



ملخص شامل في المتتاليات العددية

السنة الدراسية : 2020-2021

إذا كانت المتباينة تامة نقول عندئذ أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها متزايدة تماما.

2. نقول عن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها متناقصة إذا حققت الشرط التالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$$

إذا كانت المتباينة تامة نقول عندئذ أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها متناقصة تماما.

⚡ ملاحظة هامة :

1. كل متتالية رتيبة إبتداء من رتبة معينة تكون رتيبة.
2. أحيانا دراسة إشارة الفرق لا تكون سهلة فلجأ إلى فكرة ثانية.

إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ذات حدود موجبة لدراسة رتبتها يمكن مقارنة النسبة التالية $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1.

• إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ كانت المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة تماما.

• إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ كانت المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة تماما.

• إذا كان : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ كانت المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثابتة.

4. طبيعة المتتالية :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية. إذا وُجدَ عدد l يحقق الشرط

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$$

فإن هذا العدد وحيدٌ ونسميه نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ونقول إن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب من l أو نقول إنها متقاربة ونهايتها l .

أما إذا لم تتقارب متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ فنقول إنها متباعدة. إن تعيين طبيعة متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يعني دراسة تقاربها أو تباعدها.

مبرهنة :

1. إذا كانت $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

2. إذا كانت $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل

1. **تعريف المتتالية :** لتكن \mathcal{E} مجموعة غير خالية. نسمي متتالية في \mathcal{E} كل تطبيق u منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} (أو جزء من \mathbb{N}) ومستقره \mathcal{E} . ونكتب :

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

↔ نرمز عادة لهذه المتتالية بـ : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ أو (u_n) اختصاراً. يدعى العنصر u_n بالحد العام للمتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

↔ إذا كانت $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ عندئذ نسمي المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بالمتتالية العددية. إنها الحالة التي سندرسها طوال هذا الفصل.

2. المتتالية المحدودة :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية.

1. نقول عن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأعلى إذا كانت مجموعة قيمها كذلك، أي :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \alpha$$

2. نقول عن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها محدودة من الأسفل إذا كانت مجموعة قيمها كذلك، أي :

$$\exists \beta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq \beta$$

3. نقول عن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل، أي :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq \gamma$$

3. المتتالية الرتيبة :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية.

1. نقول عن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ إنها متزايدة إذا حققت الشرط التالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$$



فإنها متقاربة.

فكرة جميلة :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

مبرهنة :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتاليتين حقيقيتين.

1. إن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ إذا فقط إذا

• كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = -\infty$

2. إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ كان $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$

3. إذا كانت $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة وكانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

4. إذا كانت $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تحقق الشرط $u_n \geq \alpha > 0$ مهما كان

العدد $n_1 \leq n$ وكان $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = +\infty$$

5. إذا كان $v_n \leq u_n$ مهما كان العدد $n_1 \leq n$ وكان

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

مبرهنة وتعريف :

نقول إن المتتاليتين الحقيقيتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متجاورتان إذا تحققت الشروط :

• المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة والمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة.

• نتقارب المتتالية $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ من 0.

إن أي متتاليتين متجاورتين متجاورتان ولهما النهاية نفسها.

مثال أول : المتتاليتان $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ متجاورتان. فعلا :

المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متزايدة، لأن :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة، لأن :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n + \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$$

وكذلك لدينا :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n!} \right) = 0$$

لإثبات أن متتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بعدد حقيقي D (أو محدودة من الأعلى بعدد G) يمكن إتباع إحدى الطرق الآتية :

• استعمال الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n \geq D$ (أو لإثبات $u_n \leq G$).

يمكن تأجيل البرهان بالتراجع في هذه الفقرة إلى قراءة ثانية.

• المقارنة بين u_n و D (أو u_n و G) بدراسة إشارة الفرق $u_n - D$ (أو $u_n - G$).

• إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.

مبرهنة :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتاليتين متقاربتين، ولنضع :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$$

1. إن المتتالية $(u_n + \lambda v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة من $l + \lambda l'$ مهما كان العدد λ من \mathbb{R} .

2. إن المتتالية $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة من $|l|$.

3. بافتراض أن $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n$ يكون $l \leq l'$.

4. إن المتتالية $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة من $l \cdot l'$.

5. بافتراض أن $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \neq 0$ وأن $l \neq 0$ تكون المتتالية $\left(\frac{1}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة من $\frac{1}{l}$.

