الملخص الأوّل الدوال كثيرات الحدود (03 آداب وفلسفة، 03 آداب ولغات أجنبية)

بوعزة مصطفى
أستاذ

دَالة كثير حدود من الدرجة الأولى

f دَالة كثير حدود من الدرجة الأولى

$f(x) = ax + b$ و $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

a و b عددين حقيقيين، $a \neq 0$

01-النهايات

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax) = +\infty$$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax) = -\infty$$

02-اتجاه تغيّر الدَالة f

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$f'(x) = a > 0$

f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$f'(x) = a < 0$

f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

03-جدول تغيّرات الدَالة f

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$-\infty$ ↘ $+\infty$

04-تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات

أ-تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب

نحسب $f(0)$ نجد $f(0) = b$

$$\boxed{(C_f) \cap (yy') = \{A(0; b)\}}$$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تُذكر في التمرين

ب-تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{a}$

$$\boxed{(C_f) \cap (xx') = \left\{B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)\right\}}$$

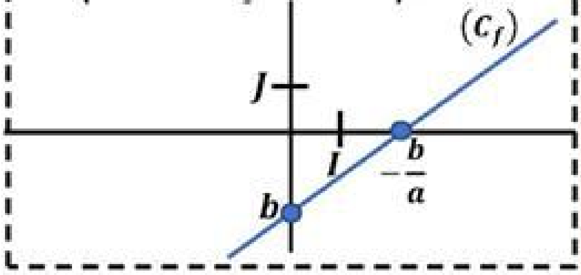
نسمي نقطة التقاطع B إن لم تُذكر في التمرين

05-التمثيل البياني للدَالة f (رسم (C_f))

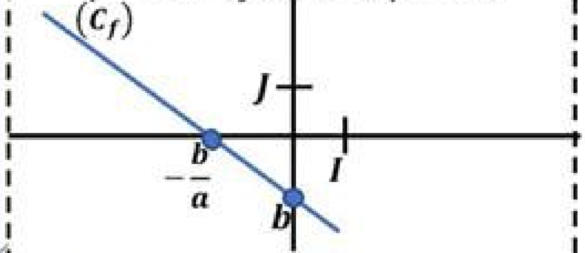
بصفة عامة: منحناها عبارة عن مستقيم ولرسم هذا المستقيم نستعمل جدول مساعد

x		
y		

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)



$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)



② دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

f دالة كثير حدود من الدرجة الثانية

$f(x) = ax^2 + bx + c$ و $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

a، b و c أعداد حقيقية، $a \neq 0$

01-النهايات

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax^2) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax^2) = +\infty$$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax^2) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax^2) = -\infty$$

02-اتجاه تغيّر الدّالة f

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\boxed{f'(x) = 2ax + b}$$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\boxed{f'(x) = 2ax + b}$$

بصفة عامة: لدينا $f'(x)$ من الشكل $\alpha x + \beta$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	عكس إشارة a	0	مثل إشارة a

تذكير: إشارة $\alpha x + \beta$

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$
$\alpha x + \beta$	عكس إشارة α	0	مثل إشارة α

إشارة $f'(x)$

نضع $f'(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$

ومتزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$

إشارة $f'(x)$

نضع $f'(x) = 0$ نجد $x = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

f متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$

ومتناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$

03-جدول تغيّرات الدّالة f

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗	$+\infty$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘	$-\infty$

04-معادلة المستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0

معادلة المستقيم (Δ) من الشكل $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ **حيث** $f'(x_0)$ هو **معامل توجيه** المماس (Δ).

من البيان

ويمكن إيجاد $f'(x_0)$ **من البيان باختيار نقطتين من المماس** $N(x_N; y_N)$ و $M(x_M; y_M)$ **نجد:** $\boxed{f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}}$.

