https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac

المادة: رياضيات — الأستاذ: عبد الحميد

BAC MATHS

ملخص محور الأعداد و الحساب — رياضي ـ تقني رياضي

ملخص الدرس

الأعداد و الحساب

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

عبد الحميد

المادة: رياضيات　　　الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب　　　رياضي ـ تقني رياضي

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$:

تعريف:

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

القول أن العدد a يقسم العدد b يعني وجود عدد صحيح k حيث:

$b = ka$

من التعريف:

- نقول كذلك: a قاسم للعدد b.
- أو نقول كذلك: b مضاعف للعدد a.
- نكتب $a/_b$ ونقرأ a يقسم b.

ملاحظة:

في $\mathbb{Z}$، للعددين a و $-a$ نفس القواسم.

خواص:

①

a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة.

إذا كان a يقسم b وكان b يقسم c فإن:

a يقسم c

②

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح m :

a يقسم mb

③

a و b عددان صحيحان و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم b فإنه من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m :

ma يقسم mb

④

a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة و a غير معدوم.

إذا كان a يقسم العددين b و c فإنه من أجل كل عددين صحيحين m و n :

a يقسم $mb+nc$

القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

مبرهنة:

a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم.

توجد ثنائية وحيدة $(q\,;r)$ من الأعداد الصحيحة حيث:

$a=bq+r$ و $0\leq r<b$

من المبرهنة:

- نسمي عملية البحث عن الثنائية $(q\,;r)$ بالقسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.
- يسمى q و r بهذا الترتيب حاصل وباقي القسمة الإقليدية للعدد a على العدد b.
- يمكن تمديد مفهوم القسمة الإقليدية لعدد صحيح a على عدد صحيح غير معدوم b. فنحصل على:

$a=bq+r$ و $0\leq r<|b|$

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

تعريف:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. D_a و D_b مجموعتا قواسم a و b على الترتيب.

$D_a\cap D_b$ هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b.

يسمى أكبر عنصر من المجموعة $D_a\cap D_b$ بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

ونرمز له بـ $PGCD(a\,;b)$.

- $PGCD(a\,;a)=a$.
- $PGCD(1\,;a)=1$.
- $PGCD(0\,;a)=a$ (a غير معدوم).
- مجموعة قواسم 0 هي $\mathbb{N}^*$.
- مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac

المادة: رياضيات — BAC MATHS — الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب — رياضي ـ تقني رياضي

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد و الحساب

عبد الحميد

خواص القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

①

a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a \geq b$. و r باقي قسمة a على b.

$PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r)$

②

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو آخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية إقليدس.

③

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. k عدد طبيعي غير معدوم.

$PGCD(ka\,;kb) = k \times PGCD(a\,;b)$

④

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. d قاسم مشترك للعددين a و b.

نضع:

$b = db'$ و $a = da'$

يكون d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b إذا وفقط إذا كان العددان الطبيعيان a' و b' أوليين فيما بينهما.

تعريف:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين.

يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا كان قسمهما المشترك الأكبر يساوي 1.

تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين:

تعريف:

a و b عددان صحيحان غير معدومين.

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو العدد الطبيعي الوحيد d حيث:

$d = PGCD(|a|\,;|b|)$

المادة: رياضيات — الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب — رياضي ـ تقني رياضي

خاصية:

a و b عددان صحيحان غير معدومين. k عدد صحيح غير معدوم.

$PGCD(ka\,;kb) = |k| \times PGCD(a\,;b)$

ملاحظة:

- a و b عددان صحيحان غير معدومين. إذا كان b يقسم a فإن:

$PGCD(a\,;b) = |b|$

الموافقات في $\mathbb{Z}$:

تعريف:

n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن a و b لهما نفس الباقي في القسمة على n.

ونرمز بـ : $a \equiv b\ [n]$ ونقرأ: a يوافق b بترديد n.

ملاحظة:

- من أجل كل عدد صحيح x :

$x \equiv 0\ [1]$

مبرهنة:

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.

a و b لهما نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا وفقط إذا كان:

$a - b$ مضاعف لـ n

نتيجة:

a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.

a و b متوافقان بترديد n إذا وفقط إذا كان $a - b$ مضاعف لـ n.

خواص:

①

n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1 $(n \geq 2)$.

كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته على n بترديد n.

https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac

المادة: رياضيات — BAC MATHS — الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب — رياضي ـ تقني رياضي

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد و الحساب

②

n عدد طبيعي غير معدوم، من أجل كل عدد صحيح a لدينا:

$a \equiv a\ [n]$

③

n عدد طبيعي غير معدوم، a و b عددان صحيحان. إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن:

$b \equiv a\ [n]$

④

n عدد طبيعي غير معدوم، a و b و c أعداد صحيحة.

إذا كان $a \equiv b\ [n]$ و $b \equiv c\ [n]$ فإن:

$a \equiv c\ [n]$

⑤

n عدد طبيعي غير معدوم، a و b و c و d أعداد صحيحة.

إذا كان $a \equiv b\ [n]$ و $c \equiv d\ [n]$ فإن:

$a + c \equiv b + d\ [n]$

⑥

n عدد طبيعي غير معدوم، a و b و c و d أعداد صحيحة.

إذا كان $a \equiv b\ [n]$ و $c \equiv d\ [n]$ فإن:

$ac \equiv bd\ [n]$

⑦

n عدد طبيعي غير معدوم، a و b عددان صحيحان.

