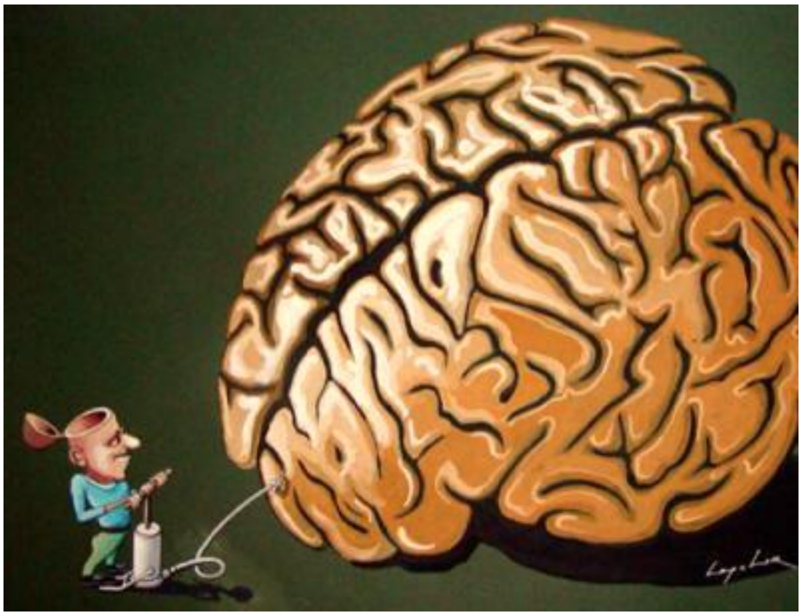
محور

الدوال الأصلية وحساب التكامل

العقل هو ذلك الجزء الذي يميز الإنسان عن غيره من الكائنات،العقل من يستعمله بشكل صحيح يعيش في نعيم ومن يستعمله بشكل خاطئ يجعل حياته جحيما



درس الدوال الأصلية

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة على مجال I . نقول عن الدالة F المعرفة على المجال I والقابلة للاشتقاق على I أنها دالة أصلية للدالة f على المجال I إذا كان من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$

مثال01 :

- $F:x\mapsto 3x^2-6x+7$ هي دالة أصلية للدالة $f:x\mapsto 6x-6$ على $\mathbb{R}$ لأن $F'(x)=f(x)$.
- $F:x\mapsto \dfrac{5x}{x^2+1}$ هي دالة أصلية للدالة $f:x\mapsto \dfrac{-5x^2+5}{\left(x^2+1\right)^2}$ على $\mathbb{R}$ لأن $F'(x)=f(x)$.

تطبيق :

F و G دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=\dfrac{5x^2-x+3}{x^2+x+1}$ و $G(x)=\dfrac{-6x-2}{x^2+x+1}$

تحقق أن F و G أصليتان لنفس الدالة على $\mathbb{R}$.

الحل :

الطريقة الأولى: نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)=G'(x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)=\dfrac{2(3x^2+2x-2)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$ و $G'(x)=\dfrac{2(3x^2+2x-2)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)=G'(x)$. الدالتان F و G هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة الثانية : نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F(x)-G(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$$F(x)-G(x)=\frac{5x^2-x+3}{x^2+x+1}-\frac{-6x-2}{x^2+x+1}=\frac{5x^2-x+3+6x+2}{x^2+x+1}=\frac{5x^2+5x+5}{x^2+x+1}=\frac{5\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}=5$$

أي $\left[F(x)-G(x)\right]'=0$ ومنه $F'(x)=G'(x)$ لأن مشتقة 5 تساوي صفر.

2. مجموعة الدوال الأصلية لدالة

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل عدد لانهائي من الدوال الأصلية على I من الشكل $x\mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت. دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

مثال:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $f(x)=6x^2+10x-8$. كل الدوال $F_1:x\mapsto 2x^3+5x^2-8x+1$ ، $F_2:x\mapsto 2x^3+5x^2-8x+13$ ، $F_3:x\mapsto 2x^3+5x^2-8x+\sqrt{7}$ هي دوال أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بِـ $F(x)=2x^3+5x^2-8x+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

3. الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير

f دالة مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.
توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

مثال :

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=12x^2-2x+3$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة f هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=4x^3-x^2+3x+c$. توجد دالة أصلية وحيدة تأخذ القيمة 7 من أجل $x=1$ أي $F(1)=7$ أي $4-1+3+c=7$ ومنه $c=1$ أي $F(x)=4x^3-x^2+3x+1$.

4. الدوال الأصلية لدوال مألوفة

الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال F. يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

$I=$	$F(x)=$	$f(x)=$
$\mathbb{R}$	$F(x)=ax+c$	(a عدد حقيقي) $f(x)=a$
$\mathbb{R}$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+c$	$f(x)=x$
$\mathbb{R}$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	($n\in\mathbb{N}^*$) $f(x)=x^n$
$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$	$F(x)=-\frac{1}{x}+c$	$f(x)=\frac{1}{x^2}$
$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$	$F(x)=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$f(x)=\frac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)
$]0;+\infty[$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$F(x)=-\cos x+c$	$f(x)=\sin x$
$\mathbb{R}$	$F(x)=\sin x+c$	$f(x)=\cos x$
$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k\in\mathbb{Z})$	$F(x)=\tan x+c$	$f(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

تطبيق :

عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x)=8x^3-4x+7$ ، $I=\mathbb{R}$ (2 $g(x)=x^2+\sin x-\frac{1}{x^2}$ ، $I=]0;+\infty[$ (3 $h(x)=\frac{3}{x^4}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\cos x$ ، $I=]0;+\infty[$

الحل :

1) F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـِ: $F(x)=8\times\frac{1}{3+1}x^{3+1}-4\times\frac{1}{2}x^2+7x+c=2x^4-2x^2+7x+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) G دالة أصلية للدالة g على $]0;+\infty[$ معرفة بِـ :

$$G(x)=\frac{x^{2+1}}{2+1}+(-\cos x)-\left(-\frac{1}{(2-1)x^{2-1}}\right)+c=\frac{1}{3}x^3-\cos x+\frac{1}{x}+c$$ حيث c ثابت حقيقي.