كما يُمكن إيجاد معادلة المماس من البيان (سنشرح هذا الفصل في الدّالة كثير حدود من الدرجة الثالثة)

ملاحظة:

إذا طُلب منا تبيان أنّ $f(x) = (\ldots)(\ldots)$ **ننطلق** من الطرف الثاني $(\ldots)(\ldots)$ باستعمال النشر نصل إلى الطرف الأول $f(x)$، **نستعملها** في حل معادلة $f(x) = 0$.

③ 05-تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات

أ-تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب

نحسب $f(0)$ نجد $f(0) = c$

$$\boxed{(C_f) \cap (yy') = \{A(0;c)\}}$$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تُذكر في التمرين

ب-تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x) = 0$ [حسب اختيار $f(x)$]

نكون أماما ثلاث (03) حالات إما:

الحالة 01: للمعادلة حلين متمايزين x' و x''

$$\boxed{(C_f) \cap (xx') = \{B(x';0); C(x'';0)\}}$$

الحالة 02: للمعادلة حل مضاعف x'

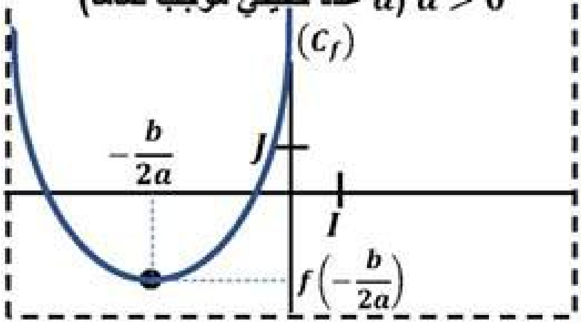
$$\boxed{(C_f) \cap (xx') = \{B(x';0)\}}$$

الحالة 03: المعادلة ليس لها حلول $\boxed{(C_f) \cap (xx') = \{\ \ \}}$

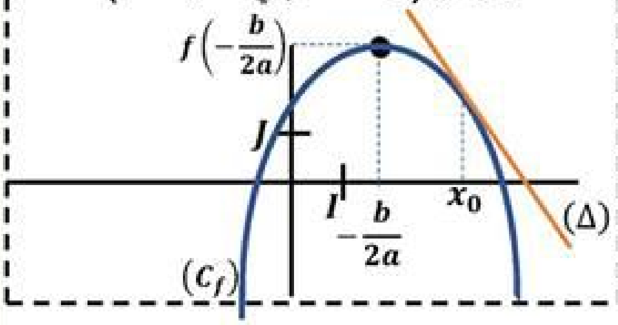
06-التمثيل البياني للدّالة f (رسم (C_f))

بصفة عامة: نُعين مجموعة من النقط $M(x\,;f(x))$ ونصل بينها باليد نحصل على المنحنى (C_f).

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)



$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)



دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة (الأهم)

f دالة كثير حدود من الدرجة الثالثة

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ و $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

a، b، c و d أعداد حقيقية، $a \neq 0$

01-النهايات

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax^3) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax^3) = +\infty$$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (ax^3) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ax^3) = -\infty$$

02-اتجاه تغير الدالة f

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)

$$\boxed{f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c}$$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)

$$\boxed{f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c}$$

(إشارة المشتقة)

بصفة عامة: لدينا $f'(x)$ من الشكل $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

تذكير: إشارة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ **نضع:** $f'(x) = 0$ **نجد:** $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (*)

حسب إشارة المميز $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\Delta > 0$ (المميز موجب تماما)

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$)

x	$-\infty$	x'		x''	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	0	عكس إشارة α	0	مثل إشارة α

$x' = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ و $x'' = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

حيث $\boxed{x' < x''}$، الترتيب في الجدول مهم.

$\Delta = 0$ (المميز معدوم)

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$)

x	$-\infty$	x'	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	0	مثل إشارة α

$x' = \frac{-\beta}{2\alpha}$.