6. إذا كانت $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية جزئية من المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

ملاحظة هامة :

لا تبقى انخاصية 3. صحيحة إذا استبدلنا بالمترابحة \leq مترابحة تامة

<. فعلى سبيل المثال إذا تأملنا المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بالعلاقتين :

$$v_n = \frac{n+2}{n+1} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{n}{n+1}$$

وجدنا أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

ومع ذلك فإن :



مثال ثان : من السهل أن نثبت أن المتتاليتين $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ و $(\beta_n)_{n \geq 1}$ المعرفتين كما يأتي :

$$\beta_n = \alpha_n + \frac{1}{2020n^{2020}} \quad \text{و} \quad \alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2021}}$$

أَنهما متجاورتان.

مبرهنة :

تكن المتتاليات الحقيقية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نفترض أن :

المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تسعيان إلى العنصر α من $\overline{\mathbb{R}}$.¹

من أجل كل n من \mathbb{N} ، لدينا : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

حيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \alpha$

مثال مهم :

تكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة ب : $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^3 + k}$ لدينا :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} : \frac{n}{n^3 + n} \leq \frac{n}{n^3 + k} \leq \frac{n}{n^3 + 1}$$

بأخذ المجموع نجد :

$$\frac{n^2}{n^3 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^3 + k} \leq \frac{n^2}{n^3 + 1}$$

بما أن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3 + n} = 0$$

عملاً بمتقضى مبرهنة السابقة، نجد أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

4. المتتاليات التراجعية (أو التدرجية)

تعريفه :

نسَمي متتالية تراجعية كل متتالية يعطى حدها من الرتبة $n + 1$ بدلالة حد أو عدة حدود من الرتبة أقل من $n + 1$. ويمكن التعبير عن مثل هذه المتتاليات العددية عندما يكون الحد من الرتبة $n + 1$ معطى بدلالة الرتبة n على النحو التالي :

$$\begin{cases} u_0 \in B \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

$$\overline{\mathbb{R}} =]-\infty, +\infty[\cup \{-\infty, +\infty\}^1$$

مع B جزء من \mathbb{R} و $f : B \rightarrow B$ دالة. سنناقش الحالتين التاليتين : 1. إذا كانت الدالة f متزايدة فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ رتيبة. هنا نميز حالتين وهما :

• متزايدة إذا كان $u_0 \leq u_1$.

• متناقصة إذا كان $u_1 \leq u_0$.

2. إذا كانت الدالة f متناقصة فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ليست رتيبة، المتتاليتان الجزئيتان الأساسيتان رتيبتان. نميز حالتين وهما :

• إذا كان $u_0 \leq u_2$ كانت $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة و $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة.

• إذا كان $u_2 \leq u_0$ كانت $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة و $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة.

⚡ ملاحظة هامة :

إذا كانت f دالة مستمرة و $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نحو العدد الحقيقي l فإن l يحقق العلاقة : $f(l) = l$.

أي أن النهاية l تنتمي إلى مجموعة النقاط الصامدة ل f .

تفيد هذه الملاحظة أن البحث عن l يعود إلى حل المعادلة $f(l) = l$ ، إن هذه المعادلة تقدم النهايات الممكنة للمتتالية. فعليه إن لم تقبل هذه المعادلة حلولا، فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ غير متقاربة. وبالعكس، إذا قبلت المعادلة حلولا عدة، فإن المسألة تعود إلى النظر في إمكانية تمتع المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ باحداها نهاية لها.

وقد يمكن للمعادلة أن تقبل حلولا دون أن تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة.

5. المتتالية الحسابية :

نقول أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية، إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n يتحقق إحدى العلاقات :

$$\bullet u_{n+1} - u_n = r \quad \bullet u_{n+1} = u_n + r$$

\Leftarrow العدد الحقيقي r يسمى أساس هذه المتتالية.

\Leftarrow u_0 يسمى الحد الأول لهذه المتتالية.

⚡ ملاحظتان :

1. تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية إذا فقط إذا كان الفرق بين



حين متابعين ثابتا وهذه النسبة الثابتة تسمّى الأساس المتتالية

$$\cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

2. كل متتالية حسابية تكون معرفة بعددها الأول وأساسها أو بحدّها وأساسها.

خاصية مميزة :

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ حسابية ذا فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n العلاقة الموالية :

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$$

وهذا ما يكافئ : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$

الآن نسمي هذا الأخير بالقانون الوسيط الحسابي.