حكمـة

من زاد في حبه لنفسه .. زاد كره الناس له

3) H دالة أصلية للدالة h على $]0;+\infty[$ معرفة بِـ :

$$H(x)=3\left(-\frac{1}{(4-1)x^{4-1}}\right)+2\sqrt{x}-(\sin x)+c=-\frac{1}{x^3}+2\sqrt{x}-\sin x+c$$

5. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

F الدوال الأصلية للدالة f على I	الشروط الخاصة بالدالة u	الدالة f
$F=\frac{1}{2}u^2+c$		$f=u'u$
$F=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$		$(n\in\mathbb{N}^*)$ $f=u'u^n$
$F=-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I : $u(x)\neq 0$	$f=\frac{u'}{u^2}$
$F=-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I : $u(x)\neq 0$	$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})$ $f=\frac{u'}{u^n}$
$F=2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I : $u(x)>0$	$f=\frac{u'}{\sqrt{u}}$

تطبيق01 : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x)=(3x^2+2x)(x^3+x^2+7)^2$ ، $I=\mathbb{R}$ 2) $g(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $h(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+11)^3}$ ، $I=\mathbb{R}$

الحل :

1) $f(x)=(3x^2+2x)(x^3+x^2+7)^2$: الدالة f من الشكل $u'u^n$ حيث $u(x)=x^3+x^2+7$ و $u'(x)=3x^2+2x$

و $n=2$.

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ أي $F(x)=\frac{1}{2+1}\left(x^3+x^2+7\right)^{2+1}+c=\frac{1}{3}\left(x^3+x^2+7\right)^3+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $g(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$: الدالة g من الشكل $\frac{u'}{u^2}$ حيث $u(x)=x^2+1$ و $u'(x)=2x$.

دوالها الأصلية من الشكل $-\frac{1}{u}+c$ أي $G(x)=-\frac{1}{x^2+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

3) $h(x)=\frac{2x+1}{\left(x^2+x+11\right)^3}$: الدالة h من الشكل $\frac{u'}{u^n}$ حيث $u(x)=x^2+x+11$ و $u'(x)=2x+1$.

دوالها الأصلية من الشكل $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ أي $H(x)=-\frac{1}{(3-1)\left(x^2+x+11\right)^{3-1}}+c=-\frac{1}{2\left(x^2+x+11\right)^2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

تطبيق02 : عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

1) $f(x)=(x+1)\left(2x^2+4x+1\right)^2$ ، $I=\mathbb{R}$ 2) $g(x)=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $h(x)=\frac{3x+1}{\left(3x^2+2x+7\right)^3}$ ، $I=\mathbb{R}$ 4) $v(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، $I=\mathbb{R}$

طريقة :

عنما لا نستطيع تطبيق مباشرة القواعد السابقة لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1) ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو $\frac{u'}{u^n}$ أو $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد عبارة $u(x)$.

2) حساب $u'(x)$ ثم تعيين عددا حقيقيا k (حسب كل حالة) بحيث $f=k\times u'u^n$ أو $f=k\times\frac{u'}{u^n}$ أو $f=k\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

3) تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

الحل:

1) $f(x)=(x+1)\left(2x^2+4x+1\right)^2$ تكافئ $f(x)=\frac{1}{4}(4x+4)\left(2x^2+4x+5\right)^2$ وهي من الشكل $f=k\times u'u^n$ أي $f=\frac{1}{4}\times u'u^2$ حيث $u(x)=2x^2+4x+1$ و $u'(x)=4x+4$.

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{4}\times\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ وبالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$،

$F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\left[u(x)\right]^3=\frac{1}{12}\left(2x^2+4x+1\right)^3+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $g(x)=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ من الشكل $g=k\times\frac{u'}{u^2}$ أي $g=\frac{1}{2}\times\frac{u'}{u^2}$ حيث $u(x)=x^2+1$ و $u'(x)=2x$.

دوالها الأصلية من الشكل $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{u}\right)+c$ أي $G(x)=-\frac{1}{2x^2+2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

3) $h(x)=\dfrac{3x+1}{(3x^2+2x+7)^3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6x+2}{(3x^2+2x+7)^3}$. الدالة h من الشكل $h=k\times\dfrac{u'}{u^n}$ أي $h=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{u^n}$ حيث $u(x)=3x^2+2x+7$ و $u'(x)=6x+2$.

دوالها الأصلية من الشكل $\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}\right)+c$ أي $H(x)=-\dfrac{1}{4(3x^2+2x+7)^2}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

4) $v(x)=\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+1}}=5\times\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ من الشكل $v=k\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ أي $v=5\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ حيث $u(x)=x^2+1$ و $u'(x)=2x$.

دوالها الأصلية من الشكل $V(x)=5\times\sqrt{x^2+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

6) الدوا الدوال الأصلية للدوال $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I :

بما أنّ الدالة $F:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I، $F'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

فإنّ الدالة $F:x\mapsto e^{u(x)}$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I.

تطبيق : عين في كل حالة من الحالتين التاليتين دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=2xe^{x^2+3}$ على $I=\mathbb{R}$. 2) $f(x)=(x+1)e^{x^2+2x-5}$ على $I=\mathbb{R}$.

الحل :

1) $f(x)=2xe^{x^2+3}$ من الشكل $f(x)=u'(x)e^{u(x)}$ حيث $u(x)=x^2+3$ و $u'(x)=2x$ دوالها الأصلية من الشكل $F:x\mapsto e^{u(x)}+c$ أي $F(x)=e^{x^2+3}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $f(x)=(x+1)e^{x^2+2x-5}=\dfrac{1}{2}(2x+2)e^{x^2+2x-5}$ من الشكل $f(x)=\dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ حيث $u(x)=x^2+2x-5$ و $u'(x)=2x+2$ دوالها الأصلية من الشكل $F:x\mapsto\dfrac{1}{2}e^{u(x)}+c$ أي $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2+2x-5}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

7) الدوال الأصلية للدوال من الشكل $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

بما أن الدالة $F:x\mapsto\ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I، $F'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

فإن الدالة $F:x\mapsto\ln[u(x)]$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ على I.

