النهايات الشهيرة

الدوال الأسية واللوغارتمية

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^n e^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}x e^x=0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x^n\ln x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to0^+}x(\ln x)=0$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to0^+}(\ln x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha}=0$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

النهايات

نهايات الدوال $x \mapsto x^n \, (n \in \mathbb{N}^*)$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ و مقلوباتها:

$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

إذا كان n عددا زوجيا فإن:	إذا كان n عددا فرديا فإن:
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

نهاية حدودية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة	نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

نهايات الدوال المثلثية:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

نهايات الدوال من النوع: $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{u(x)}$
$\ell \geq 0$	$\sqrt{\ell}$
$+\infty$	$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

النهايات و الترتيب:

$\left.\begin{array}{l} u(x)\le f(x)\le V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\ell \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=\ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$	$\left.\begin{array}{l} \lvert f(x)-\ell\rvert\le V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$
$\left.\begin{array}{l} u(x)\le V(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} V(x)=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$	$\left.\begin{array}{l} u(x)\le f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

العمليات على النهايات:

نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)]$	$\ell+\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م

نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\times g(x)]$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م

نهاية خارج دالتين:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell<0$		$\ell>0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م	ش غ م

ملاحظة عامة

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الدوال اللوغارتمية

الدالة اللوغارتم النبري:

تعريف:

دالة اللوغارتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1

ويرمز لها بالرمز: $\ln$

استنتاجات وخاصيات:

$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r \ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$		
$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln x^n = n \ln |x|$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي	مجموعة تعريفها
$f(x) = \ln x$	$D_f =]0;+\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) > 0\}$

النهايات:

نهايات أساسية:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

استنتاجات:

$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

الاتصال:

الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$

إذا كانت u موجبة قطعا و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ متصلة على المجال I

الاشتقاق

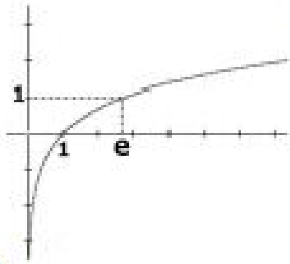
الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ولدينا: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad \forall x \in]0;+\infty[$

إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا: $(\ln[u(x)])' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \quad \forall x \in I$

التمثيل المباني:



إشارة $\ln$:

x	0 1 $+\infty$	
$\ln x$	-	+

الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

تعريف:

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز: $\log_a$

حيث: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} \quad \forall x \in]0;+\infty[$

حالة خاصة: الدالة ℓog_{10} تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها كذلك بالرمز: ℓog

استنتاجات و خاصيات:

$\ell og_a 1 = 0$

$\ell og_a a = 1$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$

$\ell og_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$

$\ell og_a xy = \ell og_a x + \ell og_a y$

$(r \in \mathbb{Q}) \ \ell og_a x^r = r\ell og_a x$

$\ell og_a \dfrac{1}{x} = -\ell og_a x$

$\ell og_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \ell og_a x - \ell og_a y$

نهايات و متراجحات:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x > y$	$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x < y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = +\infty$

المشتقة:

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad (\ell og_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

الاتصال

الاتصال في نقطة:

- تعريف

$$f \text{ متصلة في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- الاتصال على اليمين – الاتصال على اليسار:

$f \text{ متصلة على يمين } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$ $f \text{ متصلة على يسار } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$
f متصلة على يمين و على يسار x_0 $\Leftrightarrow$ f متصلة في x_0

الاتصال على مجال:

تكون f متصلة على مجال مفتوح $]a,b[$ إذا كانت f متصلة في كل نقطة من المجال $]a,b[$
تكون f متصلة على مجال مغلق $[a,b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح $]a,b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b

العمليات على الدوال المتصلة:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي • الدوال $f+g$, $f \times g$, kf متصلة على المجال I • إذا كانت g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتين على المجال I

نتائج:

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

اتصال مركب دالتين:

إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$ فإن: $g \circ f$ متصلة على المجال I

صورة مجال بدالة متصلة:

• صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة • صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

- حالات خاصة: لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I

الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

المجال I	المجال $f(I)$	
	f تزايدية قطعا على I	f تناقصية قطعا على I
$[a,b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

مبرهنة القيم الوسيطية:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$
يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[a,b]$ بحيث: $f(\alpha)=\beta$

نتيجة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$
فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$

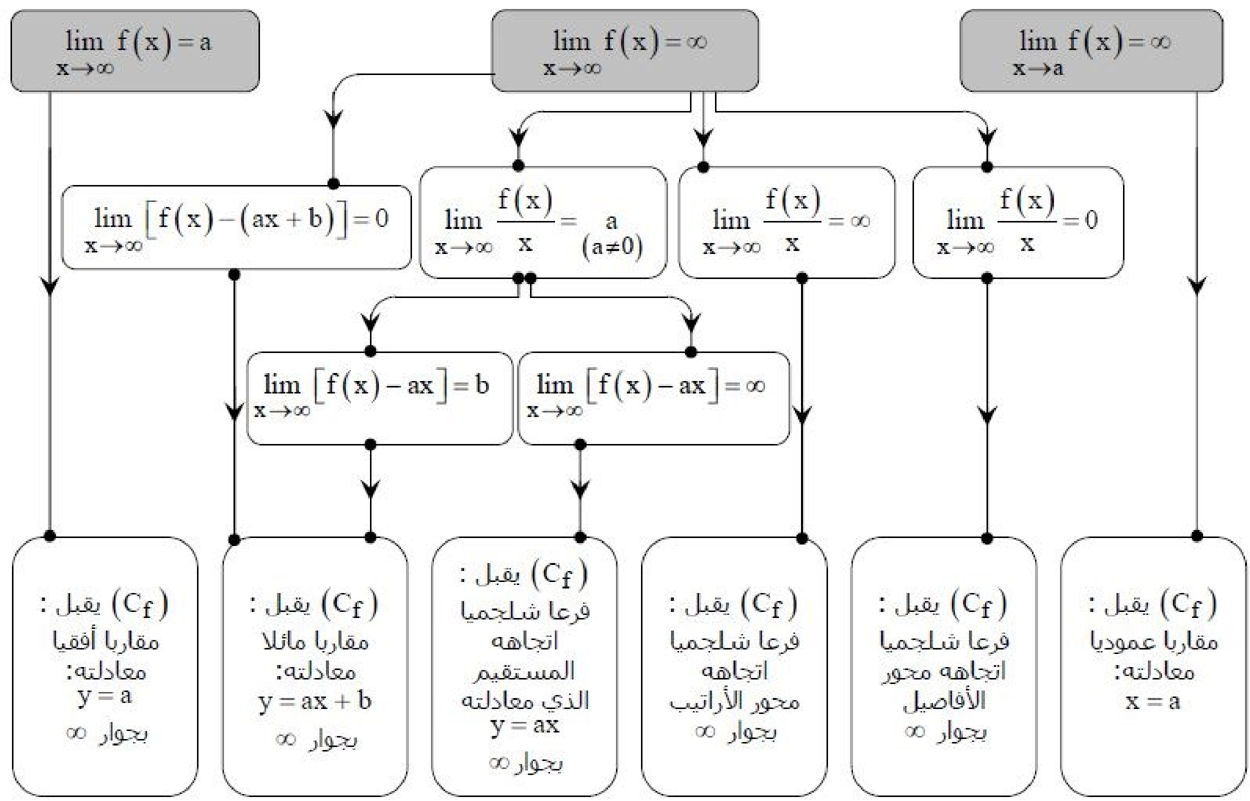
طريقة التفرع الثنائي:

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال $[a,b]$ بحيث: $f(a)\times f(b)<0$
وليكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$