من أجل كل عدد صحيح k إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن:

$ka \equiv kb\ [n]$

⑧

n و p عددان طبيعيان غير معدومين، a و b عددان صحيحان.

إذا كان $a \equiv b\ [n]$ فإن:

$a^p \equiv b^p\ [n]$

المادة: رياضيات — BAC MATHS — الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب — رياضي ــ تقني رياضي

التعداد:

مبرهنة:

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1. كل عدد طبيعي a أكبر من أو يساوي x يكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \cdots + r_2x^2 + r_1x + r_0$$

حيث:

$0 < q < x$ و $0 \le r_a < x$ مع $a \in \{0;1;2;\dots;n-1\}$

التعداد ذو الأساس x:

قاعدة:

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1.

يعتمد التعداد ذو الأساس x على الاصطلاحين التاليين:

1) إذا كان $x > a$ (a عدد طبيعي): a يمثّل برمز وحيد يسمى رقما.

2) إذا كان $x \le a$ (a عدد طبيعي): من المبرهنة، a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x.

$$a = qx^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \cdots + r_2x^2 + r_1x + r_0$$

حيث:

$0 < q < x$ و $0 \le r_a < x$ مع $a \in \{0;1;2;\dots;n-1\}$

يمثل العدد a كما يلي:

$$a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$$

الكتابة $a = \overline{qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0}$ هي كتابة العدد a في النظام ذي الأساس x.

ملاحظة:

- إذا كان $x = 10$ نكتب:

$$a = qr_{n-1}r_{n-2}\dots r_1r_0$$

الأعداد الأولية:

تعريف:

القول أن العدد الطبيعي n عدد أولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{N}$:
1 و n نفسه

الأعـــــداد و الحســـــاب

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

عبدالحميد

ملاحظات:

- 0 غير أولي لأنه يقبل ما لا نهاية من القواسم.
- 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو العدد 1.
- 2 هو العدد الأولي الزوجي الوحيد.
- 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 هي الأعداد الأولية الأصغر من 25.

خواص:

①

كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ يقبل على الأقل قاسما أوليا.

②

كل عدد طبيعي غير أولي n أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ يقبل قاسما أوليا a حيث:
$a \leq \sqrt{n}$

③

مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية.

طريقة:

لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 $(n \geq 2)$ أوليا أم لا، نحسب $\sqrt{n}$.
- إذا كان $\sqrt{n}$ عددا طبيعيا أي n مربع تام فإن n غير أولي.
- إذا كان $\sqrt{n}$ غير طبيعي، نقسم n على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب.
- إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف، ونقرّ أن n غير أولي.
- إذا كانت كل البواقي غير معدومة، نقرّ أن n أولي.

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية:

مبرهنة:

كل عدد طبيعي غير أولي n حيث $n \geq 2$ يمكن تحليله إلى جداء عوامل أولية.

ملاحظة:

- نقبل بدون برهان أن كل عدد طبيعي n يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية.

ملخص محور الأعداد و الحساب — رياضي ــ تقني رياضي

خاصية:

a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1.

يكون العدد b قاسما للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a و بِأُسّ إما مساوٍ واما أصغر من أسّه في تحليل a.

طريقة:

لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a نحلل a إلى جداء عوامل أولية.

إلى كل أُسّ في التحليل نضيف 1 ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها.

المضاعف المشترك الأصغر لعددين:

تعريف:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين. M_a و M_b مجموعتا مضاعفات a و b على الترتيب.

$M_a \cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b.

يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a \cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b.

ونرمز له بـ $PPCM(a\,;b)$.

- المضاعف الوحيد لـ 0 هو 0.
- $PPCM(a\,;a) = a$.
- $PPCM(1\,;a) = a$.
- مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين غير معدومين هي مجموعة مضاعفات المضاعف المشترك الأصغر لهما.

تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين:

تعريف:

a و b عددان صحيحان غير معدومين.

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث:

$m = PPCM(|a|\,;|b|)$

خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين:

خاصية:

a و b عددان طبيعيان غير معدومين، k عدد صحيح غير معدوم.

$PPCM(ka\,;kb) = |k| \times PPCM(a\,;b)$

حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو: جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرّة واحدة وبأصغر أسّ.

حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

خاصية:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو: جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرّة واحدة وبأكبر أسّ.

العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر:

خاصية:

جداء عددين طبيعيين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 مساوٍ لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر.

$PGCD(a\,;b) \times PPCM(a\,;b) = a \times b$

مبرهنة بيزو:

مبرهنة:

يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث:

$au + bv = 1$

https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac

المادة: رياضيات — الأستاذ: عبد الحميد

ملخص محور الأعداد و الحساب — رياضي ـ تقني رياضي

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد و الحساب

خواص:

①

إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث:

$$au + bv = 1$$

②

إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها.

③

إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b \times c$.

مبرهنة غوص:

مبرهنة:

a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة.

إذا كان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b فإن:

a يقسم c

خواص:

①

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي.

إذا كان p يقسم الجداء ab فإن:

p يقسم a أو p يقسم b

②

a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة.

