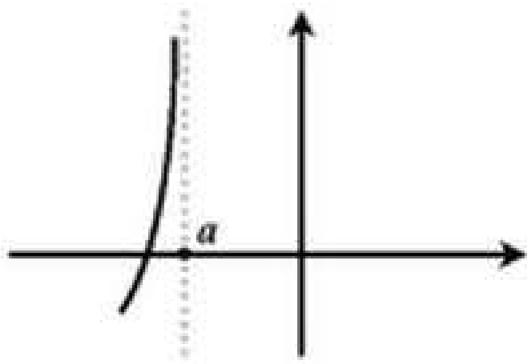
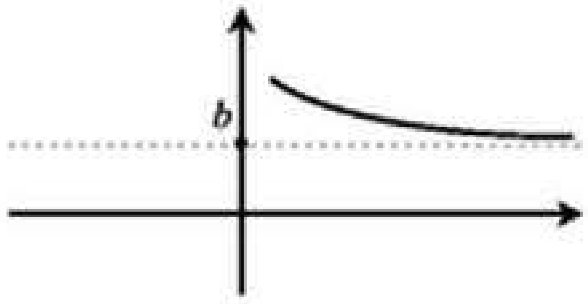
إعداد: عبد المطلب

دراسة الفروع اللانهائية

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (المنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا يوازي $(O ، \vec{j})$ معادلته $x = a$)



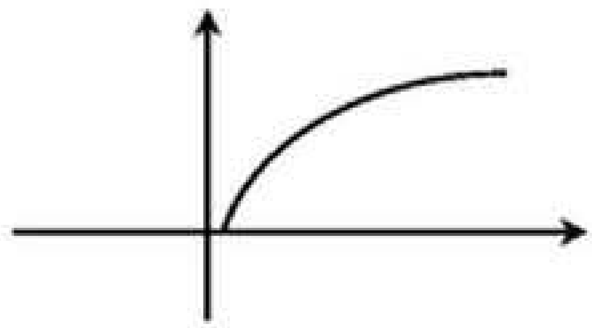
$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ (المنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا يوازي $(O ، \vec{i})$ معادلته $y = b$)



$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (يُحتمل أن يقبل المنحني $(\mathscr{C})$ مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = a x + b$ ، لذلك نحسب $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$)