$\Delta < 0$ (المميز سالب تماما)

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	

(إشارة المشتقة حالة خاصة 01)

إذا كانت $f'(x)$ من الشكل $\alpha x^2 + \beta x$ $(\gamma = 0)$

إشارة $\alpha x^2 + \beta x$ **نضع:** $f'(x) = 0$ **نجد:** $\alpha x^2 + \beta x = 0$ **ويكون:** $x(\alpha x + \beta) = 0$ **ومنه:** $\boxed{x = 0}$ أو $\boxed{x = -\frac{\beta}{\alpha}}$

(بعد إيجاد الحلول، نلخص إشارة $f'(x)$ في جدول)

(إشارة المشتقة حالة خاصة 02)

إذا كانت $f'(x)$ من الشكل $\alpha x^2 + \gamma$ $(\beta = 0)$

إشارة $\alpha x^2 + \gamma$ **نضع:** $f'(x) = 0$ **نجد:** $\alpha x^2 + \gamma = 0$ **ويكون:** $\boxed{x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}}$

$x^2 = k > 0$ **نجد** $\boxed{x = \sqrt{k}}$ أو $\boxed{x = -\sqrt{k}}$.

$x^2 = 0$ **نجد** $\boxed{x = 0}$.

$x^2 = k < 0$ **لا توجد قيم x.**

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \gamma$)

x	$-\infty$	$-\sqrt{k}$		$\sqrt{k}$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	0	عكس إشارة α	0	مثل إشارة α

حيث $\boxed{k = -\frac{\gamma}{\alpha}}$.

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \gamma$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	0	مثل إشارة α

نكون أمام هذه الحالة

في حالة $\boxed{\beta = \gamma = 0}$

أي: $f'(x) = \alpha x^2$.

إشارة $f'(x)$ (إشارة $\alpha x^2 + \gamma$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	مثل إشارة α	

03-جدول تغيّرات الدّالة f (5)

(يكون جدول تغيّرات الدّالة f حسب إشارة $f'(x)$)

04-معادلة المستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0

معادلة المستقيم (Δ) من الشكل $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ **حيث** $f'(x_0)$ هو **معامل توجيه** المماس (Δ).

من البيان

ويُمكن إيجاد $f'(x_0)$ **من البيان باختيار نقطتين من المماس** $N(x_N; y_N)$ و $M(x_M; y_M)$

نجد: $\boxed{f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}}$.

كما يُمكن إيجاد معادلة المماس (Δ) من البيان وذلك باتباع ما يلي:

1) نحسب a: $\boxed{a = f'(x_0) = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N}}$.

2) ثمّ نحسب b: (b هو ترتيب نقطة تقاطع المماس (Δ) مع محور التراتيب) $\boxed{b = y_N - ax_N}$

أو $\boxed{b = y_M - ax_M}$ **في الأخير نجد:** $\boxed{(\Delta): y = ax + b}$.

ولدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى مماسه (Δ) : (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

مثلا إذا كان الفرق من الشكل $f(x) - y = x^3$
(ندرس إشارة x)
نُلخص الوضع النسبي في جدول

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية النسبية	(C_f) يقع **تحت** (Δ)	(C_f) **يقطع** (Δ)	(C_f) يقع **فوق** (Δ)

أو كان الفرق من الشكل $f(x) - y = (x+1)^3$
(ندرس إشارة $(x+1)$)
نُلخص الوضع النسبي في جدول

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+
$f(x) - y$	-	0	+
الوضعية النسبية	(C_f) يقع **تحت** (Δ)	(C_f) **يقطع** (Δ)	(C_f) يقع **فوق** (Δ)

ملاحظة: بمأنّ المنحنى (C_f) **غيّرَ وضعيته** بالنسبة إلى مماسه (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 **(لتكن هذه النقطة E)** نقول أنّ المنحنى (C_f) **يخترق** المماس (Δ) في النقطة E **ونستنتج أنّ** النقطة $E(x_0; f(x_0))$ هي نقطة **انعطاف** لـ(C_f).