تطبيق: عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ ، $I=]-1;+\infty[$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$ ، $I=]2;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ ، $I=]0;\pi[$ 4) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ ، $I=]1;+\infty[$ 5) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$.

الحل :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ من الشكل $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\ln(x+1)+c$ على $]-1;+\infty[$ حيث c ثابت حقيقي.

2) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}$ دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\ln(x-2)-\ln(x+2)=\ln\dfrac{x-2}{x+2}+c$ على $]2;+\infty[$ حيث c ثابت حقيقي..

3) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ من الشكل $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\ln(\sin x)+c$ على $]0;\pi[$ حيث c ثابت حقيقي.

4) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2-1}$ من الشكل $f(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2-1)+c$ على $]1;+\infty[$ حيث c ثابت حقيقي.

5) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ من الشكل $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ومنه دوالها الأصلية هي F حيث $F(x)=\ln(e^x+1)+c$ على $\mathbb{R}$ حيث c ثابت حقيقي.

حكمة

قال أحد الحكماء لابنه في موعظة : يا بني .. إذا أردت أن تصاحب رجلاً فأغضبه .. فإن أنصفك من نفسه فلا تدع صحبته .. وإلا فاحذره.

المعادلات التفاضلية

1) المعادلات التفاضلية من الشكل $y'=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و كانت F دالة أصلية لها على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

- حلول المعادلة التفاضلية $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ في $]-1;+\infty[$ هي الدوال y حيث: $y=-\dfrac{1}{x+1}+c$ حيث c ثابت حقيقي.
- حلول المعادلة التفاضلية $y'=\ln x$ في $]0;+\infty[$ هي الدوال y حيث: $y=x\ln x-x+c$ حيث c ثابت حقيقي.

2) المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=f(x)$

مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I و إذا كانت F دالة أصلية لها على I و كانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=f(x)$ هي الدوال y حيث: $y=G(x)+c_1x+c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

مثال:

- حلول المعادلة التفاضلية $y''=\cos x$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=-\cos x+c_1x+c_2$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

- حلول المعادلة التفاضلية $y''=4e^{2x}$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=e^{2x}+c_1x+c_2$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

3) المعادلات التفاضلية من الشكل $y''=-\omega^2 y$

مبرهنة : إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y''=-\omega^2 y$ هي الدوال y حيث:
$y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

مثال:

- حلول المعادلة التفاضلية $y''=-4y$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos(2x)+c_2\sin(2x)$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.
- حلول المعادلة التفاضلية $y''+3y$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال y حيث: $y=c_1\cos\left(\sqrt{3}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{3}x\right)$ حيث c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

تطبيق :

بين أن الدالة $f:x\mapsto Ae^{3x}+Be^{-3x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y"-9y=0$

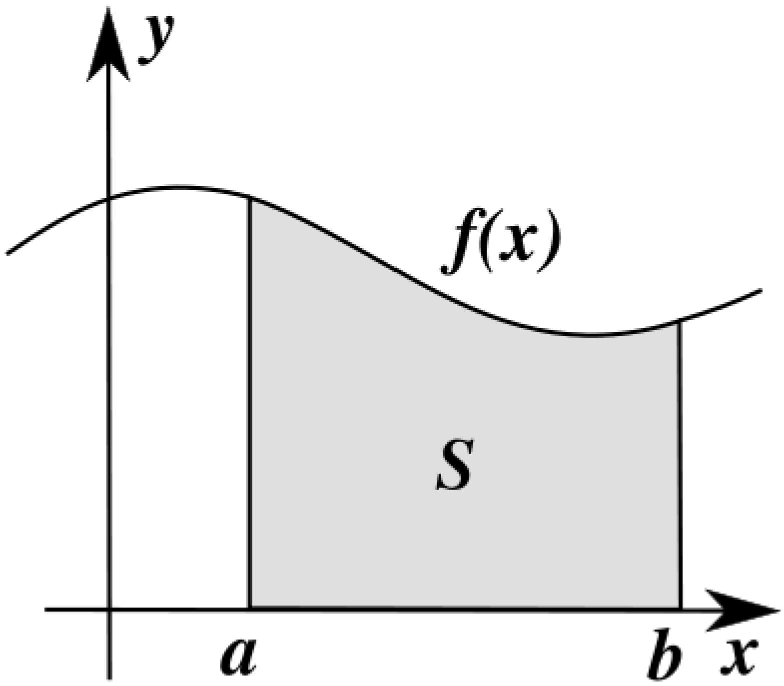
الحل :

من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=3Ae^{3x}-3Be^{-3x}$ و $f''(x)=9Ae^{3x}+9Be^{-3x}=9f(x)$
ومنه $f"(x)-9f(x)=0$ ومنه f هي حل للمعادلة التفاضلية $y"-9y=0$.

حكمــة

سئل الاسكندر: لِمَ تُكرم معلمك فوق كرامة أبيك فقال : إن أبي سبب حياتي الفانية ومعلمي سبب حياتي الباقية

حساب التكامل



تعلمت أنه خير للإنسان أن يكون كالسلحفاة فى الطريق الصحيح على أن يكون غزالاً فى الطريق الخطأ.

تعلمت أن المتسلق الجيد يركز على هدفه ولا ينظر إلى الأسفل حيث المخاطر التي تشتت الذهن.

تعلمت أن الذي ينجح في النهاية من لديه القدرة على التحمل والصبر.

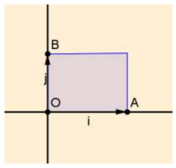
تعلمت أن من أكثر الأسلحة الفعالة التي يملكها الإنسان هي الوقت والصبر.

تعلمت أنه عندما تضحك يضحك لك العالم وعندما تبكي تبكي وحدك.

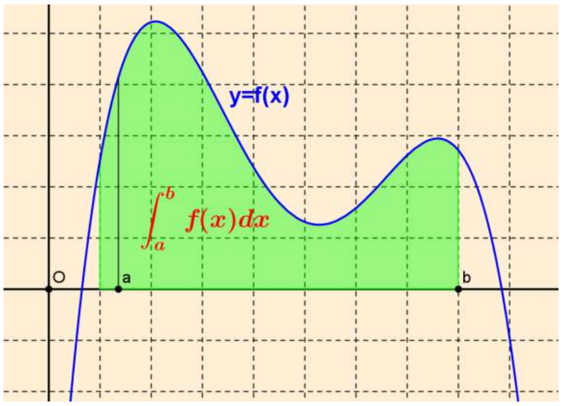
تعلمت أن الشجرة المثمرة هي من يهاجمها الناس.