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

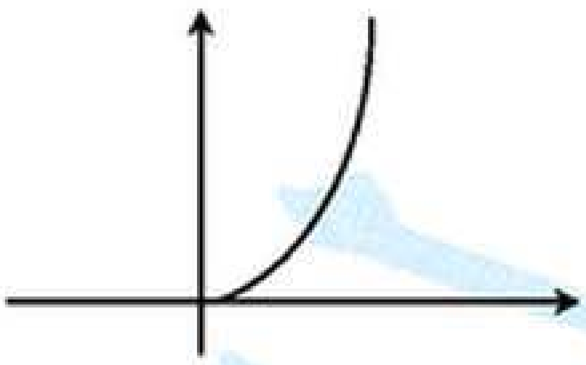
فرع قطع مكافئ باتجاه $(o ، \vec{i})$



$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

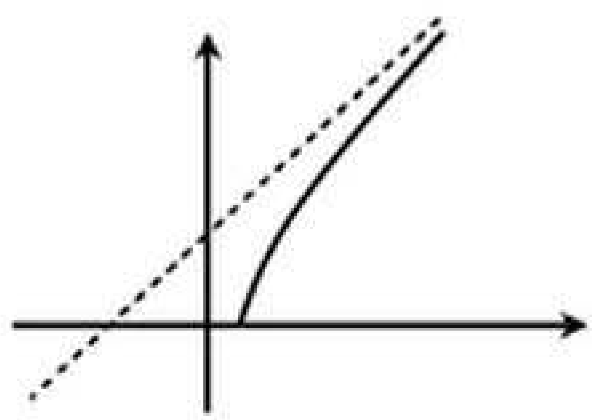
فرع قطع مكافئ باتجاه $(o ، \vec{j})$



نحسب $\lim_{x \to \infty} [f(x) - a x]$

$\lim_{x \to \infty} [f(x) - a x] = b$

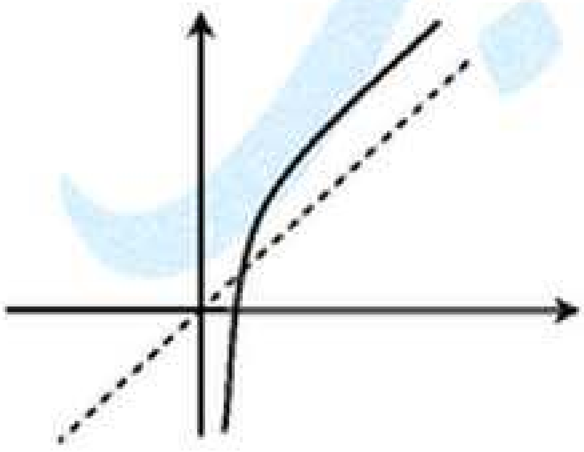
مستقيم مقارب مائل معادلته $y = a x + b$



$\lim_{x \to \infty} [f(x) - a x - b] = 0$ مستقيم مقارب مائل $y = a x + b$

$\lim_{x \to \infty} [f(x) - a x] = \infty$

فرع قطع مكافئ باتجاه $y = a x$



الدالة الأسية

تعريف:

الدالة الوحيدة f حيث $f'=f$ و $f(0)=1$ هي: $\boxed{f(x)=e^x}$ حيث $e\approx 2,718$

خواص: x و y عددان حقيقيان و n عدد صحيح:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} e^{x+y}=e^x.e^y & e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y} & e^{nx}=\left(e^x\right)^n \\ e^0=1 & e^{-1}=\dfrac{1}{e} & e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}>0 \end{array}}$$

$\boxed{e^x=a \text{ يكافئ } x=\ln a \ (a>0) \text{ و } e^{\ln a}=a}$ (ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبري)

مثال: $e^{-\ln 2}=\dfrac{1}{e^{\ln 2}}=\dfrac{1}{2}$ و $e^{3\ln 2}=\left(e^{\ln 2}\right)^3=8$

المشتق:

$\boxed{\left[e^{u(x)}\right]'=u'(x).e^{u(x)}}$ مثال: $\left(e^{2x}\right)'=2e^{2x}$

النهايات:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty & \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+ & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty \text{ و } & \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0^- & \text{(التزايد المقارن)} \end{array}}$$

كذلك: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x=0$ $\quad (\alpha>0)$

الدالة اللوغاريتمية

تعريف: الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة $\dfrac{1}{x}$ حيث $f(1)=0$

هي: $\boxed{f(x)=\ln x}$ $\quad$ $\boxed{\ln x=y \text{ يكافئ } x=e^y \ (x>0) \text{ و } y \text{ عدد حقيقي}}$

إشارة $\ln x$: • $\ln x>0$ إذا كان $x>1$ • $\ln x<0$ إذا كان $0<x<1$

• $\ln x=0$ إذا كان $x=1$ $(\ln 1=0)$ $\quad$ $\ln x=1$ إذا كان $x=e$ $(\ln e=1)$

خواص: a و b عددان حقيقيان موجبان تماما، n عدد ناطق: $\boxed{\ln a=\ln b \text{ يكافئ } a=b}$

$$\boxed{\ln(a\times b)=\ln a+\ln b \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b \qquad \ln a^n=n\ln a}$$

نتائج: $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$ و $\ln\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\ln a$

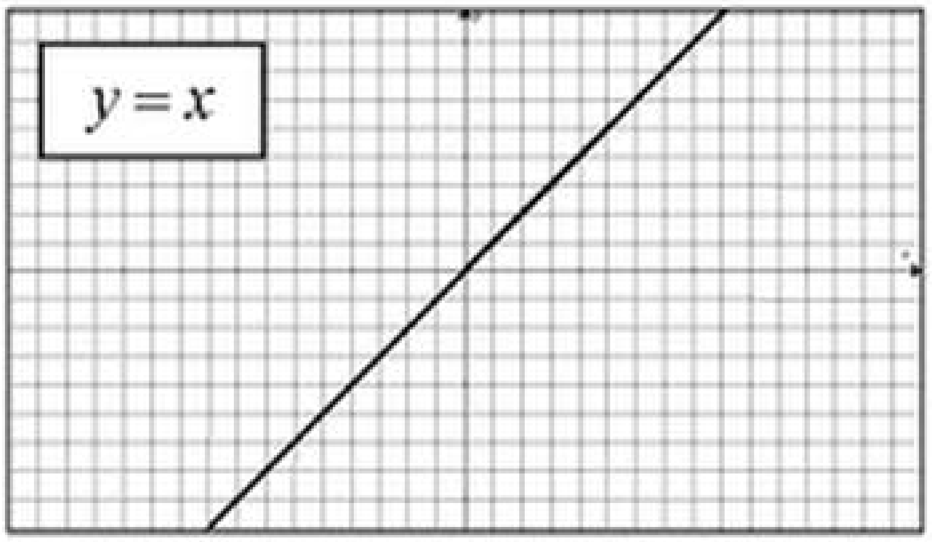
المشتق: $\boxed{\left[\ln u(x)\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}}$ حيث u موجبة تماما وقابلة للاشتقاق

