac{\alpha + 2}{3}\right) = 0$$

ثم بيّن أن:

$$g' \left(\frac{\alpha + 2}{3} \right) = 3f'(\alpha)$$

(3) استنتج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$.

(4) تحقق من أن معادلة المستقيم (d) تعطى بـ:

$$y = \frac{3\alpha^2}{4}x - \frac{\alpha^2(\alpha + 2)}{4}$$

03

المسألة الشاملة رقم:

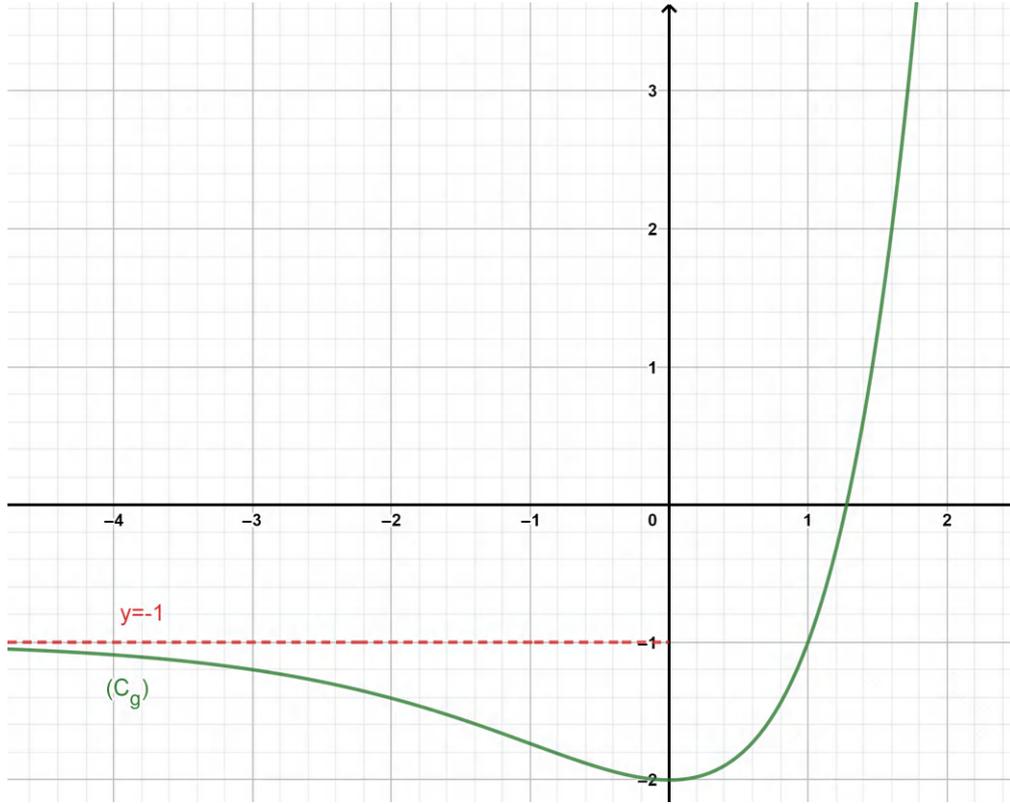
مشاهدة الحل



(I) a, b, c أعداد حقيقية، نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = (ax + b)e^x + c$$

ونسمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{i}; \vec{j})$. كما في الشكل أدناه:



(1) بقراءة بيانية، أوجد ما يلي:

أ/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)]$

ب/ $g(0)$ و $g'(0)$

(2) مما سبق أوجد a, b, c .

(3) نضع: $g(x) = (x - 1)e^x - 1$.

أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على \mathbb{R} ، ثم تحقق من أن: $1.2 < \alpha < 1.3$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

ونسَمي (C_f) تمثيلها البياني في المستو السابق.

(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$ ثم فسّر النتيجة هندسياً .

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$.

(2) أ/ بيّن أنه من أجل كل x حقيقي:

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) عيّن دون حساب:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$$

ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(4) بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماساً وحيداً (T) يمر من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.

(5) بيّن أن $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثم اوجد حصاراً لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

(6) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(7) مثل بيانياً المماس (T) والمستقيم (Δ) ثم المنحني (C_f) .

(8) m وسيط حقيقي. ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

04

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.(1) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$$

ب/ ادرس إشارة $f'(x)$ على \mathbb{R} ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .(2) برهن أنّ النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحنى (C_f) .(3) أ/ بيّن أنّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسياً.ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟(4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث:

$$-2.77 < \alpha < -2.76$$

(5) مثّل بيانياً (C_f) .(II) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = f(4x + 1)$$

(عبارة g غير مطلوبة).(1) ما هو اتجاه تغير الدالة g .

(2) تحقق من أنّ:

$$g\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 0$$

ثم بيّن أنّ:

$$g'\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$$

(3) استنتج معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha - 1}{4}$.

4) تحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ:

$$y = (1 + \alpha)^2 x - \frac{(1 + \alpha)(\alpha^2 - 1)}{4}$$

(III) نعتبر الدالة k المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$k(x) = f(|x|)$$

ونسمي (C_k) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أن الدالة k زوجية .

(2) أ/ بيّن كيف تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f) .

ب/ انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_k) .

(IV) نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تحقق من أنه كل x من \mathbb{R} : $h(x) = f(x) + 1$.

(2) أ/ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ب/ انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_h)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = x + 2 - e^x$$

- (1) ادرس تغيرات الدالة g .
 (2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$ و $-1.9 < \beta < -1.8$.
 (3) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$. ثم فسر ذلك هندسياً .

(2) بيّن أنه من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

(3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) عيّن دون حساب كل من : $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ و $\lim_{x \rightarrow \beta} \left[\frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \right]$

ثم فسر النتيجةن هندسياً .

(5) بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثم أوجد حصر لـ $f(\alpha)$ سعته 10^{-1} .

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$h(x) = e^x - xe^x - 1$$

- بيّن أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $h(x) \leq 0$.

(7) نضع من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$p(x) = (x^2 + 1)e^{2x} + xe^x - 2e^x + 1$$

- تحقق من أن: $p(0) = 0$.

(8) أ/ بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$.

ب/ اكتب معادلة للمماس (T) .

ج/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

(9) نأخذ: $f(\beta) \cong -1.195$.

مثّل بيانيا المستقيم (T) والمنحني (C_f) .

(10) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$e^x(1 - mx^2) + mx - 1 = 0$$

06

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$

- (1) ادرس تغيرات الدالة f' .
- (2) احسب $f'(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على \mathbb{R} .
- (3) ادرس تغيرات الدالة f .
- (4) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.
ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- (5) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثياتها.
ب/ بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث:
 $1.9 < \alpha < 2$ و $-0.6 < \beta < -0.5$.
- (6) مثل بيانياً: (Δ) ، (T) و المنحني (C_f) .
- (7) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي الموجب تماماً m التالية:
 $f(x) = 2x + \ln m \dots (E)$
- ناقش بيانياً حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

07

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي:

$$g(x) = (2x + 1)e^x - 1$$

(1) ادرس تغيرات الدالة g' :(2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .(II) f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = x(e^x - 1)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.(2) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .(3) أ/ بيّن أنه يوجد من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = (e^x - 1)g(x)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.(4) اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند المبدأ.(5) مثل بيانياً كلا من (T) ، (Δ) و (C_f) .(6) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x :

$$(E): f(x) = mx$$

نعرف الدالة f على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ/ بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$$

ب/ استنتج أن الدالة f فردية.

(2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(3) أ/ بين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$$

ثم ادرس إشارة $f'(x)$.

ب/ ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) أ/ بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x - 1 \right] = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1 \right]$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

(5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (d) ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

(6) مثل بيانياً (C_f) .

نعتبر الدالة f المعرفة \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بيّن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = +\infty$

(2) أ/ بيّن أن المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب/ حل المعادلة: $e^{x-2} - 4 = 0$ ، ثم بيّن أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال

$$]-\infty; 2 + \ln 4[\text{ وتحتة على المجال }]2 + \ln 4; +\infty[$$

(3) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

(4) احسب $f''(x)$ ، ثم بين أن $A(2; 2)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

(5) اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$.

(6) مثل بيانياً (Δ) والمنحني (C_f) .

10

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$g(x) = e^x + x + 2$$

- (1) ادرس تغيرات الدالة g على \mathbb{R} .
 (2) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في \mathbb{R} - ثم تحقق أن $-2.2 < \alpha < -2.1$
 ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
 (II) نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = \frac{1 - xe^x}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.(1) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.ب/ بيّن أنه من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f(x) = \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1}$$

ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$.(2) تحقق أنه من أجل كل x من \mathbb{R} :

$$f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

(3) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .(4) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) .ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) .(5) أ/ بيّن أن: $f(\alpha) = -(\alpha + 1)$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.ب/ بيّن أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.5 < \beta < 0.6$.(6) مثل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .(7) ليكن m عدد حقيقي موجب تماما، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$1 - (x + \ln x)e^x - \ln m = 0$$

11

المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن g دالة عددية معرفة على \mathbb{R} وتحقق العلاقة:

$$g(x) - 2g(1-x) = e^x - 2e^{1-x} - 3x + 3$$

(1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x . (ارشاد: ضع $t = x$ تارة و $t = 1-x$ تارة أخرى)(2) نضع: $g(x) = e^x - x - 1$ حيث: $D_g = \mathbb{R}$ أ/ احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.(3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على \mathbb{R} ب:

$$h(x) = 1 - g(-x)$$

(4) اثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث:

$$-1.14 < \alpha < -1.15 \quad \text{و} \quad 1.84 < \beta < 1.85$$

(5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .(II) لتكن f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} ب:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.(1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.(2) أ/ اثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} وأن:

$$f'(x) = \frac{e^x h(x)}{(1 + g(x))^2}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.(3) مثل بيانيا (C_f) .