درس : حساب التكامل

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ ولتكن A و B نقطتان بحيث $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$. وحدة المساحة هي مساحة المستطيل الذي ضلعاه $[OA]$ و $[OB]$.

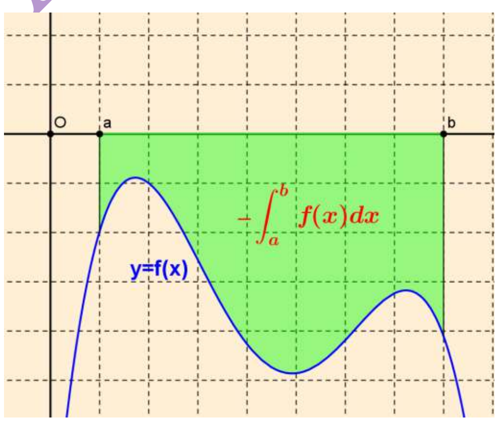


1) إذا كانت الدالة f مستمرة وموجبة على المجال $[a\,,\,b]$ ، فإن مساحة الحيز من المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني الممثل للدالة f والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي التكامل من a إلى b للدالة f ونرمز لها $\int_a^b f(x)\,dx$ وحدة المساحة



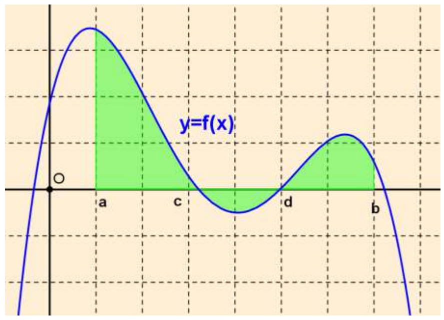
هذه المساحة هي مجموعة النقط $(x\,,\,y)$ التي تحقق $\begin{cases} a\leq x\leq b \\ 0\leq y\leq f(x) \end{cases}$

2) إذا كانت الدالة f مستمرة وسالبة على المجال $[a\,,\,b]$ ، فإن مساحة الحيز من المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني الممثل للدالة f والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي التكامل من a إلى b للدالة f ونرمز لها $-\int_a^b f(x)\,dx$ وحدة المساحة.



3) إذا كانت الدالة f مستمرة وتغير إشارتها على المجال $[a\,,\,b]$. نجزء هذا المجال إلى مجالات جزئية تحافظ في كل منها الدالة f على إشارة ثابتة ونطبق القواعد السابقة . الجزء الملون هو مساحة الحيز من المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني الممثل للدالة f والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

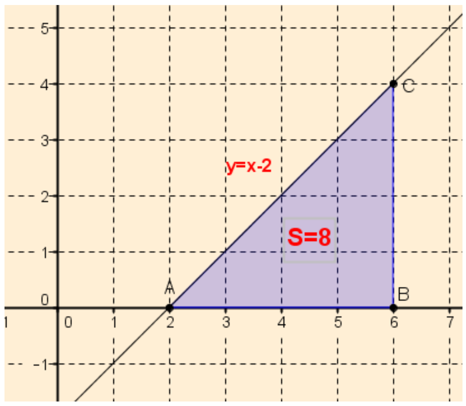


أمثلة :

1) أحسب التكامل $\int_{2}^{6}(x-2)\,dx$

أولا نرسم المنحني الممثل للدالة $f: x \mapsto x+2$ وهي دالة تآلفية . الحيز في هذه الحالة هو **مثلث** ABC

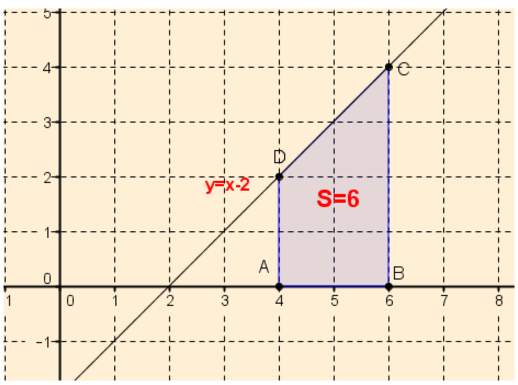
$$\int_{2}^{6}(x-2)\,dx = S_{ABC} = \frac{1}{2}\times AB \times BC = \frac{1}{2}\times 4\times 4 = 8$$



2) أحسب التكامل $\int_{4}^{6}(x-2)\,dx$

أولا نرسم المنحني الممثل للدالة $f: x \mapsto x+2$ وهي دالة تآلفية . الحيز في هذه الحالة هو شبه منحرف $ABCD$

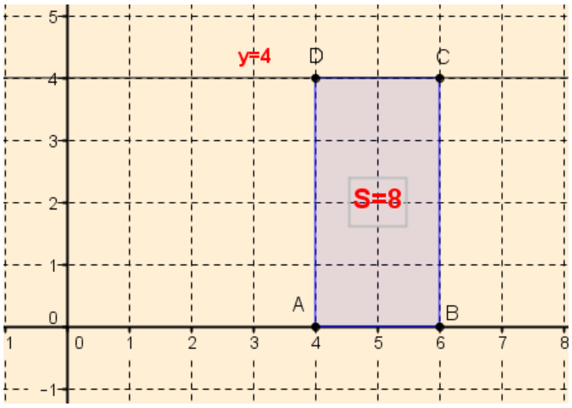
$$\int_{4}^{6}(x-2)\,dx = S_{ABCD} = \frac{(AD+BC)\times AB}{2} = \frac{(2+4)\times 2}{2} = 6$$



3) أحسب التكامل $\int_{4}^{6}4\,dx$

أولا نرسم المنحني الممثل للدالة $f: x \mapsto 4$ وهي دالة ثابتة $(f(x)=4)$. الحيز في هذه الحالة هو مستطيل $ABCD$