ملاحظة مهمة :

تكون الأعداد α ، β و γ في هذا الترتيب ثلاث حدود لمتتالية حسابية إذا فقط إذا كان $\alpha + \gamma = 2\beta$.

الحد العام لمتتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدّها الأول u_0 . لدينا من أجل كل عدد طبيعي n العلاقة التالية : $u_n = u_0 + nr$.

ملاحظة مهمة :

إذا كان الحد الأول هو u_1 ، يكون لدينا : $u_n = u_1 + (n-1)r$. بصفة عامة : إذا كان u_m و u_n حين من متتالية حسابية أساسها r ، فإن : $u_n = u_m + (n-m)r$ (ترتيب m و n غير مهم) .

اتجاه تغيير متتالية حسابية :

لفترض جدلاً أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية. فإن اتجاه تغيير متتالية حسابية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يتبع إشارة أساسها r ، بعبارة أخرى نميز ثلاث حالات وهي :

1. إذا كان $r > 0$ ، فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة.

2. إذا كان $r < 0$ ، فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة.

3. إذا كان $r = 0$ ، فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثابتة.

مجموع حدود متتالية متتالية حسابية :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها r وحدّها الأول u_0 .

لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$

$\leftarrow u_0$ الحد الأول للمجموع S_n .

$\leftarrow u_n$ الحد الأخير للمجموع S_n .

$\leftarrow (n+1)$ عدد حدود المجموع S_n .

ملاحظتان :

1. لدينا : $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$

2. ليكن m عدد طبيعي، يكون لدينا :

$$u_m + u_{m+1} + \dots + u_n = \frac{(n-m+1)(u_m + u_n)}{2}$$

5. المتتالية الهندسية :

نقول إن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي وليكن q بحيث، من أجل كل عدد طبيعي n يحقق إحدى العلاقتين :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad \text{أو} \quad u_{n+1} = qu_n$$

$\leftarrow q$ نسمي q أساس المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ملاحظات :

1. تكون متتالية التي حدودها غير منعدمة هندسية إذا فقط إذا كان حاصل قسمة حين متابعين ثابت.

2. تكون المتتالية هندسية معرفة بأحد حدودها وأساسها.

3. إذا كان $u_0 = 0$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $u_n = 0$.

4. إذا كان $q = 0$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، يكون لدينا $u_n = 0$.

5. إذا كان $q = 1$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون لدينا $u_n = u_0$.

خاصية مميزة :

تكون المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ هندسية إذا فقط إذا كان، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2$$

الآن نسمي هذا الأخير بالقانون الوسيط الهندسي.

ملاحظة :

تكون الأعداد α ، β و γ في هذا الترتيب ثلاث حدود متتالية هندسية إذا فقط إذا كان : $\alpha\gamma = \beta^2$.

الحد العام لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي q



وحدها الأول u_0 . من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا :

$$u_n = u_0 q^n$$

ملاحظة قيمة :

إذا كان u_1 هو الحد الأول، يكون لدينا : $u_n = u_1 q^{n-1}$.
بصفة عامة : إذا كان u_m و u_n حدين من متتالية هندسية أساسها

$$q$$
، فإن : $u_n = u_m q^{n-m}$ (ترتيب m و n غير مهم).

اتجاه تغيير متتالية هندسية :

لنفترض أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية. الآن لنلخص اتجاه تغيير متتالية هندسية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ونرمز للأساس المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، بالرمز q ، ولنفترض أيضا $u_0 \neq 0$ (تم مناقشة حالة $u_0 = 0$ سابقاً) ولنناقش معاً الحالات التي تصادفنا :

1. إذا كان $q = 0$ ، من هذا الأخير نلزم بأن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مستقرة.
2. إذا كان $q < 0$ ، وهذا ما يوحي لنا بأن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ غير رتيبة.
3. إذا كان $q > 0$ ، فالاتجاه تغيير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ يتبع إشارة المقدار $u_0(q - 1)$ في هذه الحالة سنناقش معاً ثلاث حالات وهي :

1. إذا كان $u_0(q - 1) > 0$ ، هذا يلزم بأن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة.

2. إذا كان $u_0(q - 1) < 0$ ، هذا يلزم بأن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متناقصة.

3. إذا كان $u_0(q - 1) = 0$ ، هذا يلزم بأن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثابتة.

مجموع حدود متتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0 .