05-نقطة الانعطاف

لتبيان أنّ $E(x_0; y_0)$ هي نقطة انعطاف لـ (C_f) **نتبع ما يلي:**

1) نحسب $f''(x)$ **(انطلاقا من $f'(x)$)**

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)
$\boxed{f''(x) = 6ax + 2b}$

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)
$\boxed{f''(x) = 6ax + 2b}$

2) ندرس إشارة $f''(x)$ **(نضع** $f''(x) = 0$ **نجد** $x = x_0$**)**

$a > 0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)
إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	-		+

$a < 0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)
إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f''(x)$	+		-

$f''(x)$ **انعدمت** عند x_0 **مُغيّرة إشارتها إذن** $E(x_0; f(x_0))$ نقطة **انعطاف** لـ(C_f) وهي $\boxed{E(x_0; y_0)}$.

ملاحظة:

إذا طُلب منا تبيان أنّ $f(x) = (...)(...)$ **ننطلق** من الطرف الثاني $(...)(...)$ باستعمال النشر نصل إلى الطرف الأول $f(x)$، **نستعملها** في حل معادلة $f(x) = 0$.

05-تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات

أ-تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب

نحسب $f(0)$ نجد $f(0)=d$

$\boxed{(C_f)\cap(yy')=\{A(0;d)\}}$

نسمي نقطة التقاطع A إن لم تُذكر في التمرين

ب-تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x)=0$ [حسب اختيار $f(x)$]

نكون أمام (02) حالتين إما:

الحالة 01: إذا كان $\boxed{d=0}$ نختار عبارة $f(x)$ الموجودة في المعطيات ونقوم بإخراج x كعامل مشترك (ثم نحل معادلة جداء)

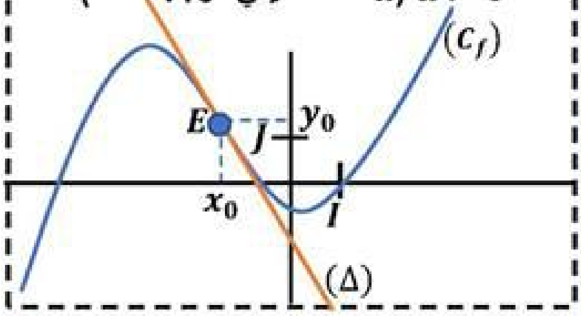
الحالة 02: إذا كان $\boxed{d\neq 0}$ نختار عبارة $f(x)$ الموجودة في الأسئلة (ثم نحل معادلة جداء)

ملاحظة مهمة: عدد الحلول هو عدد نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

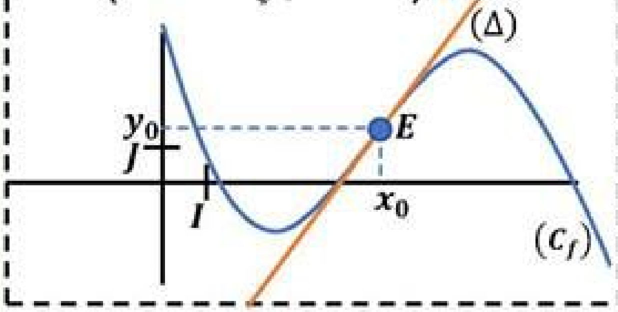
07-التمثيل البياني للدّالة f (رسم (C_f))

بصفة عامة: نُعين مجموعة من النقط $M(x\,;f(x))$ و**نصل بينها باليد** نحصل على المنحنى (C_f).

$a>0$ (a عدد حقيقي موجب تماما)



$a<0$ (a عدد حقيقي سالب تماما)



08-إضافات: (أسئلة طُرحت في الباكالوريا)