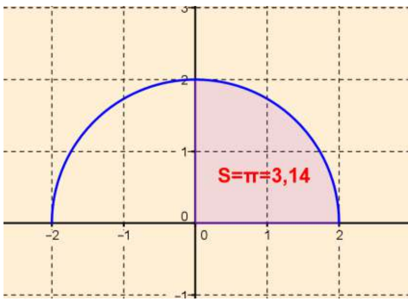
$$\int_{4}^{6}4\,dx = S_{ABCD} = AB\times AD = 2\times 4 = 8$$



4) بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ التي معادلتها $y=\sqrt{4-x^2}$ هي نصف دائرة ثم أحسب التكامل $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

$y=\sqrt{4-x^2}$ تكافئ $\begin{cases} y^2=4-x^2 \\ y\geq 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y\geq 0 \end{cases}$ وهي معادلة جزء من الدائرة التي مركزها O وطول نصف قطرها 2 والواقعة فوق محور الفواصل أي نصف دائرة.

التكامل $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ يمثل إذن مساحة ربع الدائرة التي مركزها O وطول نصف قطرها 2 .

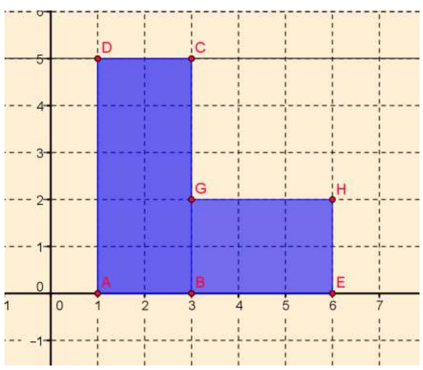


$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\left(\pi\times r^2\right)=\frac{1}{4}\left(\pi\times 2^2\right)=\pi$$

5) نستطيع في بعض الحالات حساب تكامل لدوال غير مستمرة مثلا : $\begin{cases} f(x)=5 & , \ x<3 \\ f(x)=2 & , \ x\geq 3 \end{cases}$ ونحسب $\int_1^6 f(x)\,dx$.

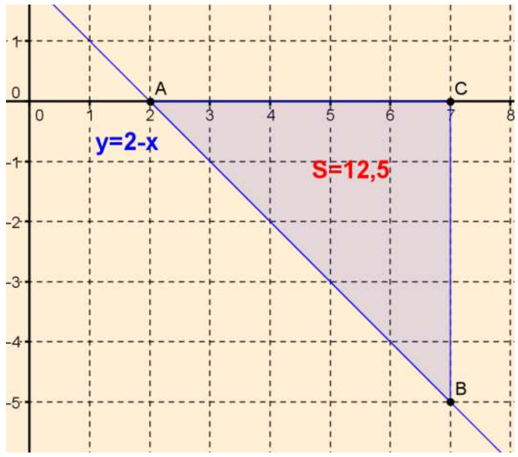
$\int_1^6 f(x)\,dx$ يمثل مساحة الشكل $AEHGCD$ و هو مجموع مساحتي المستطيلين $ABCD$ و $BEHG$

$$\int_1^6 f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^9 f(x)=AB\times BC+BE\times EH=2\times 5+3\times 2=16$$

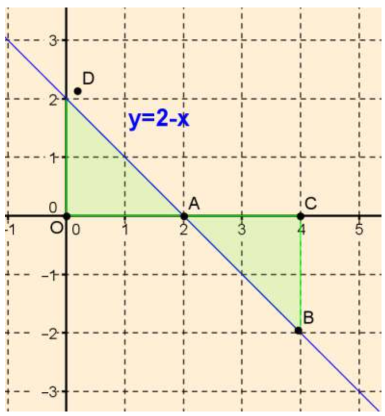


6) أحسب التكامل $\int_2^7 (2-x)\,dx$

$\int_{2}^{7}(2-x)\,d\,x=-\frac{1}{2}\times 5\times 5=-\frac{25}{2}=-12,5$. إذن مساحة المثلث ABC هي $-\int_{2}^{7}(2-x)\,d\,x=12,5$



7) أحسب $\int_{0}^{4}(2-x)dx$



$$\int_{0}^{4}(2-x)dx=S_{OAD}+(-S_{ABC})=\frac{1}{2}(2)(2)-\frac{1}{2}(2)(2)=0$$

الدالة الأصلية و مساحة حيز

f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a\leq b$. (C_f) منحنى f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ و F دالة أصلية لِـ f على I. مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.

تعريف التكامل

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية للدالة f على I، التكامل من a إلى b لِـ f.

و نرمز إليه بالرمز $\int_{a}^{b}f(x)dx$. نقرأ: "التكامل من a إلى b لِـ $f(x)$ تفاضل x".

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=\left[F(x)\right]_{a}^{b}=F(b)-F(a)$$

مثال : نحاول حساب التكاملات السابقة باستعمال الدوال الأصلية :

1) $\int_{2}^{6}(x-2)\,d\,x$ ، 2) $\int_{4}^{6}(x-2)\,d\,x$ ، 3) $\int_{4}^{6}4\,d\,x$ 4) $\int_{0}^{7}(2-x)dx$.

1) $\int_2^6 (x-2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^6 = \left(\frac{36}{2}-12\right)-\left(\frac{4}{2}-4\right)=8$

2) $\int_4^6 (x-2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_4^6 = \left(\frac{36}{2}-12\right)-\left(\frac{16}{2}-8\right)=6$

3) $\int_4^6 4\,dx = [4x]_4^6 = (24)-(16)=8$.

4) $\int_2^7 (2-x)\,dx = \left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_2^7 = \left(14-\frac{49}{2}\right)-\left(4-\frac{4}{2}\right)=-\frac{25}{2}$.