لتكن الدالة f بـ:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

ونسُمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(2) أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)]$. ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = \frac{1}{e^{-x} + 1}$$

ج/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x]$. ثم فسر النتيجة هندسياً.

(3) اثبت أن الدالة f متزايدة تماماً على مجال تعريفها.

(4) بين أن النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

(5) عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة A .

(6) نعتبر الدالة g المعرفة على D_f كما يلي:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$

أ/ حل العبارة: $e^{2x} - 2e^x + 1$.

ب/ احسب $g'(x)$ و $g(0)$ ثم ادرس تغيرات الدالة g .

ج/ استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T) .

(7) مثل بيانياً (T) و (C_f) .

4

الدوال الأسية حُلول المسائل الشاملة

01

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^{-x} \left(\frac{x}{e^{-x}} - 1 \right) \right] = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - e^{-x}] = +\infty$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 + e^{-x}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) أ- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$:لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على \mathbb{R} ولدينا $g(0.6) = 0.05$ و $g(0.5) = -0.1$ ولدينا $g(0.6) \times g(0.5) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ب- استنتاج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1) حساب النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x+1}{e^x+1} \right] = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+1}{e^x+1} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right]$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0 \text{ لأن}$$

- التفسير الهندسي:

▪ (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$

(2) أ- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x + 1 - e^x(x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{-e^x(-e^{-x} + x)}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

ب- تعيين دون حساب قيمة $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$:

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] = f'(\alpha)$$

$$= \frac{-e^\alpha g(\alpha)}{(e^\alpha + 1)^2}$$

$$= 0$$

- تفسير الهندسي:

منحني الدالة f يقبل مماس في النقطة ذات الفاصلة α مواز لحامل محور الفواصل معادلته هي:

$$y = f(\alpha)$$

(3) جدول تغيرات الدالة f :

لدينا:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

لدينا المقام موجب تماما ومنه الإشارة من إشارة البسط

- جدول التغيرات:

لدينا $f(-1) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$-e^x$	-	-	-	-
$g(x)$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(\alpha)$	0

(4) تبين أن المعادلة $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$:

لتبين أن $f(x) = x$

يكفي أن نثبت أن: $f(x) - x = 0$

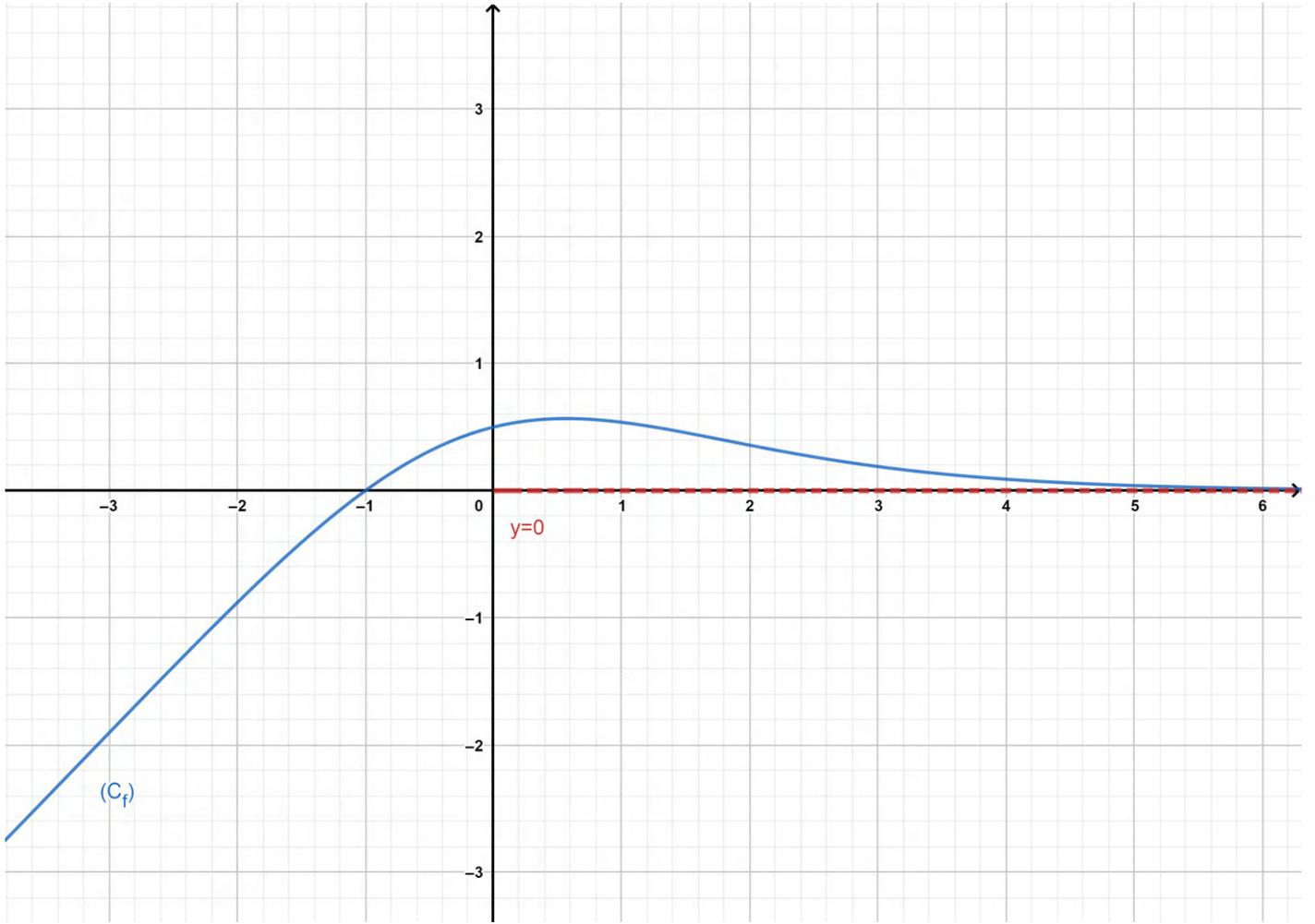
$$\begin{aligned}
 f(x) - x &= \frac{x+1}{e^x+1} - x \\
 &= \frac{x+1 - xe^x - x}{e^x+1} \\
 &= \frac{1 - xe^x}{e^x+1} \\
 &= \frac{e^x+1}{e^x(e^{-x}-x)} \\
 &= \frac{e^x+1}{-e^x(x-e^{-x})} \\
 &= \frac{-e^x g(x)}{e^x+1} \\
 &= \frac{0}{e^x+1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