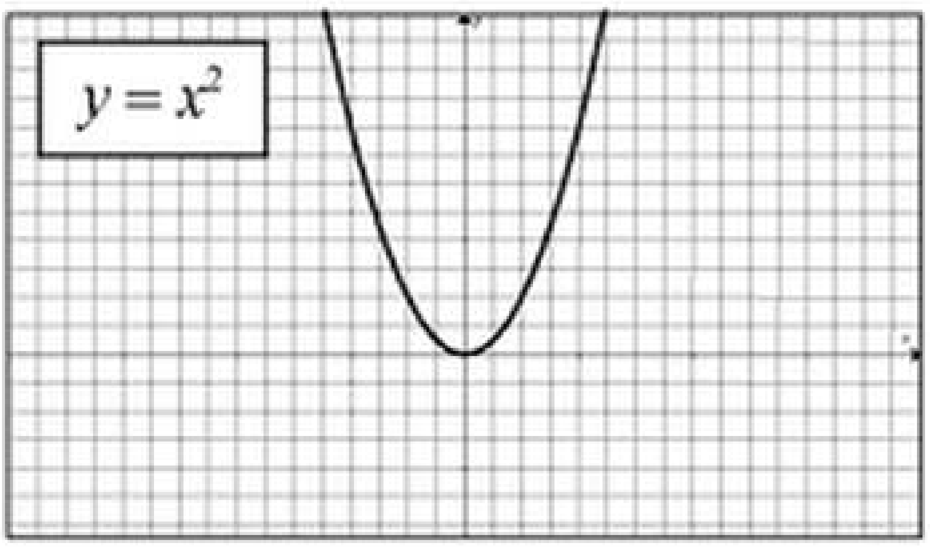
النهايات:

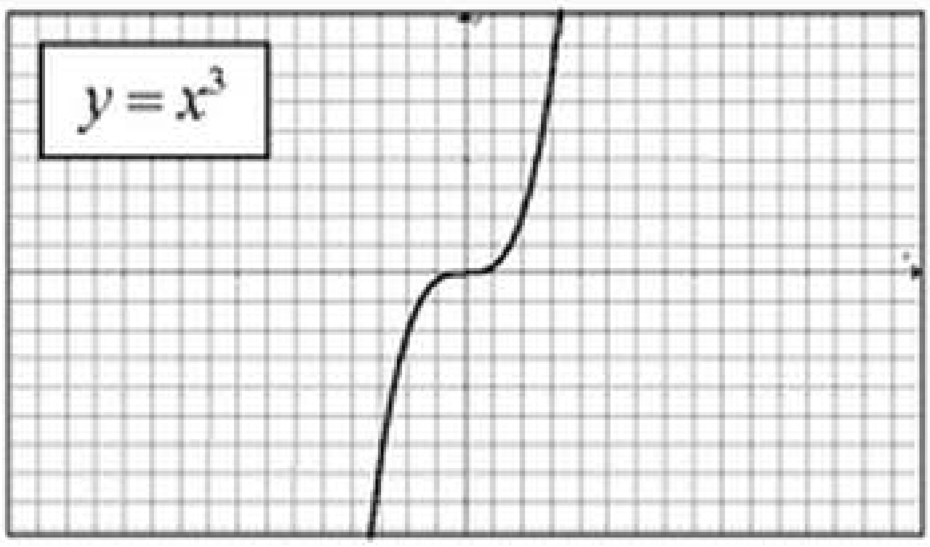
$$\boxed{\begin{array}{ccc} \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty & \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \text{ و } & \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0 & \text{(التزايد المقارن)} \end{array}}$$