إذا كان: $f(a)\times f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$	إذا كان: $f(b)\times f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$
فإن: $a<\alpha<\dfrac{a+b}{2}$ و هذا التأطير سعته $\dfrac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a;\dfrac{a+b}{2}\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α	فإن: $\dfrac{a+b}{2}<\alpha<b$ و هذا التأطير سعته $\dfrac{b-a}{2}$ يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\dfrac{a+b}{2};b\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α

ملاحظة: وهكذا دواليك يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأطير للعدد α سعته مرغوب فيها

الفروع اللانهائية



الأعداد العقدية

مجموعة الأعداد العقدية هي: $\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } i^2 = -1 \right\}$

الكتابة الجبرية لعدد عقدي:

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

- $a + ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له بالرمز: $\mathrm{Re}(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z و يرمز له بالرمز: $\mathrm{Im}(z)$

حالتان خاصتان: إذا كان: $\mathrm{Im}(z) = 0$ فإن z هو عدد حقيقي

إذا كان: $\mathrm{Re}(z) = 0$ فإن z يسمى عددا تخيليا صرفا

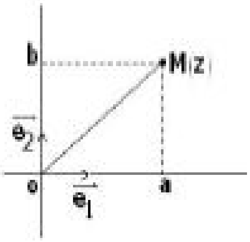
تساوي عددين عقديين:

ليكن z و z' عددين عقديين

$$z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ و } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$$

التمثيل المباني لعدد عقدي:

ليكن المستوى العقدي منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

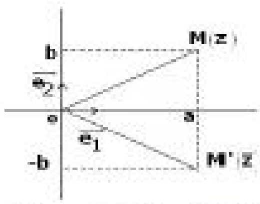


ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a,b)$

- العدد z يسمى لحق النقطة M و النقطة M تسمى صورة العدد z و نكتب: $M(z)$
- العدد z يسمى كذلك لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ و نكتب: $\overrightarrow{OM}(z)$ أو $z = \mathrm{Aff}(\overrightarrow{OM})$

مرافق عدد عقدي:



ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

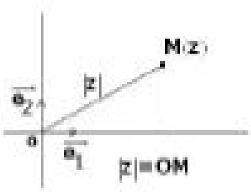
مرافق العدد z هو العدد العقدي: $\overline{z} = a - ib$

$M(z)$ و $M'(\overline{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad (z' \neq 0)$

- z عدد حقيقي $\Leftrightarrow \overline{z} = z$
- z عدد تخيلي صرف $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $z\overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

معيار عدد عقدي:



ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب: $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\|z^n\| = \|z\|^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\|z \times z'\| = \|z\| \times \|z'\|$
$\|-z\| = \|z\|$	$\|\overline{z}\| = \|z\|$
$\left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|} \quad (z' \neq 0)$	$\left\|\frac{1}{z'}\right\| = \frac{1}{\|z'\|}$

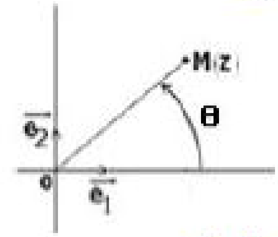
الشكل المثلثي و الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم صورته M

عمدة العدد العقدي z هو θ أحد قياسات الزاوية الموجهة: $(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}})$

و نرمز له بالرمز: $\arg z$

ونكتب: $\arg z = \theta [2\pi]$



ليكن z عددا عقديا غير منعدم

نضع $r = |z|$ و $\arg z = \theta [2\pi]$

- الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$
- الكتابة الأسية للعدد العقدي z هي: $z = re^{i\theta}$

حالات خاصة:

الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

$a > 0$	$a < 0$
$a = [a, 0]$	$a = [-a, \pi]$
$ai = \left[a, +\frac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[-a, -\frac{\pi}{2}\right]$