استنتاج قيمة $f(\alpha)$:

ومنه $f(\alpha) = \alpha$

لدينا $f(x) = x$

(5) التمثيل البياني:



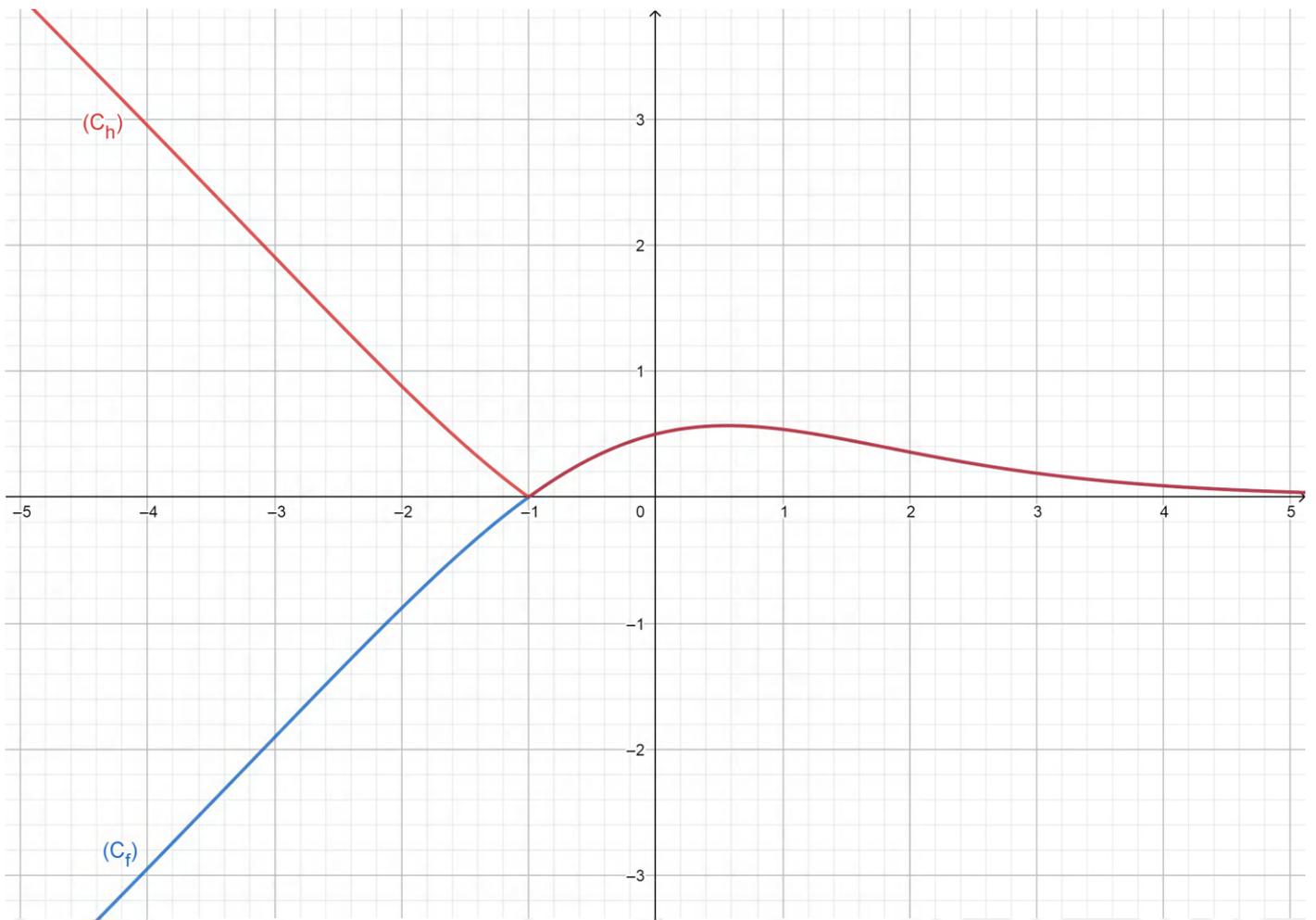
(III)

1) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= |f(x)| \\
 &= \left| \frac{x+1}{e^x+1} \right| \\
 &= \frac{|x+1|}{e^x+1} \\
 &= \begin{cases} \frac{x+1}{e^x+1}; & x \geq -1 \\ \frac{-x-1}{e^x+1}; & x \leq -1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f(x); & x \geq -1 \\ -f(x); & x \leq -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

2) تمثيل (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \geq 0$ وينظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$



02

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(1)

(1) حساب النهايات :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right] = -\infty$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xe^x - 2e^x + 3x + 6}{e^x + 3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x \left(x - 2 + \frac{3x + 6}{e^x} \right)}{e^x \left(1 + \frac{3}{e^x} \right)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x - 2 + \frac{3x + 6}{e^x}}{1 + \frac{3}{e^x}} \right] = +\infty \end{aligned}$$

(2) تبين أنه من أجل كل x من \mathbb{R} فإن : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{4e^x(e^x + 3) - e^x(4e^x)}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x + 3)^2 + 12e^x}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2} \\ &= \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2 \end{aligned}$$

(3) أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:لدينا $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

$$e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3$$

$$\Rightarrow x = \ln 3$$

ومنه $f'(x)$ تنعدم عند $\ln 3$ ولا تغير اشارتها

ومنه

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$

ب/ تعيين $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$:

عندما تنعدم المشتقة الاولى ولا تغير من اشارتها فإنه توجد نقطة انعطاف وعندها تنعدم المشتقة الثانية

$$f''(\ln 3) = 0$$

4 / تبين أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y_1 = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{4e^x}{e^x + 3} \right]$$

$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ_1) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$

ب/ تبين أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y_2 = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4 - \frac{4e^x}{e^x + 3} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{12}{e^x + 3} \right]$$

$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ_2) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

5 / دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) :

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_1) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_1]$ لدينا:

$$f(x) - y_1 = \frac{-4e^x}{e^x + 3}$$

لدينا المقام موجب ومنه الإشارة من إشارة $(-4e^x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y_1$	-	
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_2) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_2]$: لدينا:

$$f(x) - y_2 = 4 - \frac{4e^x}{e^x + 3} = \frac{12}{e^x + 3} > 0$$

ومنه

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - y$	+	
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	

(6) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$= \left(\frac{e^0 - 3}{e^0 + 3} \right)^2 (x) + 0 + 2 - \frac{4e^0}{e^0 + 3}$$

$$= \frac{1}{4}x + 1$$

(7) تبين أن النقطة $A(\ln 3; \ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

- نبين أن $(\ln 3 + x) \in D_f$ و $(\ln 3 - x) \in D_f$:

لدينا: $x \in D_f$ معناه $+\infty[; -\infty[$

ومنه $+\infty[; -\infty[\in (\ln 3 + x)$ و $+\infty[; -\infty[\in (\ln 3 - x)$

- نبين أن $f(\ln 3 + x) + f(\ln 3 - x) = 2 \ln 3$:

$$f(\ln 3 + x) + f(\ln 3 - x) = \left(\ln 3 + x + 2 - \frac{4e^{\ln 3 + x}}{e^{\ln 3 + x} + 3} \right) + \left(\ln 3 - x + 2 - \frac{4e^{\ln 3 - x}}{e^{\ln 3 - x} + 3} \right)$$

$$= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{4e^{\ln 3 + x}}{e^{\ln 3 + x} + 3} + \frac{4e^{\ln 3 - x}}{e^{\ln 3 - x} + 3} \right)$$

$$= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{12e^x}{3e^x + 3} + \frac{12e^{-x}}{3e^{-x} + 3} \right)$$

$$= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{4e^x}{e^x + 1} + \frac{4e^{-x}}{e^{-x} + 1} \right)$$

$$= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{4 + 4e^x + 4 + 4e^{-x}}{1 + e^x + e^{-x} + 1} \right)$$

$$= 2 \ln 3 + 4 - \left(\frac{8}{2}\right)$$

$$= 2 \ln 3$$

8) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على \mathbb{R}

ولدينا $f(-1) = 0.56$ و $f(-2) = -0.17$ ولدينا $f(-1) \times f(-2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $] -2; -1[$