تطبيق :

أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_1^3 \left(3x^2-4x+1\right)dx$ ، 2) $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}dx$ ، 3) $\int_0^2 2xe^{x^2}dx$ ، 4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ ، 5) $\int_{-1}^0 (2x-3)\left(x^2-3x+1\right)dx$

الحل :

1) $\int_1^3 \left(3x^2-4x+1\right)dx = \left[3\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+x\right]_1^3 = \left[x^3-2x^2+x\right]_1^3$
$=(27-18+3)-(1-2+1)=12$

2) $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}dx = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^2 = \ln 5-\ln 1=\ln 5$

3) $\int_0^2 2xe^{x^2}dx = \left[e^{x^2}\right]_0^2 = e^4-e^0=e^4-1$

4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2}-\sin-\frac{\pi}{2}=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=2$

5) $\int_{-1}^0 (2x-3)\left(x^2-3x+1\right)^3dx = \left[\frac{1}{4}\left(x^2-3x+1\right)^4\right]_{-1}^0 = \frac{1}{4}-\frac{625}{4}=\frac{-624}{4}=-156$

خواص التكامل

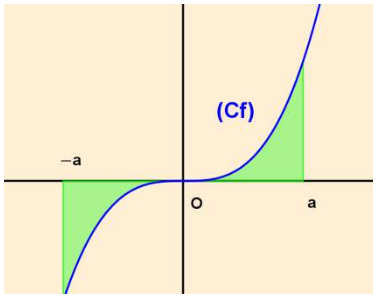
f و g دالتان مستمرتان على المجال I . a ، b عددان حقيقيين من I.

1) $\int_a^a f(x)dx=0$ ، 2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ ، 3) **علاقة شال :** $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ حيث $c\in I$.

4) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_b^a f(x)dx$ حيث $k\in\mathbb{R}$ ، 5) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$.

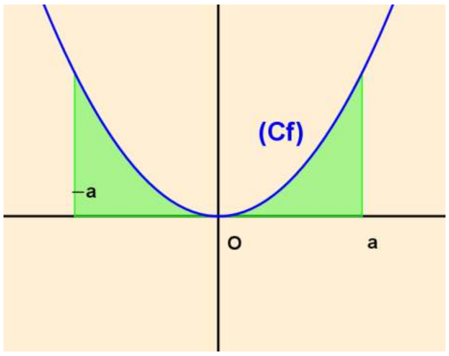
تكامل الدالة الفردية :

إذا كانت الدالة f فردية ومستمرة على مجال I مركزه O فإنه من أجل كل a من I : $\int_{-a}^a f(x)dx=0$



تكامل الدالة الزوجية:

إذا كانت الدالة f زوجيةومستمرة على مجال I مركزه O فإنه من أجل كل a من I: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$



التكامل والمقارنة

f و g دالتان مستمرتان على مجال $[a\,;b]$.

1) إذا كان من أجل كل x من $[a\,;b]$، $f(x)\geq 0$ فإن $\int_{a}^{b} f(x)dx \geq 0$

2) إذا كان من أجل كل x من $[a\,;b]$، $f(x)\leq g(x)$ فإن $\int_{a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} g(x)dx$

مثال : نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي t من $[0\,,\,x]$: $e^{t}\geq 1$.

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0\,,+\infty[$ فإن $e^{x}\geq x+1$.

الحل :

بما أن $e^{t}\geq 1$ فإن $\int_{0}^{x} e^{t}dt \geq \int_{0}^{x} 1dt$ وبالتالي $[e^{t}]_{0}^{x} \geq [t]_{0}^{x}$ أي $e^{x}-e^{0}\geq x-0$ ومنه $e^{x}\geq x+1$

القيمة المتوسطة لدالة على مجال

f دالة مستمرة على مجال $[a\,;b]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a\,;b]$ هي العدد الحقيقي m حيث: $m=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx$.

مثال : عين القيمة المتوسطة للدالة الأسية $(x\mapsto e^{x})$ على المجال $[0\,,\,3]$

الحل :

نعلم ان الدالة الأصلية للدالة $f:x\mapsto e^{x}$ هي الدوال $F:x\mapsto e^{x}+c$ حيث c ثابت حقيقي.

$$m=\frac{1}{3-0}\int_0^3 e^x dx=\frac{1}{3}\left[e^x\right]_0^3=\frac{e^3-e^0}{3}=\frac{e^3-1}{3}$$

حصر القيمة المتوسطة

f دالة مستمرة على مجال $[a\,;b]$.

إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a\,;b]$، $m\le f(x)\le M$ فإن:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بِـ $f(x)=1+\ln(x+1)$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0\ \ ;\ e-1]$.

2) استنتج حصرا لِـ $f(x)$.

3) استنتج حصرا للعدد الحقيقي $I=\int_1^{e-1} f(x)dx$

الحل:

1) لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\frac{1}{x+1}$ أي $f'(x)>0$ ومنه f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ و بالتالي هي كذلك متزايدة تماما على المجال $[0\ \ ;\ e-1]$.

2) بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0\ \ ;\ e-1]$ نستنتج أنه من أجل كل x من $[0\ \ ;\ e-1]$، $f(0)\le f(x)\le f(e-1)$ أي $1\le f(x)\le 2$.

3) بتطبيق حصر القيمة المتوسطة نجد $(e-2)\le\int_1^{e-1} f(x)dx\le 2(e-2)$.

المكاملة بالتجزئة

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I و u' و v' مشتقاتهما على الترتيب مستمرتان على I.

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

مثال :

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب: $A=\int_0^1 xe^{2x}dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

الحل:

1) حساب $A=\int_0^1 xe^{2x}dx$: نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=e^{2x}$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة نكتب : $A=\int_0^1 xe^{2x}dx=\int_0^1 u(x)v'(x)dx=\left[x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\right]_0^1-\int_0^1(1)\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$

و منه $A=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}e^0\right]=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$. إذن $A=\frac{e^2+1}{4}$.

2) حساب $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$: نضع $u(x)=x$ ، $v'(x)=\cos x$ و منه $u'(x)=1$ ، $v(x)=\sin x$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة نكتب : $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,dx=\left[x(\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1)(\sin x)\,dx$

و منه $B=\frac{\pi}{2}-\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\left[-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right]=\frac{\pi}{2}-1$. إذن $B=\frac{\pi}{2}-1$.

حساب الحجوم

حساب حجوم بعض المجسمات البسيطة

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ محاوره $(x'x)$ ، $(y'y)$ و $(z'z)$.