- $\arg(zz') = (\arg z + \arg z')[2\pi]$
- $\arg \overline{z} = -\arg z [2\pi]$
- $-\arg z = (\pi + \arg z)[2\pi]$
- $\arg z^n = n \arg z \ [2\pi]$
- $\arg \frac{1}{z} = -\arg z \ [2\pi]$
- $\arg \frac{z}{z'} = (\arg z - \arg z') \ [2\pi]$

- $[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$
- $\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$
- $-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$
- $[r, \theta]^n = [r^n; n\theta]$
- $\frac{1}{[r'; \theta']} = \left[\frac{1}{r'}; -\theta'\right]$
- $\frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$

- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
- $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
- $\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$
- $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$

- $\arg z = k\pi \Leftrightarrow z$ عدد حقيقي
- $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow z$ عدد تخيلي صرف $\quad (k \in \mathbb{Z})$

صيغة موافر:

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\cos\theta + i\sin n\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

صيغتا أولير:

$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

و $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

حل المعادلة $z^2 = a$ حيث $z \in \mathbb{C}$ $(a \in \mathbb{R})$:

المعادلة		مجموعة حلول المعادلة
$z^2 = a \quad z \in \mathbb{C}$	$a > 0$	$S = \{-i\sqrt{a}; i\sqrt{a}\}$
	$a = 0$	$S = \{0\}$
	$a < 0$	$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

حل المعادلة: $az^2+bz+c=0$ حيث: $z\in\mathbb{C}$ و a و b و c أعداد حقيقية $(a\neq 0)$

مجموعة حلول المعادلة:		المعادلة:
$S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$	$\Delta>0$	$z\in\mathbb{C}\quad az^2+bz+c=0$ $\left(\Delta=b^2-4ac\right)$
$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$	$\Delta=0$	
$S=\left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$	$\Delta<0$	

مفاهيم هندسية و مصطلحات الأعداد العقدية:

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$	المسافة AB
$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$	I منتصف القطعة $[A;B]$
$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$	قياس الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$
$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$	A و B و C نقط مستقيمية
$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\in\mathbb{R}$ أو $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\frac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\in\mathbb{R}$	A و B و C و D نقط متداورة

المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية
• $AM=r$ • M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها r	$\lvert z-z_A\rvert=r$ $(r>0)$
• $AM=BM$ • M تنتمي إلى واسط $[AB]$	$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$
ABC مثلث قائم الزاوية في A	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\frac{\pi}{2}\right]$
ABC مثلث متساوي الساقين في A	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1;\theta]$
ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{2}\right]$
ABC مثلث متساوي الأضلاع	$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$

تمثلات عقدية لبعض التحويلات الاعتيادية:

التمثيل العقدي:	التحويل:
$z'=z+b$ حيث: b لحق المتجهة $\vec{u}$	**الإزاحة:** $t_{\vec{u}}$
$z'-\omega=k(z-\omega)$ حيث: ω لحق النقطة Ω	**التحاكي:** $h(\Omega;k)$
$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ حيث: ω لحق النقطة Ω	**الدوران:** $r(\Omega;\theta)$

التعداد

رئيسي مجموعة:

تعريف:

رئيسي مجموعة منتهية E هو عدد عناصر المجموعة E ويرمز له بالرمز: $CardE$

حالة خاصة: $Card\varnothing = 0$

خاصية:

A و B مجموعتان منتهيتان

$$Card(A \cup B) = CardA + CardB - Card(A \cap B)$$

متمم مجموعة:

تعريف:

ليكن A جزءا من مجموعة منتهية E

متمم A بالنسبة للمجموعة E هي المجموعة التي يرمز لها بالرمز: $\overline{A}$

حيث $\overline{A} = \{x \in E / x \notin A\}$

ملاحظات:

- $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- $A \cup \overline{A} = E$
- $card\overline{A} = cardE - cardA$

المبدأ الأساسي للتعداد:

نعتبر تجربة تتطلب نتائجها p اختيارا $(p \in \mathbb{N}^*)$

إذا كان الاختيار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفة

و كان الاختيار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفة

....