إذا كان a مضاعفا للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن:

a مضاعف للجداء bc

https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac

BAC MATHS

المادة: رياضيات — الأستاذ: عبد الحميد

سلسلة التمارين — شعبة الرياضيات

سلسلة التمارين

الأعداد و الحساب

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

عبد الحميد

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة الرياضيات ❖

﴿ دورة 2008 - الموضوع الأول ﴾

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث:

$$3x - 21y = 78$$

1) أ- بين أن (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E)، فإن:

$$x \equiv 5\ [7]$$

2) أ- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب- عين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E)، وتحقق:

$$5^x + 5^y \equiv 3\ [7]$$

﴿ دورة 2009 - الموضوع الأول ﴾

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي.

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل:

$$A = \overline{5566}$$

1) أ- أنشر العبارة: $(5x^2+6)(x+1)$، ثم أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن:

$$A = (5x^2+6)(2+2y)$$

ب- أحسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي أصغر من 12، ثم أكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

2) أ- عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب- عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a > b$ التي تحقق:

$$\begin{cases} a+b = 32 \\ a^2+b^2 = 584 \end{cases}$$

﴿ دورة 2010 - الموضوع الأول ﴾

1) نعتبر المعادلة:

$$7x + 65y = 2009 \ldots (1)$$

حيث x و y عددان صحيحان.

أ- بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7.

ب- حل المعادلة (1).

2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.

3) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد: $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 2^{6n}-1$.

أ- تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.

ب- حل المعادلة ذات المجهول (x,y):

$$(7u_1)x + (u_2)y = 126567 \ldots (2)$$

حيث x و y عددان صحيحان.

جـ- عين الثنائية (x_0, y_0) حل المعادلة (2)، حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع: $y_0 \geq 25$.

﴿ دورة 2010 - الموضوع الثاني ﴾

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد: $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، كل من العددين: $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ يقبل القسمة على 13.

3) عين، حسب قيم n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13، واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي p: $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$.

أ- من أجل: $p = 3n$، عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13.

ب- برهن أنه إذا كان: $p = 3n+1$، فإن A_p يقبل القسمة على 13.

جـ- عين، من أجل $p = 3n+2$ باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13.

5) يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي:

$$\begin{cases} a = \overline{1001001000} \\ \text{و} \\ b = \overline{1000100010000} \end{cases}$$

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة الرياضيات ❖

أ- تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري.

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13.

﴿ دورة 2011 - الموضوع الثاني ﴾

1) نعتبر المعادلة:

$$13x - 7y = -1 \dots (E)$$

حيث x و y عددان صحيحان.

- حل المعادلة (E).

2) عين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث:

$$\begin{cases} a \equiv -1\ [7] \\ a \equiv \ \ 0\ [13] \end{cases}$$

3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13.

4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9، كما يلي:

$$b = \overline{\alpha 00 \beta 086}$$

حيث α و β عددان طبيعيان، مع: $\alpha \neq 0$.

- عين α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91.

﴿ دورة 2012 - الموضوع الأول ﴾

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$ التالية:

$$2011x - 1432y = 31 \dots (1)$$

أ- أثبت أن العدد 2011 أولي.

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس، عين حلا خاصا $(x_0\,;y_0)$ للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1).

2) أ- عين، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد: $2011^{1432^{2012}}$ على 7.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0\ [7]$$

3) N عدد طبيعي يكتب: $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 9 حيث α، β و γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta\,;\gamma)$ حل للمعادلة (1).

- عين α، β و γ، ثم اكتب N في النظام العشري.

﴿ دورة 2013 - الموضوع الأول ﴾

1) n عدد طبيعي، نعتبر العددين الصحيحين α و β، حيث:

$$\beta = n + 3 \text{ و } \alpha = 2n^3 - 14n + 2$$

أ- بين أن: $PGCD(\alpha\,;\beta) = PGCD(\beta\,;10)$.

(يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر).

ب- ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha\,;\beta)$؟

جـ- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n، بحيث يكون:

$$PGCD(\alpha\,;\beta) = 5$$

2) أ- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0\ [11] \\ n \equiv 2\ [10] \end{cases}$$

﴿ دورة 2013 - الموضوع الثاني ﴾

1) أ- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق:

$$2n + 27 \equiv 0\ [n+1]$$

ب- عين الثنائيات $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية، حيث:

$$(b-a)(a+b) = 24$$

جـ- استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

2) α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام دي الأساس 5 على الشكل:

$$\beta = \overline{3403} \text{ و } \alpha = \overline{10141}$$

أ- أكتب العددين α و β في النظام العشري.

ب- عين الثنائية $(a\,;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث:

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$$

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة الرياضيات ❖

3) أ- عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434، ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478.

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$ التالية:

$$2013x - 1434y = 27$$

﴿ دورة 2014 - الموضوع الأول ﴾

1) نعتبر المعادلة (E):

$$2013x - 1962y = 54$$

حيث x و y عددان صحيحان.

أ- أحسب $PGCD(2013\,;1962)$.

ب- استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

جـ- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن:

$$x \equiv 0\ [6]$$

د- استنتج حلا خاصا $(x_0\,;y_0)$ حيث: $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E).

2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x\,;y)$ حل للمعادلة (E).

أ- ماهي القيم الممكنة للعدد d؟

ب- عين قيم العددين الطبيعيين a و b حيث:

$$PGCD(a\,;b) = 18 \text{ و } 671a - 654b = 18$$

﴿ دورة 2015 - الموضوع الأول ﴾

1) أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد:

$$[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}]$$

2) أ- بين أن 89 عدد أولي.