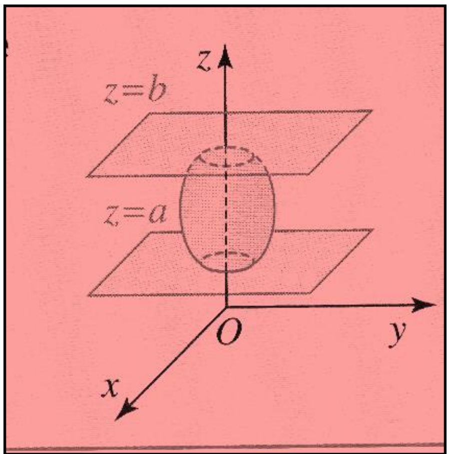
وحدة الحجوم (uv) هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على $(O;I,J,K)$.

المجسم Σ محدد بمستويين (P_1) ، (P_2)

نعتبر في الفضاء مجسما Σ محددا بمستويين موازيين للمستوي (xOy) معادلتاهما: $z=a$ و $z=b$.

نسمي V حجم المجسم و $S(z)$ مساحة مقطع المجسم بمستو موازللمستوي (xOy) راقمه z حيث $a\le z\le b$.

فإن $V=\int_a^b S(z)\,dz$.



حجم مجسم دوراني محوره $(x'x)$

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر الجزء من المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$ المحدد بالمنحني الذي معادلته $y=f(x)$ والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=b$, $x=a$ والمحور $(O,\vec{i})$.

عندما يدورهذا الجزء من المستوي يولد مجسما دورانيا محددا بالمستويين الموازيين لـ $(O,\vec{j},\vec{k})$ راقميهما على الترتيب a و b .

حجم هذا المجسم الدوراني بوحدة الحجوم هو $V=\int_a^b S(x)\,dx=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$

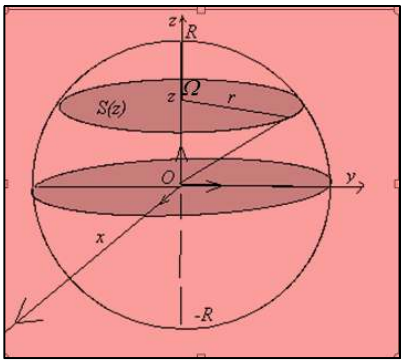
مثال: أحسب V حجم المجسم الدوراني المولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ للحيز المحدد بمنحنى الدالة $f:x\mapsto x^2$ وبالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

الحل: $V=\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(x^4\right)dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{\pi}{5}$

أمثلة متنوعة

1) برهن أن حجم كرة طول نصف قطرها R هو: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

الحل :



نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

الكرة التي مركزها O و طول نصف قطرها R.

مقطع هذه الكرة بمستو مواز للمستوي $\left(xOy\right)$ و راقمه z حيث $-R<z<R$

هي دائرة مركزها $\Omega\left(0\,;0\,;z\right)$ و طول نصف قطرها $r=\Omega M$ مع $OM=R$.

لدينا في المثلث القائم $O\Omega M$: $r^2+z^2=R^2$ ومنه $r^2=R^2-z^2$.

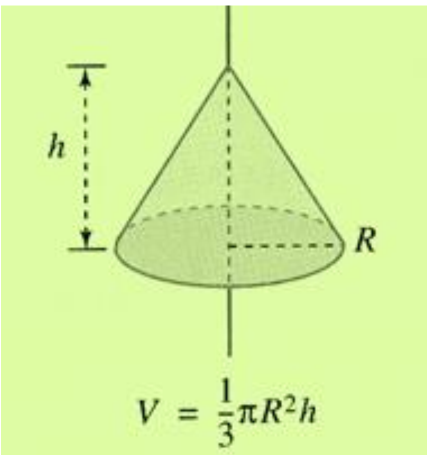
إذن مساحة القرص الذي مركزه Ω و طول نصف قطره R هي: $S\left(z\right)=\pi\left(R^2-z^2\right)$

ونحسب الحجم كما يلي : $V=\int_{-R}^{R}S\left(z\right)dz=\int_{-R}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz$ و بالتالي:

$V=\pi\left[R^2z-\frac{1}{3}z^3\right]_{-R}^{R}=\pi\left[\left(R^3-\frac{1}{3}R^3\right)-\left(-R^3+\frac{1}{3}R^3\right)\right]$ و منه $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ وحدة الحجوم

2) برهن أن حجم المخروط الدوراني الذي راسه O وارتفاعه h و طول نصف قطره R هو $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$

الحل :



ليكن r طول نصف قطر القرص

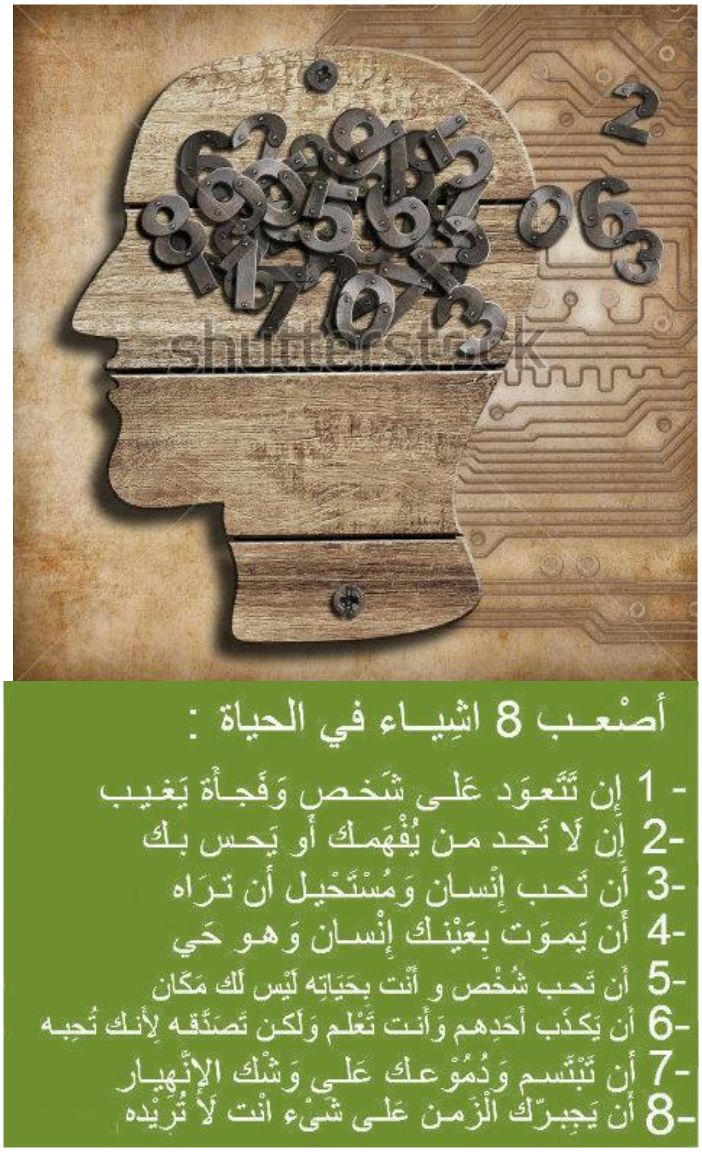
لدينا حسب مبرهنة طاليس $\frac{r}{R}=\frac{z}{h}$ ومنه $r=\frac{Rz}{h}$