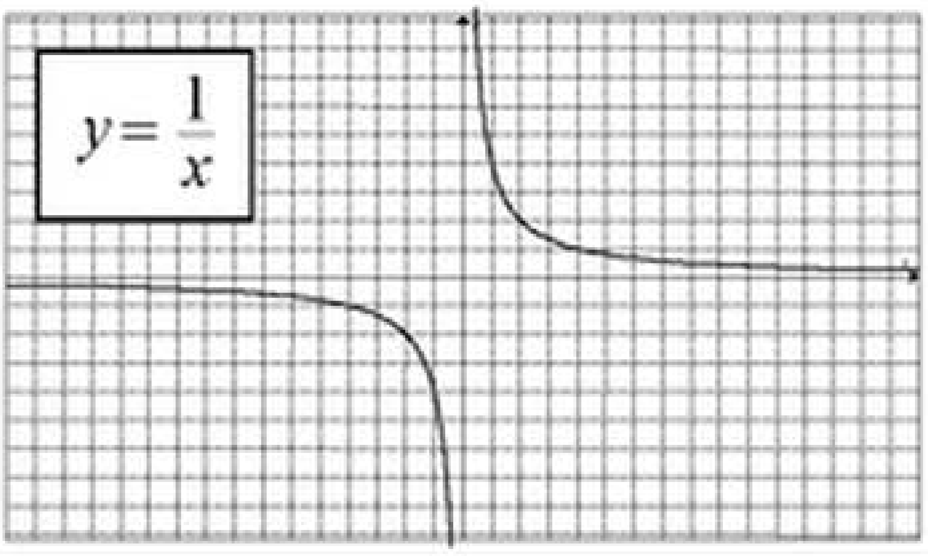
كذلك: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha\ln x=0$ $\quad (\alpha>0)$ $\quad \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