ب- عين كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.

جـ- بين أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسمهما المشترك الأكبر هو 2.

- عين x و y علما أن:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8\ [22] \end{cases}$$

4) a، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c.

أ- باستعمال مبرهنة بيزو، برهن أن a أولي مع $b \times c$.

ب- باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$PGCD(a\,;b^n) = 1$$

(يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر).

جـ- استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}.

﴿ دورة 2015 - الموضوع الثاني ﴾

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة، في الحالة التالية مع التعليل.

3) a، b، c و d أعداد طبيعية غير معدومة وأصغر من أو تساوي 9.

$\overline{abcd}$ عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري.

من أجل كل الأعداد a، b، c و d، يكون العدد $\overline{abcd}$ يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان:

أ- العدد $(a - b + c - d)$ يقبل القسمة على 11.

ب- العدد $(a + b + c + d)$ يقبل القسمة على 11.

جـ- العدد $\overline{cd}$ المكتوب في النظام العشري، يقبل القسمة على 11.

﴿ دورة 2016 - الموضوع الأول ﴾

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$\begin{cases} ln(u_1) + ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$$

1) أحسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q.

2) نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$.

أ- عبر عن u_n بدلالة n.

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة الرياضيات ❖

ب- نضع: $S_n = ln(u_0) + ln(u_1) + ln(u_2) + \cdots + ln(u_n)$.

أحسب S_n بدلالة n.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = n + 3$.

أ- بين أن: $PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(a_n; 14)$.

ب- عين القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n; a_n)$.

جـ- عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها:

$PGCD(2S_n; a_n) = 7$

4) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

5) نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$.

عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون:

$$\begin{cases} b_n \equiv 0\,[7] \\ n \equiv 0\,[5] \end{cases}$$

6) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد:

$1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$

يقبل القسمة على 7.

﴿ دورة 2016 - الموضوع الثاني ﴾

1) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد:

$2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$

مضاعف للعدد 11.

2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ التالية:

$7x - 3y = 8$

حيث x و y عددان طبيعيان.

أ- حل المعادلة (E).

ب- d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E).

- ماهي القيم الممكنة للعدد d؟

- عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$.

جـ- جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق:

$2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0\,[11]$

﴿ دورة 2017 - الموضوع الأول - الدورة العادية ﴾

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$ التالية:

$104x - 20y = 272 \ldots (E)$

حيث x و y عددان صحيحان.

أ- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

ب- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3\,[5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E).

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4، ويكتب $\overline{1\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث α و β عددان طبيعيان.

عين α و β، ثم اكتب λ في النظام العشري.

3) تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي، ثم عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $2m - d = 2017$.

حيث $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$.

﴿ دورة 2017 - الموضوع الأول - الدورة الاستثنائية ﴾

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث:

$63x + 5y = 159 \ldots (E)$

1) تحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

2) برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة فإن $x \equiv 3\,[5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E).

3) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha0\alpha}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ويكتب $\overline{\beta10\beta0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5.

جد العددين الطبيعيين α و β واكتب العدد $\lambda + 2$ في النظام العشري.

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة الرياضيات ❖

4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد:

$$3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$$

القسمة على 5، حيث $(x;y)$ حلول المعادلة (E) و x عدد طبيعي.

﴿ دورة 2017 - الموضوع الثاني - الدورة الاستثنائية ﴾

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 حيث $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

1) أ- بين، من أجل كل عدد طبيعي n أن: $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

ب- تحقق، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن العددان الطبيعيان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

$$v_n = u_n + \frac{1}{3}$$

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0.

ب- عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{3n}$$

3) عين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين $4^n - 1$ و $4^{n+1} - 1$.

4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n القسمة على 7 حيث:

$$A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$$

﴿ دورة 2018 - الموضوع الثاني ﴾

1) α و β عددان طبيعيان بحيث:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

- عين العددين α و β ثم بين أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

2) عين كل الثنائيات الصحيحة $(x;y)$ التي تحقق المعادلة:

$$1009x - 2017y = 1$$

3) عين الأعداد الصحيحة α التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases} \alpha \equiv 2019\ [2017] \\ \alpha \equiv 2019\ [1009] \end{cases}$$

4) أ- n عدد طبيعي، أدرس تبعا لقيم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

ب- L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي:

$$L = \underbrace{\overline{111\ldots1}}_{\text{2018 مرة}}$$

- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9.

https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac

المادة: رياضيات	الأستاذ: عبد الحميد

BAC MATHS

سلسلة التمارين	شعبة التقني رياضي

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

الأعداد و الحساب

سلسلة التمارين

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة تقني رياضي ❖

﴿ دورة جوان 2008 - الموضوع الأول ﴾

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1) a و b عددان طبيعيان حيث:

$b = 2n + 3$ و $a = n - 2$

أ- ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b؟

ب- بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ مضاعفا للعدد 7.

جـ- عين قيم n التي يكون من أجلها: $PGCD(a\,;b) = 7$.

2) نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث:

$q = n^2 - 7n + 10$ و $p = 2n^2 - 7n - 15$

أ- بين أن كلا من العددين p و q يقبل القسمة على $n - 5$.

ب- عين تبعا لقيم n وبدلالة n، $PGCD(p\,;q)$.