السؤال	كيفية الإجابة عليه
1)عيّن نقطتي تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم (D) ذي المعادلة: $y=3x-1$.	نحل المعادلة $f(x)=3x-1$ نجد حلين x_1 و x_2. وبالتالي: $(C)\cap(D)=\{A(x_1\,;y_1)\,;B(x_2\,;y_2)\}$ لإيجاد y_1 نعوض x_1 في عبارة f **أو** في معادلة (D).
2)حل بيانيا المتراجحة ذات المجهول الحقيقي x: $f(x)<-1$.	حلول المتراجحة $f(x)<-1$ هي **فواصل** نقط (C_f) الواقعة **تحت** المستقيم ذو المعادلة $y=-1$ **باستثناء** فواصل نقط **التقاطع**، من البيان نجد $\boxed{S=\cdots}$.
3)عيّن $f'(1)$ و $f'(-1)$، BAC2010	أ) **مماس** المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 **مُوازيا لمحور الفواصل** يعني $\boxed{f'(1)=0}$. ب) **مماس** المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 كذلك **مُوازيا لمحور الفواصل** يعني $\boxed{f'(-1)=0}$.
4)بيّن أنّه يوجد **مماسان** للمنحنى (C_f) **معامل توجيه** كل منهما يساوي 5. BAC2011	**نحل** المعادلة $f'(x)=5$ نجد **حلين**.

انتهى ملخص الدوال كثيرات الحدود.

(7) دَالة تناظرية (كسرية)

f دَالة تناظرية

$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

و $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}=\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$

a، b، c و d أعداد حقيقية، $\boxed{c\neq 0}$ و $\boxed{ad-cb\neq 0}$.

عبارة f تأخذ ثلاثة (03) أشكال وهي كالتالي

الشكل الأوّل	الشكل الثاني (إذا كان $a=0$)	الشكل الثالث
$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$	$f(x)=\frac{b}{cx+d}$	$f(x)=k+\frac{\lambda}{cx+d}$

إذا أعطي الشكل الأول وطُلب منا تبيان الشكل **الثالث**

$$k+\frac{\lambda}{cx+d}=\frac{k(cx+d)+\lambda}{cx+d}=\frac{ax+b}{cx+d}=f(x)$$

01-النهايات

المستقيم المقارب لـ(C_f) (المُوازي لمحور الفواصل)

الشكل الأوّل	الشكل الثاني (إذا كان $a=0$)	الشكل الثالث
المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=\frac{a}{c}}$ **(المُوازي لمحور الفواصل) مقارب** لـ(C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=0}$ **(محور الفواصل) مقارب** لـ(C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.	المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=k}$ **(المُوازي لمحور الفواصل) مقارب** لـ(C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
(نهاية الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$)	**(نهاية الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$)**	**(نهاية الدّالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$)**
$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\frac{a}{c}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{a}{c}\end{cases}$	$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\end{cases}$	$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=k\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k\end{cases}$

المستقيم المقارب لـ(C_f) (المُوازي لمحور التراتيب)

المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x=-\frac{d}{c}}$ **(المُوازي لمحور التراتيب) مقارب لـ(C_f).**

الشكل الأوّل

(نهاية الدّالة f عند $-\frac{d}{c}$)

نُعوض $-\frac{d}{c}$ في البسط نحصل على عدد e.

أ/إذا كان e و c من نفس الإشارة:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-\frac{d}{c}}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{d}{c}}f(x)=+\infty\end{cases}$$

ب/إذا كان e و c مختلفين في الإشارة

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-\frac{d}{c}}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{d}{c}}f(x)=-\infty\end{cases}$$

الشكل الثاني (إذا كان $a=0$)

(نهاية الدّالة f عند $-\frac{d}{c}$)

أ/إذا كان b و c من نفس الإشارة:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-\frac{d}{c}}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{d}{c}}f(x)=+\infty\end{cases}$$

ب/إذا كان b و c مختلفين في الإشارة

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-\frac{d}{c}}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{d}{c}}f(x)=-\infty\end{cases}$$

الشكل الثالث

(نهاية الدّالة f عند $-\frac{d}{c}$)

أ/إذا كان λ و c من نفس الإشارة:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-\frac{d}{c}}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{d}{c}}f(x)=+\infty\end{cases}$$

ب/إذا كان λ و c مختلفين في الإشارة

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-\frac{d}{c}}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}-\frac{d}{c}}f(x)=-\infty\end{cases}$$