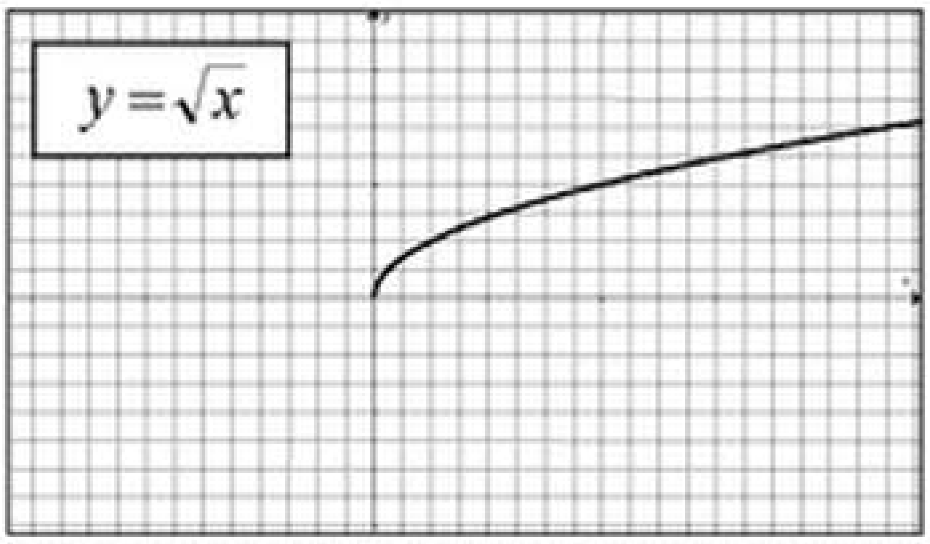
الدوال المرجعية

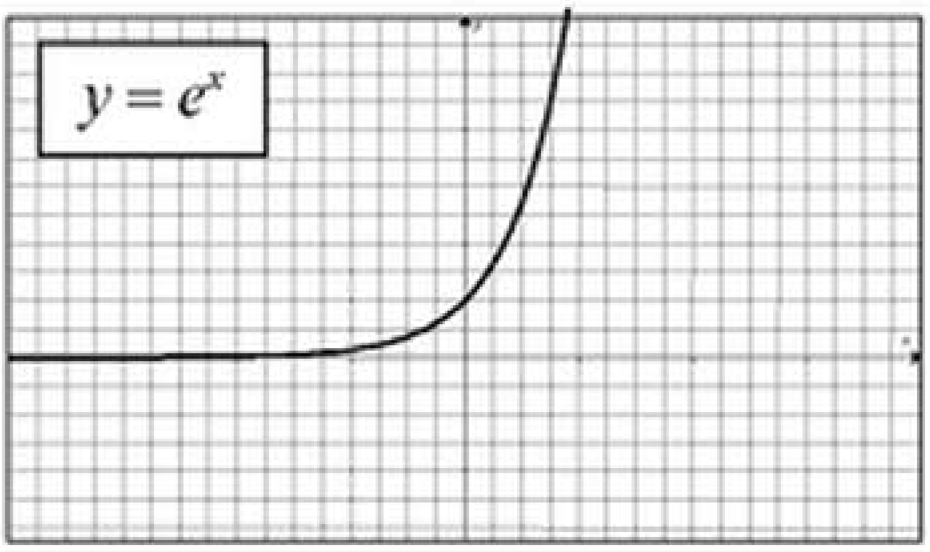


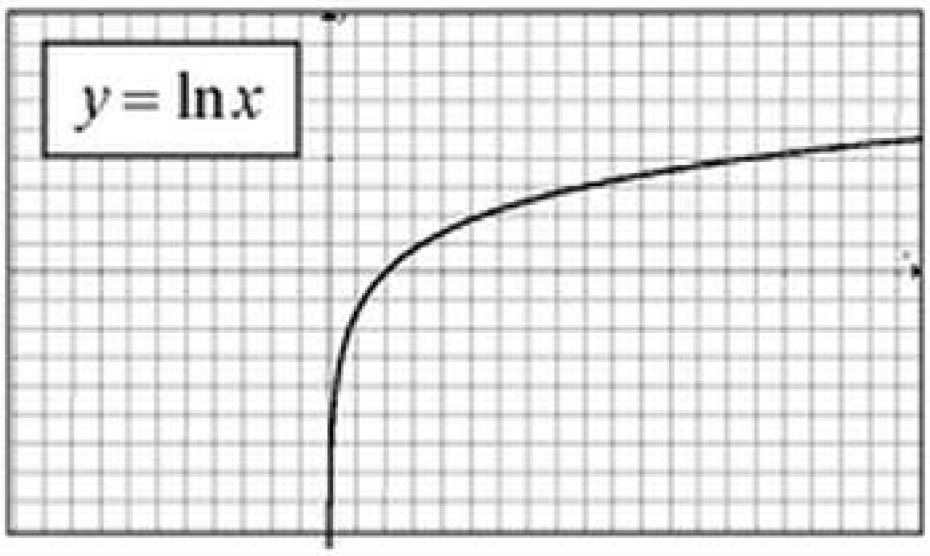


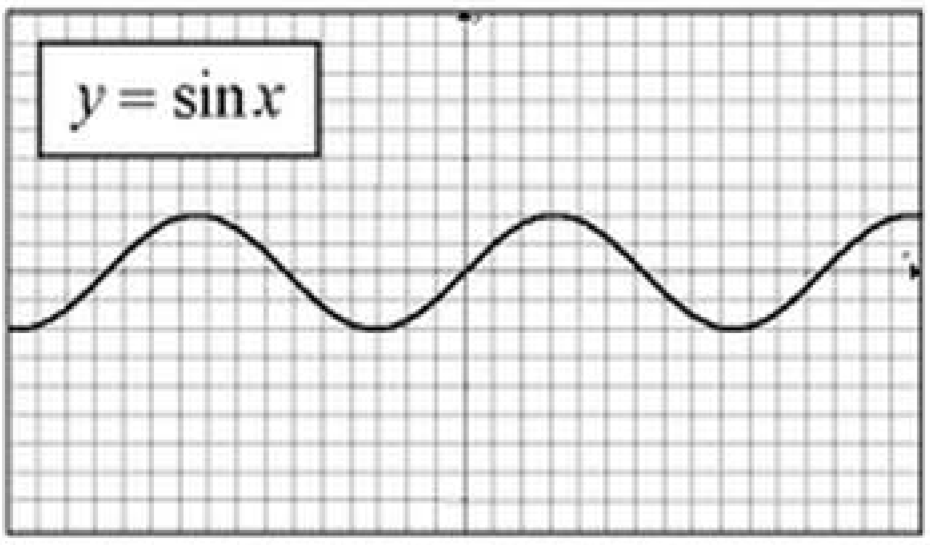


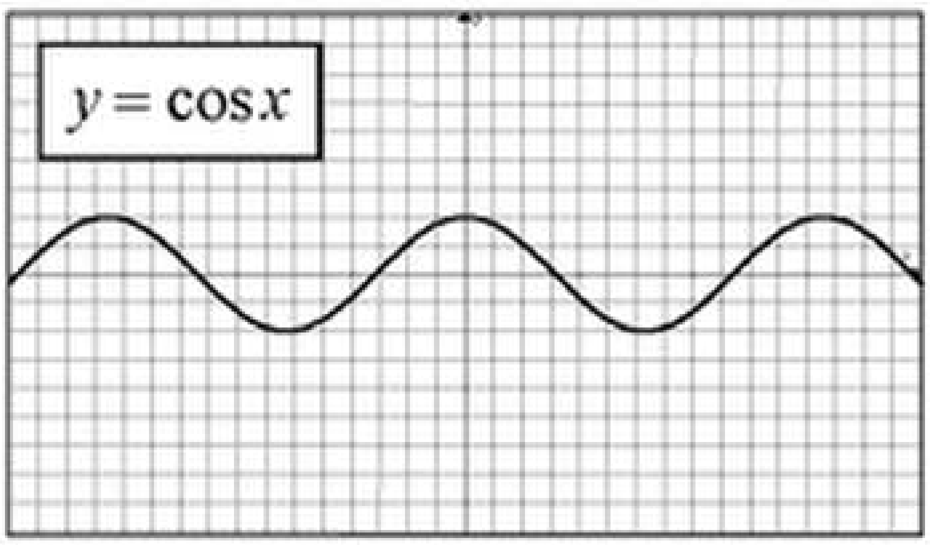


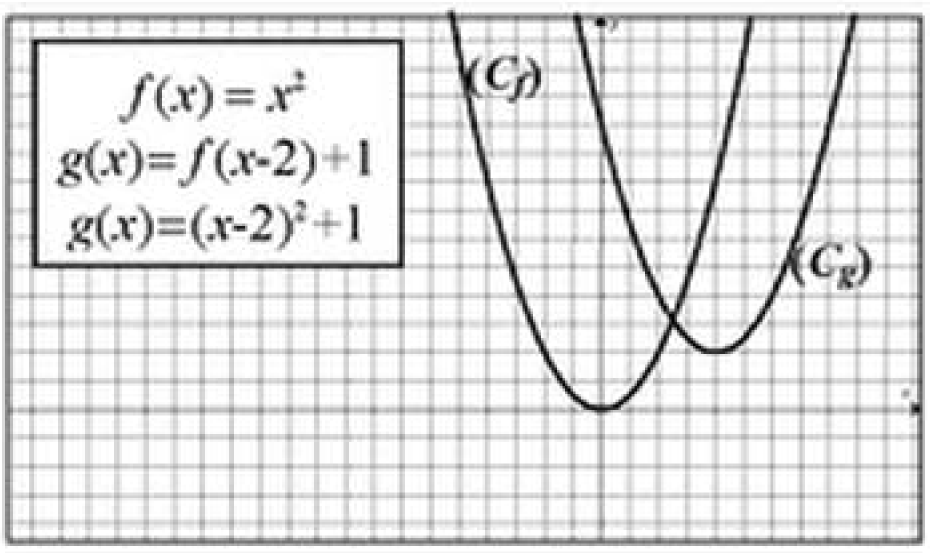












الجداء السلّمي

تذكير:

في معلم متعامد ومتجانس من الفضاء، لتكن: $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$

مركبة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\\ z_B-z_A\end{pmatrix}$

طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

منتصف القطعة$[AB]$: $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

حجم رباعي الوجوه: $\boxed{\mathcal{V}=\frac{1}{3}S.H}$ حيث S مساحة القاعدة و H الارتفاع

الجداء السلمي:

$\vec u$ و $\vec v$ شعاعان حيث: $\vec u(x;y;z)$ و $\vec v(x';y';z')$

$\boxed{\vec u.\vec v = xx'+yy'+zz'}$ $\boxed{\vec u.\vec v = u.v.\cos(\vec u,\vec v)}$

التعامد: $\vec u$ و $\vec v$ متعامدان إذا كان: $\vec u.\vec v=0$

الارتباط الخطي: $\vec u$ و $\vec v$ مرتبطان خطيا إذا كان: $\vec u=\lambda\vec v$ (λ عدد حقيقي)