﴿ دورة جوان 2008 - الموضوع الثاني ﴾

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y التالية:

$4x - 9y = 319 \dots (I)$

1) - تأكد أن الثنائية $(82\,,1)$ حل للمعادلة (I).

- حل المعادلة (I).

2) عين الثنائيات $(a\,,b)$ الصحيحة، حلول المعادلة:

$4a^2 - 9b^2 = 319 \dots (II)$

3) استنتج الثنائيات $(x_0\,,y_0)$ حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

﴿ دورة جوان 2010 - الموضوع الأول ﴾

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي:

$n = \overline{11\alpha 00}$

حيث α عدد طبيعي.

1) عين α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.

2) عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

- استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15.

3) نأخذ: $\alpha = 4$.

- أكتب العدد n في النظام العشري.

﴿ دورة جوان 2010 - الموضوع الثاني ﴾

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13.

2) تحقق أن:

$(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0\,[13]$

3) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0\,[13]$

﴿ دورة جوان 2011 - الموضوع الأول ﴾

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) المعادلة: $21x + 14y = 40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة.

2) في نظام التعداد ذي الأساس 7، يكون:

$\overline{3421} + \overline{1562} = \overline{5413}$

3) باقي القسمة الإقليدية للعدد A على 7 هو 6 حيث:

$A = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2011}$

﴿ دورة جوان 2011 - الموضوع الثاني ﴾

من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1) تحقق أن: $4 \equiv -3\,[7]$ ثم بين أن: $A_3 \equiv 6\,[7]$.

2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7.

3) بين أنه إذا كان n فرديا فإن: $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7، واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7.

4) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7؟

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة تقني رياضي ❖

﴿ دورة جوان 2012 - الموضوع الأول ﴾

1) أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 9^n على 11.

2) ما هو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11؟

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد:

$$(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012})$$

يقبل القسمة على 11.

4) عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد:

$$(2011^{2012} + 2n + 2)$$

مضاعفا للعدد 11.

﴿ دورة جوان 2012 - الموضوع الثاني ﴾

نسمي (S) الجملة التالية:

$$\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$$

حيث x عدد صحيح $(x \in \mathbb{Z})$.

1) بين أن العدد 153 حل للجملة (S).

2) إذا كان x_0 حلا لـ (S)، بين أن:

$$\left(x \text{ حل لـ } (S)\right) \text{ يكافئ } \left(\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}\right)$$

3) حل الجملة (S).

4) يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب، وإذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب.

- إذا علمت أن عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتابا، ما عدد هذه الكتب؟

﴿ دورة جوان 2013 - الموضوع الثاني ﴾

x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$ التالية:

$$11x + 7y = 1$$

1) أ- عين الثنائية $(x_0\,;y_0)$، حل المعادلة (E) التي تحقق:

$$x_0 + y_0 = -1$$

ب- استنتج حلول المعادلة (E).

2) a و b عددان طبيعيان و S العدد الذي يحقق:

$$\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$$

أ- بين أن $(a\,;-b)$ حل للمعادلة (E).

ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77؟

3) n عدد طبيعي باقي قسمته 11 على هو 1 وباقي قسمته على 7 هو 2.

- عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$.

﴿ دورة جوان 2014 - الموضوع الثاني ﴾

n و p عددان طبيعيان.

1) أدرس، حسب قيم n، بواقي القسمة الإقليدية على 16 للعدد 5^n.

2) نضع: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$.

أ- بين أنه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث k عدد طبيعي، فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق:

$$C_n = D_p$$

ب- عين n من أجل: $p = 6$.

﴿ دورة جوان 2015 - الموضوع الأول ﴾

1) أ- عين، حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية على 13 للعدد:

$$[42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3]$$

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n}\ [13]$$

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي حتى يكون:

$$(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0\ [13]$$

﴿ دورة جوان 2016 - الموضوع الأول ﴾

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x\,;y)$:

$$6x - 7y = 19 \ldots (E)$$

حيث x و y عددان صحيحان.

❖ سلسلة تمارين في الأعداد و الحساب ❖ شعبة تقني رياضي ❖

1) جد الحل الخاص $(x_0\,;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث $x_0 = y_0$، ثم حل المعادلة (E).

2) استنتج قيم العدد الصحيح λ والتي تحقق:

$$\begin{cases} \lambda \equiv 24\ [7] \\ \lambda \equiv 5\ \ [6] \end{cases}$$

ثم عين باقي قسمة العدد λ على 42.

3) عين جميع الثنائيات $(x\,;y)$ حلول المعادلة (E) حيث:

$$|x+y-1| \leq 13$$

4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة:

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020\ [7] \\ n \qquad\ \equiv 1437\ [6] \end{cases}$$

《 دورة جوان 2017 - الموضوع الثاني - الدورة العادية 》

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k :

$$4^{5k} \equiv 1\ [11]$$

2) استنتج تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد:

$$2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1$$

يقبل القسمة على 11.

4) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد:

$$2 \times 2017^{5n+2} + n - 3$$

قابلا للقسمة على 11.

《 دورة جوان 2017 - الموضوع الأول - الدورة الإستثنائية 》

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

2) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5.

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد:

$$48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1$$

مضاعف للعدد 5.