ومنه مساحة القرص بدلالة z هي $S\left(z\right)=\pi\times r^2=\pi\left(\frac{Rz}{h}\right)^2=\pi\frac{R^2}{h^2}z^2$

ويكون حجم المخروط

$$V=\int_0^h S\left(z\right)dz=\int_0^h\left(\pi\frac{R^2}{h^2}\right)z^2dz=\left(\pi\frac{R^2}{h^2}\right)\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h=\left(\pi\frac{R^2}{h^2}\right)\left[\frac{h^3}{3}-\frac{0}{3}\right]=\frac{1}{3}\pi R^2h$$

تمارين محلولة للتدريب



تمارين محلولة حول الدوال الأصلية و التكامل

التمرين رقم 01 : أحسب F الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ للدوال التالية:

1) $f(x)=-10x^4+8x^3+3x^2-4x+17$ على المجال $\mathbb{R}$ ، 2) $f(x)=\dfrac{4x^3+2x^2-5}{3}$ على المجال $\mathbb{R}$ ،

3) $f(x)=-2\cos x-4\sin x+3$ على المجال $\mathbb{R}$ ، 4) $f(x)=3-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}$ على المجال $]0\ ,\ +\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2x+3$ على المجال $]0\ ,\ +\infty[$

التمرين رقم 02 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $u'u^n$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=2x\left(x^2-1\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 2) $f(x)=-3(-3x+1)^4$ ، $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=x^2\left(x^3-2\right)^2$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 4) $f(x)=\dfrac{(2x+3)^3}{7}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=e^x\left(e^x-2\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$ ، 6) $f(x)=e^{-2x}\left(e^{-2x}+2\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x}(\ln x)^2$ ، $I=]0;+\infty[$ ، 8) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}\left[\ln(x-1)\right]^2$ ، $I=]1;+\infty[$

9) $f(x)=-2\cos x\sin^2 x$ ، $I=\mathbb{R}$

التمرين رقم 03 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'}{u^n}$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^3}$ ، $I=]-1;+\infty[$ 2) $f(x)=\dfrac{7}{(2x+1)^3}$ ، $I=\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ ، $I=]1;+\infty[$ 4) $f(x)=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$ ؛ $I=]0;\pi[$

التمرين رقم 04 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ ؛ $I=]2;+\infty[$ 2) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ ؛ $I=]-\infty;2[$

3) $f(x)=\dfrac{2e^x}{3\sqrt{e^x+1}}$ ، $I=\mathbb{R}$ 4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}}$ ، $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ ، $I=]1;+\infty[$

التمرين رقم 05 : الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\dfrac{u'}{u}$: أحسب الدوال الأصلية على المجال I لكل من :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ؛ $I=\left]2;+\infty\right[$ 2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ ؛ $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ ؛ $I=\mathbb{R}$ 4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ ؛ $I=\left]0;\pi\right[$

التمرين رقم 06 : أحسب الدوال الأصلية لكل من الدوال التالية على المجال المعطى I:

1) $f(x)=2x^3-4x+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}$ مع $I=\left]0\,;+\infty\right[$.

2) $f(x)=(2x+1)^4$ مع $I=\mathbb{R}$.

3) $f(x)=\dfrac{1}{(3x+2)^2}$ مع $I=\left]0\,;+\infty\right[$.

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+2)^3}$ مع $I=\mathbb{R}$.

التمرين رقم 07 :

لتكن f الدالة المعرفة على $\left]0\ ;\ +\infty\right[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x-3}{(x+1)^2}$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0\ ;\ +\infty\right[$:

$f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$.

2) استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $\left]0\ ;\ +\infty\right[$.

التمرين رقم 08 : أحسب $A=\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx$ ، $B=\displaystyle\int_{-2}^{0}\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx$

التمرين رقم 09 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)$ ونعرف التكامل التالي : $I=\displaystyle\int_0^{\ln 2}f(x)dx$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)>0$ واستنتج إشارة I .

2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث $\dfrac{e^x}{1+e^x}=a+\dfrac{b}{1+e^x}$.

3) أحسب $A=\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{1}{1+e^x}dx$ ثم $B=\displaystyle\int_0^{\ln 2}f'(x)dx$

4) أحسب $f(x)+f'(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل I .

التمرين رقم 10 :

1) أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم فإن $\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx}{x^2+1}$.

2) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $\int_1^2 \frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

التمرين رقم 11 :

أحسب $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,d\,x$

التمرين رقم 12:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2e^{2x}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

2) أحسب $\int_0^1 f(x)dx$

التمرين رقم 13 :

1) احسب التكامل $I_1=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$

2) ليكن $I_2=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$ احسب I_1+I_2 ثم استنتج قيمة I_2 .

التمرين رقم 14 :

نضع $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$.

1) أحسب $A+B$.

2) أحسب باستعمال المكاملة بالتجزئة $A-B$.

3) استنتج من 1) و 2) قيمة كلا من A و B .

التمرين رقم 15 :

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : $A=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ ، $B=\int_1^e \ln t\,dt$ ، $C=\int_{-1}^0 (2x+1)e^{-x}\,dx$.