و كان الاختيار p يتم ب n_p كيفية مختلفة

فإن عدد النتائج الممكنة هو الجداء : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_p$

الترتيبات بتكرار- الترتيبات بدون بتكرار:

الترتيبات بتكرار:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$

عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو: n^p

- الترتيبات بدون تكرار:

• خاصية:

ليكن n و p عنصرين من $\mathbb{N}^*$ $(p \leq n)$

عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو:

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ من العوامل}}$$

• حالة خاصة:

كل ترتيبة بدون تكرار ل n عنصر من بين n عنصر تسمى كذلك تبديلة ل n عنصر

و عددها : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

التأليفات:

لتكن E مجموعة منتهية عدد عناصرها n

كل جزء A من E عدد عناصره p $(p \leq n)$

يسمى تأليفة ل p عنصر من بين n عنصر

و عدد هذه التأليفات هو : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

الأعداد: $n!$ و A_n^p و C_n^p:

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ $0! = 1$	$n \in \mathbb{N}^*$
$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
$C_n^n = 1$	$C_n^1 = n$
$C_n^0 = 1$	$C_n^{n-1} = n$
$C_n^p = C_n^{n-p}$	$C_n^{p-1} + C_n^p = C_{n+1}^p$

عدد إمكانيات ترتيب n عنصر:

إذا كان لدينا n عنصر من بينها

n_1 عنصر من النوع A $(n_1 + n_2 + n_3 = n)$

و n_2 عنصر من النوع B

و n_3 عنصر من النوع C

فإن إمكانيات ترتيب هذه العناصر هو : $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3!}$

بعض أنواع السحب:

نسحب p عنصر من بين n عنصر $(p \leq n)$ و نلخص النتائج في الجدول التالي:

نوع السحب	عدد السحبات الممكنة هو:	الترتيب
آني	C_n^p	غير مهم
بالتتابع و بإحلال	n^p	مهم
بالتتابع و بدون إحلال	A_n^p	مهم

الاشتقاق

قابلية الاشتقاق في عدد:

نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق في العدد x_0 إذا كانت النهاية: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ويرمز له بالرمز: $f'(x_0)$

معادل المماس لمنحنى دالة- الدالة التآلفية المماسة لمنحنى دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0

- معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 هي: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
- الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $u(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تسمى الدالة التآلفية المماسة لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 و هي تقريب للدالة f بجوار x_0

قابلية الاشتقاق على اليمين- قابلية الاشتقاق على اليمين :

- نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على يمين x_0 و يرمز له بالرمز: $f'_d(x_0)$

- نقول إن دالة f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كانت النهاية: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ منتهية

هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة f على يسار x_0 و يرمز له بالرمز: $f'_g(x_0)$

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في x_0 و $f'_g(x_0)=f'_d(x_0)$

الاشتقاق و الاتصال:

إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في عدد x_0 فإن f تكون متصلة في x_0

جدول مشتقات بعض الدوال الاعتيادية:

	$f(x)$	$f'(x)$
$(k\in\mathbb{R})$	k	0
	x	1
	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$(r\in\mathbb{Q}^*-\{1\})$	x^r	rx^{r-1}
	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

العمليات على الدوال المشتقة:

$(u+v)'=u'+v'$	$(u-v)'=u'-v'$	$(k\in\mathbb{R})\quad (ku)'=k(u)'$
$(uv)'=u'v+uv'$		$\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$
$\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}$		$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

مشتقة مركب دالتين- مشتقة دالة الجذر:

$(u\circ v)'=[u'\circ v]\times v'$	$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

الاشتقاق و تغيرات دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- $\forall x\in I \quad f'(x)\geq 0$ ⇔ f تزايدية على المجال I
- $\forall x\in I \quad f'(x)\leq 0$ ⇔ f تناقصية على المجال I
- $\forall x\in I \quad f'(x)=0$ ⇔ f ثابتة على المجال I