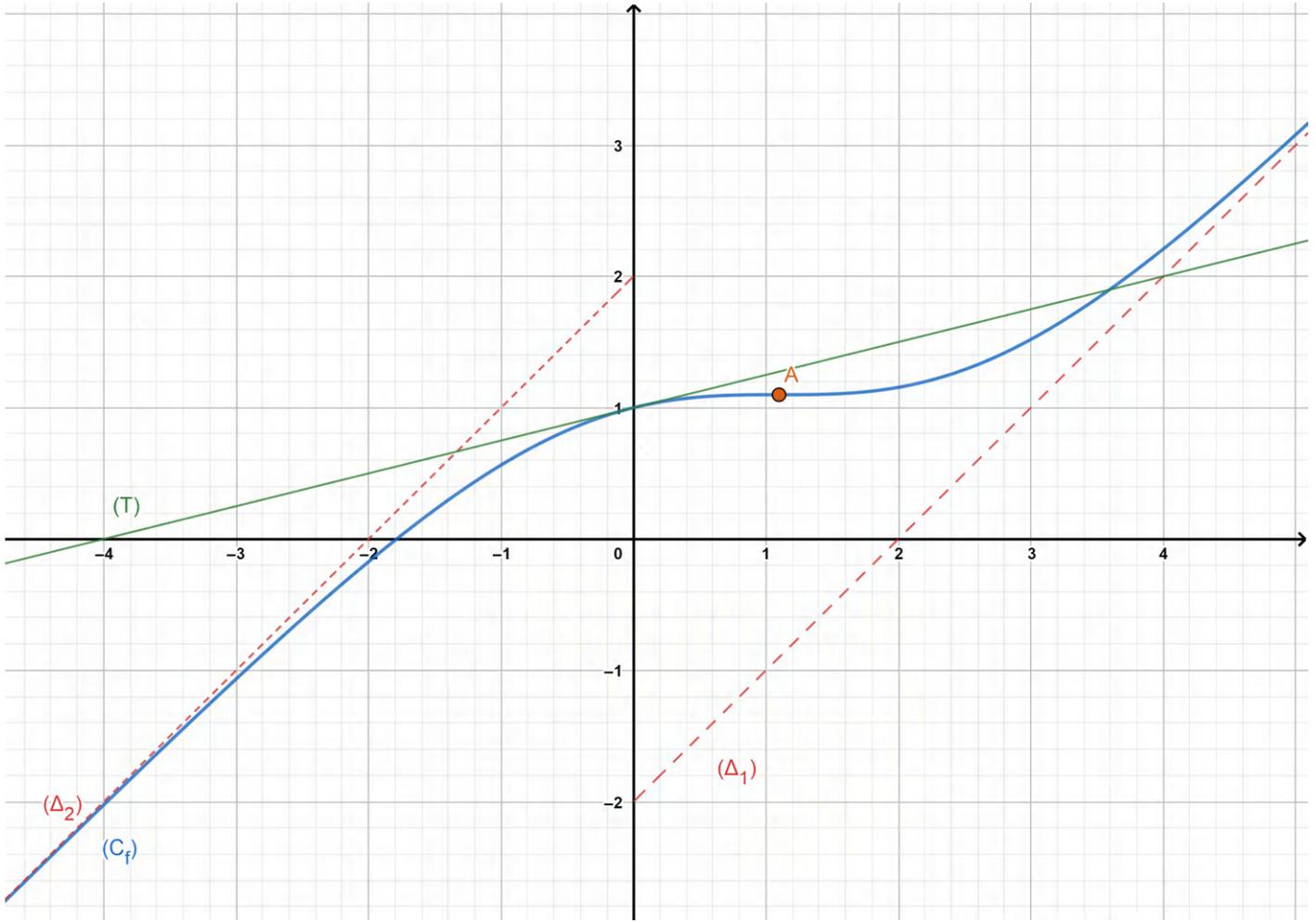
- حصر α :

α	-2	-1.9	-1.8	-1.7	...	-1
$f(\alpha)$	-0.17	-0.09	-0.09	0.07	...	0.56

9) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- **نرسم المستقيمتين المقاربة المائلة** : $y = x + 2$ و $y = x - 2$
- نعين نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)
- **نرسم المماس (T)**
- ثم باستعمال جدول التغيرات **نرسم (C_f)**



10) المناقشة البيانية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

$$h(x) = f(-|x|) \text{ نضع}$$

ومنه:

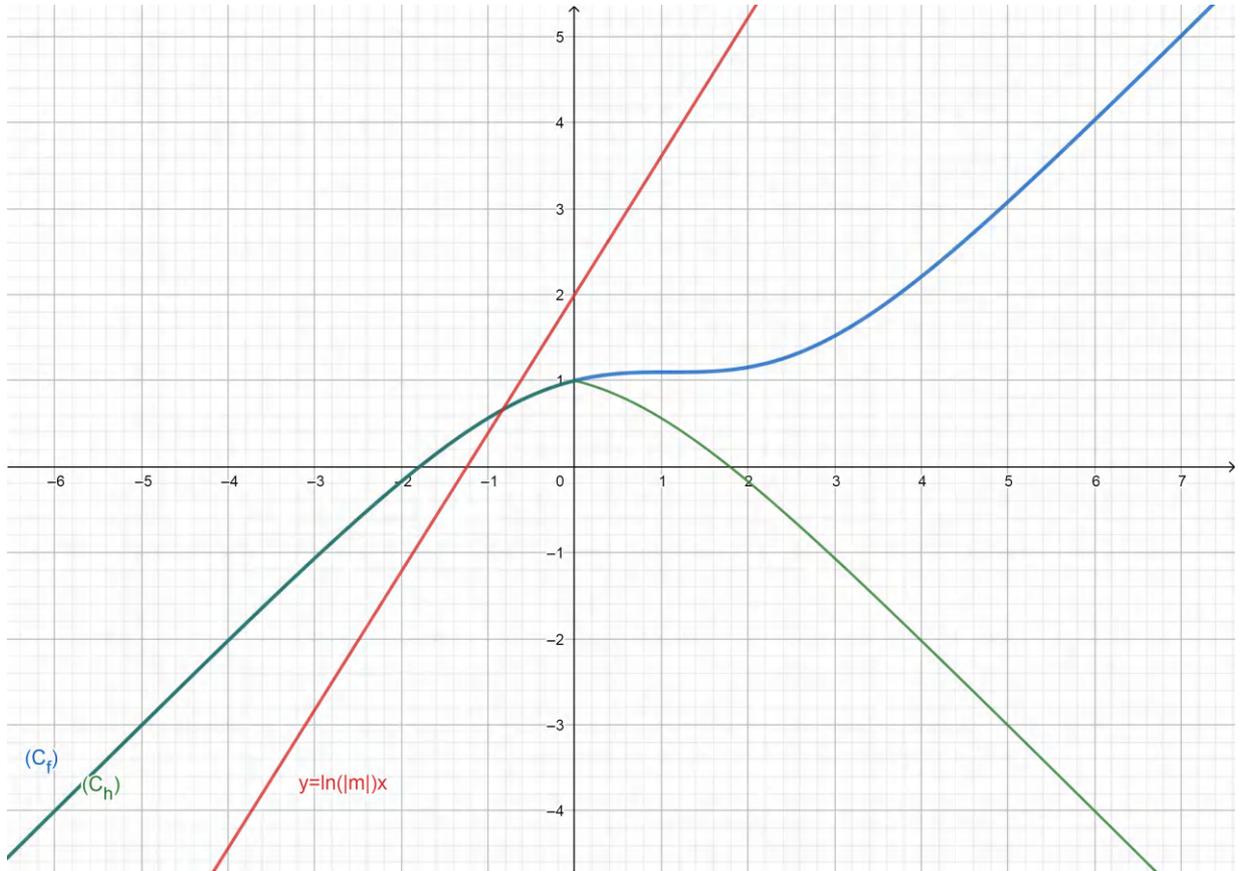
$$h(x) = \begin{cases} f(-x); & x \geq 0 \\ f(-(-x)); & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} f(-x); & x \geq 0 \\ f(x); & x \leq 0 \end{cases}$$

لما $x \leq 0$ المنحني (C_h) ينطبق على (C_f) .

لما $x \geq 0$ المنحني (C_h) يناظر المنحني العكسي لـ (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.

ومنه تمثيل (C_h) كالآتي:

المنحني (C_f) و المنحني (C_h) و المستقيم $y = \ln|m|x$



ومنه المناقشة كالآتي:

المعادلة تقبل حلا وحيدا لما: $\ln m > -1$ أي: $ m > e$ أي: $m \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[$	المعادلة تقبل حلا وحيدا لما: $\ln m < -1$ أي: $ m < e^{-1}$ أي: $-e^{-1} < m < e^{-1}$ أي: $m \in]-e^{-1}; e^{-1}[$	المعادلة لا تقبل حولا لما: $-1 \leq \ln m \leq 1$ أي: $\ln m \geq -1$ و $\ln m \leq 1$ أي: $ m \geq e^{-1}$ و $ m \leq e$ أي: $m \in]-e; e[$ و $m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[$ أي: $m \in \left(\begin{array}{c}]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[\\ \cap \\]-e; e[\end{array} \right)$ أي: $m \in]-e; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; e[$
---	---	---

لما: $1 < \ln|m| \leq e$: أي: $|m| \leq e$: أي: $-e \leq m \leq e$ أي لما: $m \in [-e; e]$ المعادلة لا تقبل حلول
لما: $\ln|m| > 1$: أي: $|m| > e$: أي: $m \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيدا

(II)

(1) دراسة تغيرات الدالة g .