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \begin{cases} u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & si : q \neq 1 \\ (n + 1) u_0, & si : q = 1 \end{cases}$$

$u_0 \leftarrow S_n$: الحد الأول للمجموع

$(n + 1) \leftarrow S_n$: عدد حدود المجموع

ملاحظة :

لنفترض أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q \neq 1$.

$$1. \text{ لدينا دوماً : } u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

2. ليكن m عدد طبيعي ويحقق أيضا $m < n$ ، عندئذ يكون لدينا العلاقة التالية :

$$u_m + u_{m+1} + \dots + u_n = u_m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}$$

6. مبدأ الاستدلال بالتراجع :

مسئلة : $P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n .

ليكن n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.

2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي k أكبر

من أو يساوي n_0 أي $P(k)$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة

الخاصية من أجل $k + 1$ أي $P(k + 1)$.

ملاحظتان :

1. عند الانتهاء من المرحلتين نقر أن الخاصية صحيحة من أجل

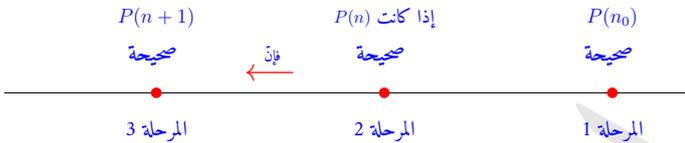
كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

2. نترجم الشرط الثاني بالقول أن الخاصية وراثية أي أنها تنتقل

من عدد طبيعي n إلى العدد الذي يتبعه $n + 1$.

3. التأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 ضروري جدا لأنه

يمكن أن تكون خاصية وراثية دون أن تكون صحيحة.



هنى يُستعمل الاستدلال بالتراجع :

يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع على صحة خاصية

متعلقة بمجموعة الأعداد الطبيعية.



تدريب في المتتاليات العددية

تمارين رقم : 01

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة على النحو التالي :

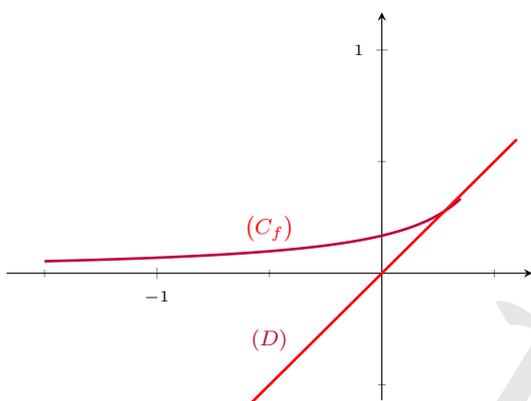
$$\begin{cases} u_0 = \alpha , \text{ et } u_1 = \beta, & (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ 3u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}, & n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. أحسب القيمة العددية للحددين u_2 و u_3 بدلالة α و β .
2. من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
 - أ- أحسب الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بدلالة الفرق $(\beta - \alpha)$.
 - ب- بين أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هي متتالية هندسية أساسها $-\frac{2}{3}$.
 - ج- عين عبارة الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بدلالة $(\beta - \alpha)$.
 - د- أحسب المجموع S_n بدلالة n ، مع : $S_n = v_2 + v_4 + \dots + v_{n-1}$.
3. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون لدينا : $u_n = u_0 + v_0 + v_1 + S_n$.
 - ب- استنتج حينئذٍ عبارة u_n بدلالة n .
 - ج- أحسب النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمارين رقم : 02

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال : $\left[-1, \frac{7}{20}\right]$ كما يلي : $f(x) = -\frac{15}{126x - 89}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y = x$.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة على بحدها الأول $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
1. أ- أنقل الشكل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_3 دون حسابها.
 - ب- ضع تخميناً حول إتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و تقاربها.
 2. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq u_n \leq \frac{5}{18}$.
 - ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة تماماً.



3. لتكن المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $v_n = 1 + \frac{19}{35 - 126u_n}$.
 - أ- برهن أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .
 - ب- أكتب عبارتي v_n و u_n بدلالة n ، واستنتج النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - ج- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع :

$$S_n = \frac{10}{10 - 36u_0} + \frac{10}{10 - 36u_1} + \dots + \frac{10}{10 - 36u_{2021n}}$$

أحسب S_n ، ثم أوجد النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

تمارين رقم : 03

نعتبر المتتالية العددية $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بالصيغة التراجعية التالية :

$$\begin{cases} a_0 = 0 , \text{ et } a_1 = 1 \\ a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{9}a_n, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

من أجل كل عدد طبيعي n ، نعرف المتتاليتين العدديتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بالعلاقتين التاليتين :