4) عين الأعداد الطبيعية n حتى يكون العدد:

$$3^{4n} + 27^n - 4$$

قابلا للقسمة على 5.

https://www.facebook.com/Abdelhamid3bac

المادة: رياضيات — الأستاذ: عبد الحميد

تمارين محلولة — شعبة رياضيات + تقني رياضي

تمارين محلولة

الأعداد و الحساب

تعلم الرياضيات مع الأستاذ عبد الحميد

عبد الحميد

بكالوريا 2017 العادية – شعبة الرياضيات – الموضوع الأول

التمرين

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ التالية:

$$104x - 20y = 272 \dots (E)$$

حيث x و y عددان صحيحان.

أ- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

ب- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 3\ [5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E).

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4، ويكتب $\overline{1\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث α و β عددان طبيعيان.

عين α و β، ثم اكتب λ في النظام العشري.

3) تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي، ثم عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$2m - d = 2017$$

حيث $d = PGCD(a;b)$ و $m = PPCM(a;b)$.

الحل

$$104x - 20y = 272 \dots (E)$$

1) أ- حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104:

بتطبيق خوارزمية إقليدس، نشكل الجدول التالي:

حاصل القسمة	5	5
104	20	4
باقي القسمة	4	0

آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمات الإقليدية هو 4.

ومنه:

القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 هو 4.

ونكتب:

$$PGCD(104\,;20) = 4$$

تبيان أن المعادلة (E) تقبل حلولا:

$$104x - 20y = 272 \dots (E)$$

لدينا:

$$PGCD(104\,;20) = 4$$

والعدد 4 يقسم العدد 272.

لأن:

$$272 = 68 \times 4$$

ومنه:

المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن:

$$x \equiv 3\ [5]$$

إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) نكتب:

$$104x - 20y = 272$$
$$4 \times 26x - 4 \times 5y = 4 \times 68$$
$$26x - 5y = 68 \dots (*)$$
$$26x = 5y + 68$$
$$26x = 5y + 65 + 3$$
$$26x = 5(y + 13) + 3$$
$$26x = 5y' + 3$$
$$26x \equiv 3\ [5]$$

حيث: $26 \equiv 1\ [5]$.

ومنه:

$$x \equiv 3\ [5]$$

استنتج حلول المعادلة (E):

لدينا من 1) أ- أن:

$$x \equiv 3\ [5]$$

أي:

$$x = 5k + 3\ /\ k \in \mathbb{Z}$$

نعوض $x = 5k + 3$ في المعادلة $(*)$ فنكتب:

$$26(5k + 3) - 5y = 68$$
$$130k + 78 - 5y = 68$$
$$130k + 10 = 5y$$
$$5 \times 26k + 5 \times 2 = 5y$$

نجد:

$$y = 26k + 2\ /\ k \in \mathbb{Z}$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

ومنه:

حلول المعادلة (E) هي:

$$(x;y)=\{(5k+3\,;26k+2)\}\;/\;k\in\mathbb{Z}$$

2) تعيين α و β:

$$\begin{cases}\lambda=\overline{1\alpha\alpha\beta01}^{4}\\ \lambda=\overline{1\alpha\beta01}^{6}\end{cases}$$

لدينا من جهة:

$$\lambda=\overline{1\alpha\alpha\beta01}^{4}$$

حيث:

$$0\le\alpha\le3 \text{ و } 0\le\beta\le3$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$\lambda=\overline{1\alpha\beta01}^{6}$$

حيث:

$$0\le\alpha\le5 \text{ و } 0\le\beta\le5$$

ومنه:

$$0\le\alpha\le3 \text{ و } 0\le\beta\le3$$

فنكتب من جهة:

$\lambda=\overline{1\alpha\alpha\beta01}^{4}$

$\lambda=1\times4^0+0\times4^1+\beta\times4^2+\alpha\times4^3+\alpha\times4^4+1\times4^5$

$\lambda=1+0+16\beta+64\alpha+256\alpha+1024$

$$\lambda=320\alpha+16\beta+1025\;...(1)$$

ونكتب من جهة أخرى:

$\lambda=\overline{1\alpha\beta01}^{6}$

$\lambda=1\times6^0+0\times6^1+\beta\times6^2+\alpha\times6^3+1\times6^4$

$\lambda=1+0+36\beta+216\alpha+1296$

$$\lambda=216\alpha+36\beta+1297\;...(2)$$

بالمساواة بين العلاقتين (1) و (2) نكتب:

$320\alpha+16\beta+1025=216\alpha+36\beta+1297$

$320\alpha-216\alpha+16\beta-36\beta=1297-1025$

$$104\alpha-20\beta=272\;...(3)$$

حيث:

$$0\le\alpha\le3 \text{ و } 0\le\beta\le3$$

لاحظ أن المعادلتين (3) و (E) متكافئتان.

ومنه:

حلول المعادلة (3) في $\mathbb{N}^2$ هي:

$$(\alpha;\beta)=\{(5m+3\,;26m+2)\}\;/\;m\in\mathbb{N}$$

لدينا:

$0\le\alpha\le3$

$0\le5m+3\le3$

$-3\le5m\le0$

$-\frac{3}{5}\le m\le0$

أي:

$$m=0$$

ومنه:

$$\alpha=3$$

ولدينا:

$0\le\beta\le3$

$0\le26m+2\le3$

$-2\le26m\le1$

$-\frac{1}{13}\le m\le\frac{1}{26}$

أي:

$$m=0$$

ومنه:

$$\beta=2$$

كتابة λ في النظام العشري:

نعوض $\alpha=3$ و $\beta=2$ في المعادلة (1) ثم نحقق من النتيجة بالتعويض في المعادلة (2) فنكتب:

$\lambda=320\alpha+16\beta+1025$

$\lambda=320\times3+16\times2+1025$

نجد:

$$\lambda=2017$$

التحقق:

$\lambda=216\alpha+36\beta+1297$

$\lambda=216\times3+36\times2+1297$

نجد:

$$\lambda=2017$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

3) التحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي:

التحقق أن 2017 عدد أولي:

لدينا:

$$\sqrt{2017} = 44{,}91$$

بما أن $\sqrt{2017}$ غير طبيعي، نقسم 2017 على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{2017}$ على الترتيب.