• $\mathcal P$ و $\mathcal P'$ مستويان، $\vec n$ و $\vec n'$ ناظميان لهما على الترتيب:

$\mathcal P$ يوازي $\mathcal P'$ إذا كان: $\vec n=\lambda\vec n'$ (λ عدد حقيقي)
$\mathcal P$ يعامد $\mathcal P'$ إذا كان: $\vec n.\vec n'=0$
المستقيم AB عمودي على $\mathcal P$ إذا كان: $\overrightarrow{AB}=\lambda\vec n$

• بعد نقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ عن مستوٍ $\mathcal P: ax+by+cz+d=0$ هو:

$$\boxed{d=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

مجموعة النقط في الفضاء

(E_1) $\boxed{MA=r}$

مجموعة النقط (E_1) هي: سطح كرة مركزها A ونصف قطرها r

معادلتها: $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=r^2$

(E_2) $\boxed{MA=MB}$

مجموعة النقط (E_2) هي: المستوي محور القطعة $[AB]$

(E_3) $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=0}$

مجموعة النقط (E_3) هي: المستوي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{BC}$ ويشمل النقطة A

(E_4) $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0}$

مجموعة النقط (E_4) هي: سطح كرة قطرها $[AB]$

المرجح:

لتكن G مرجح الجملة: $\{(A،\alpha) ; (B،\beta) ; (C،\gamma)\}$ حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec 0}$$

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

لما $\alpha=\beta=\gamma$ النقطة G تمثل مركز ثقل المثلث ABC

الأعداد المركبة [ℂ]

الشكل الجبري:

$\boxed{z = x + iy}$ حيث $\boxed{i^2 = -1}$ ، x و y عددين حقيقيين

$\mathrm{Re}(z) = x$: الجزء الحقيقي و $\mathrm{Im}(z) = y$: الجزء التخيلي

$z = 0$: $x = 0$ و $y = 0$ $\quad$ $z = z'$: $x = x'$ و $y = y'$ حيث $z' = x' + iy'$

مرافق عدد مركب:

$\boxed{\bar{z} = x - iy}$ $\quad$ $z + \bar{z} = 2x$ و $z.\bar{z} = x^2 + y^2$

z حقيقي: $\bar{z} = z$ $\quad$ z تخيلي صرف: $\bar{z} = -z$

طويلة عدد مركب:

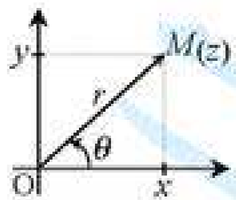
$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$|\bar{z}| = |z|$ ، $|z|^2 = z \times \bar{z}$ ، $|z.z'| = |z| \times |z'|$ ، $|z^n| = |z|^n$ ، $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

الشكل المثلثي:

طويلة z: $|z| = r$ $\quad$ $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

عمدة z: $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ $\quad$ $z \neq 0$ و k عدد صحيح



$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ $\quad$ $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ $\quad$ $\arg(z^n) = n\arg(z)$ n عدد صحيح

قانون موافر $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

الشكل الأسي:

$\boxed{z = re^{i\theta}}$ ، $\bar{z} = re^{-i\theta}$ ، $e^{i\pi} = -1$

$z.z' = r.r' \times e^{i(\theta+\theta')}$ ، $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} \times e^{i(\theta-\theta')}$ ، $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

التفسير الهندسي للأعداد المركبة

- لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ $\quad$ ♦ طول $\overrightarrow{AB}$ هو $AB = |z_B - z_A|$
- لاحقة النقطة I منتصف [AB] هي $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

لاحقة G مرجح الجملة: $\{(A,\alpha) ; (B,\beta) ; (C,\gamma)\}$ $\quad$ $\boxed{z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}}$

$\boxed{\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}$ و $\boxed{\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}}$

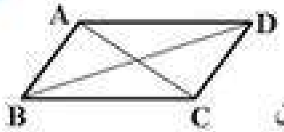
إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ عددا حقيقيا فإن النقاط A ، B و C على استقامة واحدة.

إذا كان $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ عددا تخيليا صرفا فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان.

متوازي الأضلاع:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

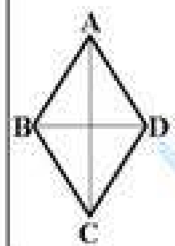
أو القطران متناصفان



المعين:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $AD = DC$

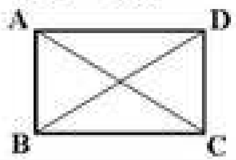
أو القطران متناصفان ومتعامدان



المستطيل:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$

أو القطران متناصفان ومتساويان

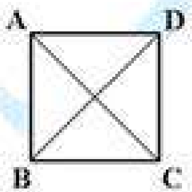


المربع:

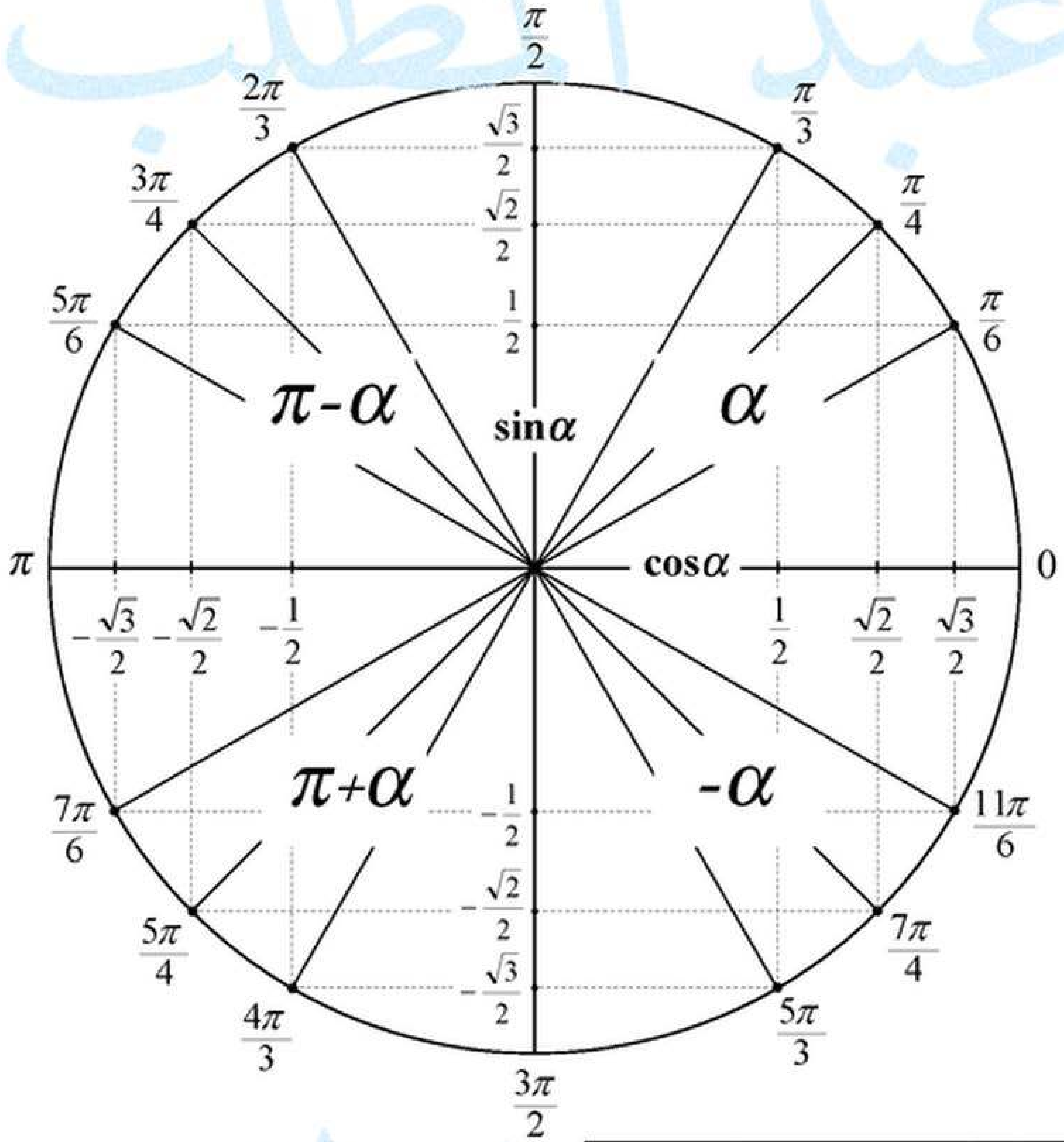
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $AD = DC$

و $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$

أو القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان



Cercle Trigonométrique



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