الاشتقاق و التأويل الهندسي:

النهاية	استنتاج	التأويل الهندسي المنحنى(Cf) يقبل:
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a\quad(a\neq 0)$	f قابلة للاشتقاق في x_0	مماسا في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامله الموجه هو a
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$		مماسا أفقيا في النقطة $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a\quad(a\neq 0)$	f قابلة للاشتقاق على يمين x_0	نصف مماس على اليمين في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ ؛ معامل الموجه لحامله هو a
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$		نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل
$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$		نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a\quad(a\neq 0)$	f قابلة للاشتقاق على يسار x_0	نصف مماس على اليسار في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ ؛ معامل الموجه لحامله هو a
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$		نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $A(x_0;f(x_0))$
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$		نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موجه نحو الأسفل

المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية	الحل العام للمعادلة التفاضلية
$y' = ay + b$ $(a \neq 0)$	$y(x) = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$ $(a \in \mathbb{R})$

المعادلة التفاضلية	معادلتها المميزة	المعادلة المميزة تقبل :		الحل العام للمعادلة التفاضلية
$y'' + ay' + by = 0$	$r^2 + ar + b = 0$ $(\Delta = a^2 - 4b)$	$\Delta > 0$	حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta = 0$	حلا حقيقيا وحيدا r	$y(x) = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
		$\Delta < 0$	حلين عقديين مترافقين: $r_1 = p - iq$ و $r_2 = p + iq$	$y(x) = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$ حيث: $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

الهندسة الفضائية

في سياق هذا الملخص ليكن الفضاء منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

⬅الصفة التحليلية ل: الجداء السلمي- منظم متجهة- الجداء المتجهي:

لتكن $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ متجهتين من ϑ_3

- $\vec{u}.\vec{v} = aa'+bb'+cc'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & a & a' \\ \vec{j} & b & b' \\ \vec{k} & c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$

⬅المسافة:

المسافة بين نقطتين A و B هي:

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

المسافة بين نقطة M و مستوى (P) معادلته الديكارتية: $ax+by+cz+d=0$ هي:

$$d(M,(P)) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

المسافة بين نقطة M و مستقيم $\Delta(A,\vec{u})$ هي:

$$d(A,(\Delta)) = \frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

⬅معادلة مستوى:

$(P): ax+by+cz+d=0 \Leftrightarrow \vec{n}(a,b,c)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

إذا كانت A وB وC نقط غير مستقيمة فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

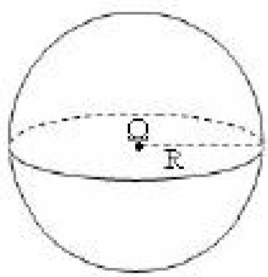
و في هذه الحالة يمكن تحديد معادلة المستوى (ABC) بالاستعانة بالتكافؤ التالي :

$$M\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}) = 0$$

⬅معادلة فلكة:

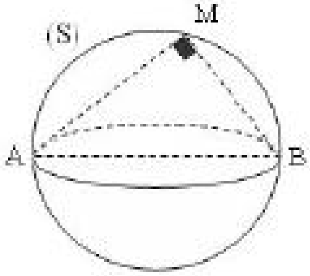
معادلة فلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ و شعاعها R هي:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$$



معادلة فلكة (S) أحد أقطارها $[AB]$ يمكن تحديدها

بالاستعانة بالتكافؤ التالي: $M \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