نلاحظ أنّ $g(x) = (f \circ k)(x)$ حيث $k(x) = 3x - 2$

(2) التحقق من أن $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$:

$$g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = f\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = f(\alpha) = 0$$

- تبين أن $g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$:

لدينا: $g'(x) = 3f'(3x - 2)$ ومنه:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = 3f'(\alpha)$$

(3) استنتاج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$:

$$\begin{aligned} (d): y &= g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) \\ &= 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + 0 \\ &= 3f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha+2) \end{aligned}$$

(4) التحقق من معادلة المماس (d) :

لدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha + 2 - \frac{4e^\alpha}{e^\alpha + 3} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha + 2 = \frac{4e^\alpha}{e^\alpha + 3} \\ &\Rightarrow (\alpha + 2)(e^\alpha + 3) - 4e^\alpha = 0 \\ &\Rightarrow ae^\alpha + 3a + 2e^\alpha + 6 - 4e^\alpha = 0 \\ &\Rightarrow e^\alpha(a - 2) = -(3a + 6) \\ &\Rightarrow e^\alpha = \frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$(d): y = 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \left(\frac{e^\alpha - 3}{e^\alpha + 3} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\
&= 3 \left(\frac{\frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} - 3}{\frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} + 3} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\
&= 3 \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha + 2}{3} \right) \\
&= \frac{3\alpha^2}{4} x - \frac{\alpha^2(\alpha + 2)}{4}
\end{aligned}$$

03

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة المسألة



(I)

(1) من البيان نجد:

أ/

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -1$$

ب-

$$\bullet g'(0) = 0$$

$$\bullet g(0) = -2$$

(2) ايجاد a, b, c :

لدينا:

$$\begin{cases} g(0) = -2 \\ g'(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a(0) + b)e^0 + c = -2 \\ (a(0) + a + b)e^0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [(ax + b)e^x + c] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = -2 \\ a + b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

(3) / تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على \mathbb{R}

$$\text{ولدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x)] \times \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x)] < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .- التحقق من أن $1.2 < \alpha < 1.3$:

$$\text{لدينا: } g(1.3) = 0.1 \text{ و } g(1.2) = -0.3$$

$$\text{ولدينا: } g(1.3) \times g(1.2) < 0$$

ومنه: $1.2 < \alpha < 1.3$.ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

(1) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{x}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] = 0$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0$ (نهاية شهيرة)

- التفسير الهندسي: المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} \right]$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} \right] = -\infty$$

(2) أ/ تبين أنه من اجل كل x حقيقي: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x + 1 - x e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(1 - x)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-((x - 1)e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f(0) = 0$

ولدينا: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x + 1)^2} < 0$ ومنه إشارة المشتقة عكس إشارة $g(x)$.

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(\alpha)$	0

(3) تعيين $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$ دون حساب:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] = f'(\alpha) = \frac{-g(\alpha)}{(e^\alpha + 1)^2} = 0$$

- تفسير الهندسي:

المنحني (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة α مواز لحامل محور الفواصل.

4) تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

يوجد مماس يمر من $O(0; 0)$ معناه:

$$f'(a)(0 - a) + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow -af'(a)x + f(a) = 0$$

$$\Rightarrow a \frac{(a-1)e^a - 1}{(e^a + 1)^2} + \frac{a}{e^a + 1} = 0$$

$$\Rightarrow a(a-1)e^a - a + a(e^a + 1) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 e^a = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

ومنه معادلة المماس هي:

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = \frac{-g(0)}{(e^0 + 1)^2} x + \frac{0}{e^0 + 1}$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

5) تبين أن $f(\alpha) = \alpha - 1$:

مما سبق لدينا

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)e^\alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)e^\alpha = 1$$

$$\Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} \\ &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha - 1} + 1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 1)}{\alpha} \\ &= \alpha - 1 \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$1.2 < \alpha < 1.3$$

$$0.2 < \alpha - 1 < 0.3$$

$$0.2 < f(\alpha) < 0.3$$

(6) أ/ تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{e^x + 1} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-xe^x}{e^x + 1} \right] = 0 \end{aligned}$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [xe^x] = 0$ (نهاية شهيرة)

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق: $[f(x) - y]$:

$$\begin{aligned} f(x) - y &= \frac{x}{e^x + 1} - x \\ &= \frac{x - xe^x - x}{e^x + 1} \\ &= \frac{-xe^x}{e^x + 1} \end{aligned}$$

لدينا $(e^x + 1) > 0$ و $e^x > 0$ ومنه الإشارة من إشارة $(-x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-

الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) في المجال: $] - \infty; 0[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0
- (C_f) تحت (Δ) في المجال: $]0; +\infty[$

(7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب $y = 0$ و المستقيم المقارب المائل (Δ)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)