أي:

نقسم 2017 على الأعداد الأولية التالية على الترتيب:

$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43\}$

$2017 = 2 \times 1008 + 1$
$2017 = 3 \times 672 + 1$
$2017 = 5 \times 403 + 2$
$2017 = 7 \times 288 + 1$
$2017 = 11 \times 183 + 4$
$2017 = 13 \times 155 + 2$
$2017 = 17 \times 118 + 11$
$2017 = 19 \times 106 + 3$
$2017 = 23 \times 87 + 16$
$2017 = 29 \times 69 + 16$
$2017 = 31 \times 65 + 2$
$2017 = 37 \times 54 + 19$
$2017 = 41 \times 49 + 8$
$2017 = 43 \times 46 + 39$

لاحظ أن كل بواقي القسمة غير معدومة.

ومنه:

العدد 2017 أولي.

التحقق أن 1009 عدد أولي:

لدينا:

$$\sqrt{1009} = 31{,}76$$

بما أن $\sqrt{1009}$ غير طبيعي، نقسم 1009 على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{1009}$ على الترتيب.

أي:

نقسم 1009 على الأعداد الأولية التالية على الترتيب:

$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31\}$

$1009 = 2 \times 504 + 1$
$1009 = 3 \times 336 + 1$
$1009 = 5 \times 201 + 4$
$1009 = 7 \times 144 + 1$
$1009 = 11 \times 91 + 8$
$1009 = 13 \times 77 + 8$
$1009 = 17 \times 59 + 6$
$1009 = 19 \times 53 + 2$
$1009 = 23 \times 43 + 20$
$1009 = 29 \times 34 + 23$
$1009 = 31 \times 32 + 17$

لاحظ أن كل بواقي القسمة غير معدومة.

ومنه:

العدد 1009 أولي.

تعيين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$2m - d = 2017$$

لدينا:

$$d = PGCD(a; b)$$

معناه:

$$\begin{cases} a = d \times a' \\ b = d \times b' \end{cases}$$

حيث:

a' و b' عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما.

ولدينا:

$$PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = a \times b$$

أي:

$$d \times m = a \times b$$

بالتعويض نكتب:

$$d \times m = d \times a' \times d \times b'$$

نجد:

$$m = d \times a' \times b'$$

ولدينا حسب نص التمرين أن:

$$2m - d = 2017$$

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

بالتعويض:

$2 \times d \times a' \times b' - d = 2017$

$d(2a'b' - 1) = 1 \times 2017$ (2017 عدد أولي)

نميز حالتين:

$\begin{cases} d = 1 \\ \text{و} \\ 2a'b' - 1 = 2017 \end{cases}$ أو $\begin{cases} d = 2017 \\ \text{و} \\ 2a'b' - 1 = 2017 \end{cases}$

الحالة الأولى: $d = 1$

معناه:

$2a'b' - 1 = 2017$

$2a'b' = 2018$

$a'b' = 1009$

$a'b' = 1 \times 1009$ (1009 عدد أولي)

نميز حالتين:

$\begin{cases} a' = 1 \\ \text{و} \\ b' = 1009 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a' = 1009 \\ \text{و} \\ b' = 1 \end{cases}$

قيم a' و b' هي:

$(a'; b') = \{(1; 1009), (1009; 1)\}$

ومنه:

الثنائيتين $(a; b)$ من $\mathbb{N}^2$ من أجل $d = 1$ هما:

$(a; b) = \{(1 ; 1009), (1009; 1)\}$

الحالة الثانية: $d = 2017$

معناه:

$2017(2a'b' - 1) = 2017$

$2a'b' - 1 = 1$

$2a'b' = 2$

$a'b' = 1$

نميز حالة واحدة:

$\begin{cases} a' = 1 \\ \text{و} \\ b' = 1 \end{cases}$

قيم a' و b' هي:

$(a'; b') = \{(1 ; 1)\}$

ومنه:

الثنائية $(a; b)$ من $\mathbb{N}^2$ من أجل $d = 2017$ هي:

$(a; b) = \{(2017; 2017)\}$

نتيجة:

الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$2m - d = 2017$

هي:

$(a; b) = \{(1 ; 1009), (1009; 1), (2017; 2017)\}$

نلخص نتائج السؤال 3) في الجدول التالي:

	الحالة الأولى		الحالة الثانية
d	1	1	2017
a'	1	1009	1
b'	1009	1	1
$a = da'$	1	1009	2017
$b = db'$	1009	1	2017
$m = da'b'$	1009	1009	2017
$2m - d$	2017	2017	2017

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

دورة 2017 الاستثنائية – شعبة الرياضيات – الموضوع الأول

التمرين

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث:

$$63x + 5y = 159 \ldots (E)$$

1) تحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما ثم بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا.

2) برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة فإن: $x \equiv 3\,[5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E).

3) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha 0\alpha}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ويكتب $\overline{\beta 10\beta 0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5.

جد العددين الطبيعيين α و β ثم اكتب العدد $\lambda + 2$ في النظام العشري.

4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد:

$$3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$$

القسمة على 5.

حيث $(x;y)$ حلول المعادلة (E) و x عدد طبيعي.

الحل

$$63x + 5y = 159 \ldots (E)$$

1) التحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما:

نبحث عن القاسم المشترك الأكبر للعددين 63 و 5:

$63 = 5 \times 12 + 3$

$5 = 3 \times 1 \ + 2$

$3 = 2 \times 1 \ + 1$

$2 = 1 \times 2 \ + 0$

آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمات الإقليدية هو 1.

أي:

$$PGCD(63;5) = 1$$

ومنه:

العددان 63 و 5 أوليان فيما بينهما.

تبيان أن المعادلة (E) تقبل حلولا:

$$63x + 5y = 159 \ldots (E)$$

لدينا:

$$PGCD(63;5) = 1$$

والعدد 1 يقسم العدد 159 (العدد 1 يقسم كل الأعداد).

ومنه:

المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

2) نبرهن أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة فإن:

$$x \equiv 3\,[5]$$

إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) نكتب:

$63x + 5y = 159$

$63x = 159 - 5y$

$63x = 155 + 4 - 5y$

$63x = 5(31 - y) + 4$

$63x = 5y' + 4$

$63x \equiv 4\,[5] \ / (PGCD(63;5) = 1)$

حيث:

$$63x \equiv 3x\,[5]$$

فنكتب:

$3x \equiv 4\,[5] \ / (PGCD(3;5) = 1)$

بضرب طرفي الموافقة في العدد 2 نكتب:

$2 \times 3x \equiv 2 \times 4\,[5]$

$6x \equiv 8\,[5]$

حيث:

$$8 \equiv 3\,[5] \text{ و } 6x \equiv x\,[5]$$

ومنه:

$$x \equiv 3\,[5]$$

استنتج حلول المعادلة (E):

لدينا من 2) أن:

$$x \equiv 3\,[5]$$

أي:

$$x = 5k + 3 \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

نعوض $x = 5k + 3$ في المعادلة (E) فنكتب:

مع تحيات الأستاذ عبد الحميد https://www.facebook.com/bouguetof.hamid/ bouguetof.hamid@yahoo.fr

$63(5k+3)+5y=159$

$315k+189+5y=159$

$-315k-30=5y$

$-5\times 63k-5\times 6=5y$

نجد:

$y=-63k-6\ /\ k\in\mathbb{Z}$

ومنه:

حلول المعادلة (E) هي:

$(x;y)=\{(5k+3;-63k-6)\}\ /\ k\in\mathbb{Z}$

3) إيجاد العددين الطبيعيين α و β:

$$\begin{cases}\lambda=\overline{5\alpha0\alpha}^{7}\\ \lambda=\overline{\beta10\beta0}^{5}\end{cases}$$

لدينا من جهة:

$\lambda=\overline{5\alpha0\alpha}^{7}$

حيث:

$0\le\alpha\le 6$

ولدينا من جهة أخرى:

$\lambda=\overline{\beta10\beta0}^{5}$

حيث:

$0\le\beta\le 4$

فنكتب من جهة:

$\lambda=\overline{5\alpha0\alpha}^{7}$

$\lambda=\alpha\times 7^0+0\times 7^1+\alpha\times 7^2+5\times 7^3$

$\lambda=\alpha+0+49\alpha+1715$

$\lambda=50\alpha+1715\ ...(1)$

ونكتب من جهة أخرى:

$\lambda=\overline{\beta10\beta0}^{5}$

$\lambda=0\times 5^0+\beta\times 5^1+0\times 5^2+1\times 5^3+\beta\times 5^4$

$\lambda=0+5\beta+0+125+625\beta$

$\lambda=630\beta+125\ ...(2)$

بالمساواة بين العلاقتين (1) و (2) نكتب:

$50\alpha+1715=630\beta+125$

$630\beta-50\alpha=1715-125$

$630\beta-50\alpha=1590$

$10\times 63\beta-10\times 5\alpha=10\times 159$

$63\beta-5\alpha=159$

ونكتب:

$63\beta+5(-\alpha)=159\ ...(3)$

ولدينا:

$63x+5y=159\ ...(E)$

بالمطابقة:

$$\begin{cases}\beta=x\\ \alpha=-y\end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases}\alpha=63m+6\\ \beta=5m+3\end{cases}\ /\ m\in\mathbb{N}$$

ومنه:

حلول المعادلة (3) في $\mathbb{N}^2$ هي:

$(\alpha;\beta)=\{(63m+6\,;5m+3)\}\ /\ m\in\mathbb{N}$

لدينا:

$0\le\alpha\le 6$

$0\le 63m+6\le 6$

$-6\le 63m\le 0$

$-\frac{6}{63}\le m\le 0$

أي:

$m=0$

ومنه:

$\alpha=6$

ولدينا:

$0\le\beta\le 4$

$0\le 5m+3\le 4$

$-3\le 5m\le 1$

$-\frac{3}{5}\le m\le\frac{1}{5}$

أي:

$m=0$

ومنه:

$\beta=3$

قيم α و β هي:

$(\alpha;\beta)=\{(6;3)\}$