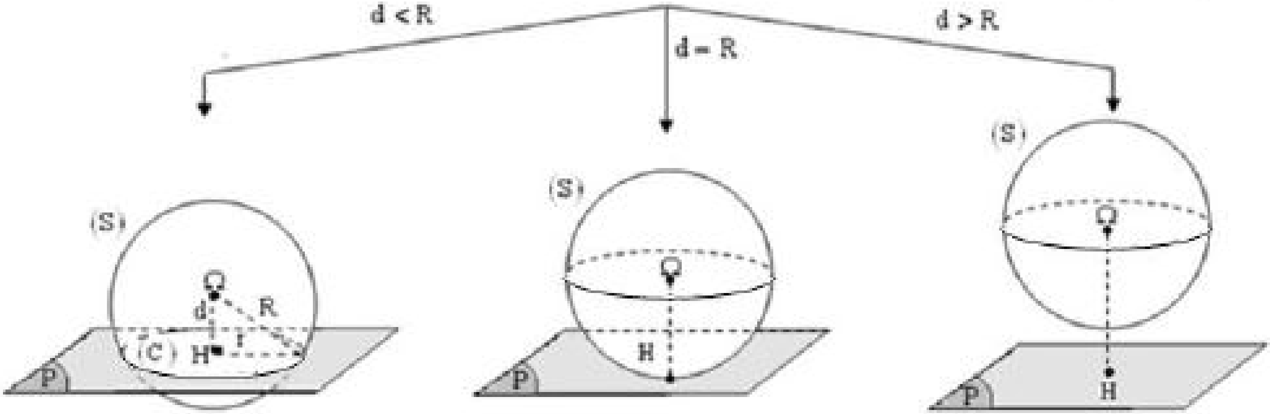


ملاحظة: الفلكة (S) مركزها Ω منتصف $[AB]$ و شعاعها $\frac{AB}{2}$

➥ تقاطع فلكة $S(\Omega,R)$ و مستوى $(P): ax + by + cz + d = 0$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)

نضع: $d = \Omega H = d(\Omega;(P))$



المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S)

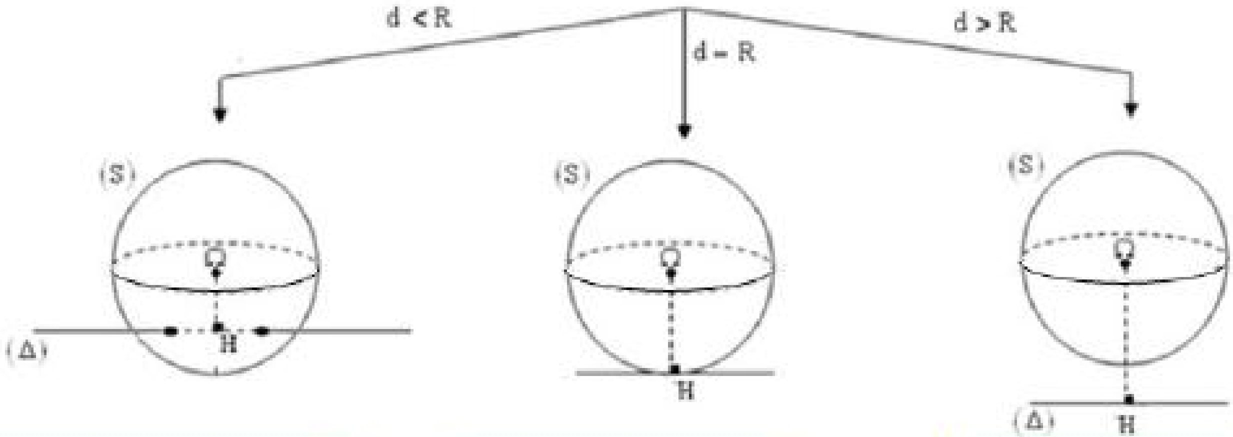
المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H

المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) مركزها: H شعاعها: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

➥ تقاطع فلكة $S(\Omega,R)$ و مستقيم (Δ):

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (Δ)

نضع: $d = \Omega H = d(\Omega;(\Delta))$



المستوى (P) و الفلكة (S) لا يتقاطعان

المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة H

المستقيم (Δ) يخترق الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين