طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

ملخص شامل

في

الأعداد المركبة

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 04 / 05

1 تعاريف وخواص هامة في الأعداد المركبة

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ: $\mathbb{C}$
- **الشكل الجبري:** نسمي العبارة $z = x + iy$ بالشكل الجبري للعدد المركب z حيث: x و y عددان حقيقيان و i عنصر غير حقيقي ينتمي إلى $\mathbb{C}$ يحقق: $i^2 = -1$.
- يسمى x **بالجزء الحقيقي** لـ z ويرمز له بالرمز $Re(z)$.
- يسمى y **بالجزء التخيلي** لـ z ويرمز له بالرمز $Img(z)$.
- يسمى $\overline{z}$ **مرافق** العدد المركب z، حيث: $z = z - i(y)$.
- **بعض العمليات في $\mathbb{C}$:**

ليكن $z_n = x_n + iy_n$ أعداد مركبة، وليكن α عدد حقيقي، لدينا مايلي:

- $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2$
  $= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- $; z \neq 0$ $\quad \frac{1}{z} = \frac{1}{x+uy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2-(iy)^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

- **خواص عدد مركب:**

  - $z\overline{z} = \left(Re(z)\right)^2 + \left(Img(z)\right)^2 = x^2 + y^2$
  - $z - \overline{z} = 2iIm(z) = 2iy$
  - $z + \overline{z} = 2Re(z) = 2x$
  - $\overline{\overline{z}} = z$
  - $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$
  - $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ مع $z \neq 0$
  - $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ مع $w \neq 0$

- **ملاحظات:**

  - اذا كان $y = 0$ نقول أن العدد z حقيقي.
  - اذا كان $x = 0$ نقول أن العد z تخيلي صرف.
  - يكون العدد المركب z معدوما اذا وفقط اذا كان $Re(z) = 0$ و $Im(z) = 0$

- **التفسير الهندسي للعدد المركب:**

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لكل نقطة $M(x; y)$ من المستوي نرفق العدد المركب $z = x + iy$.

  - نقول أن النقطة M هي صورة العدد المركب z ، والشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب z.
  - كل نقطة M هي صورة العدد لعدد مركب وحيد $z = x + iy$ ، ونقول أن z **لاحقة** النقطة M.
  - محور الفواصل يسمى **المحور الحقيقي** ومحور التراتيب يسمى **المحور التخيلي** والمستوي يسمى **المستوي المركب**.

- **لاحقة شعاع:** A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي: $z_B - z_A$.

- **طويلة عدد مركب:** نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ: $|z|$ حيث:

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

- **خواص طويلة عدد مركب:**

من أجل كل عددين مركبين z و w. A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب: $AB = |z_B - z_A|$

  - $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
  - $|z| \geq 0$
  - $-|z| \leq Re(z) \leq |z|$
  - $-|z| \leq Im(z) \leq |z|$
  - $|\overline{z}| = |z|$
  - $|-z| = |z|$
  - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
  - $|z| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$
  - $|z|^n = |z^n|$
  - $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ مع $w \neq 0$
  - $|z + w| \leq |z| + |w|$
  - $|z - w| \leq |z| - |w|$

- **التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب:**

$$\boxed{\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{AB}{AC}}$$

- **عمدة عدد مركب:**

  - نسمي عمدة العدد المركب z كل قيس زاوية بالراديان للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.
    ونرمز لها بالرمز: $\theta = \arg(z)$ حيث: $\tan\theta = \frac{y}{x}$.
  - إذا كانت θ عمدة للعدد المركب غير المعدوم z مع $z = x + iy$ و $z \neq 0$ فإن:

$$\boxed{|z| = r \qquad ; \qquad \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}}$$

  - كل عدد مركب غير معدوم له عدد غير منته من العمد، أي إذا كانت θ عمدة لـ z فإن $\theta + 2k\pi$ عمدة له حيث $k \in \mathbb{Z}$.
  - $\arg(0)$ و $\arg(\infty)$ غير معنيين.
  - $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$

- **خواص عمدة عدد مركب غير معدوم:**

  - $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$

الخليل للرياضيات

- $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$
- $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + 2k\pi$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(w) + 2k\pi$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$

التفسير الهندسي لعمدة عدد مركب:

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) &= \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) \\ &= -(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) = -[(\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AC})] = -(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \\ &= (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})\end{aligned}$$

إذن:

$$\boxed{\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})}$$

الشكل المثلثي لعدد مركب: نسمي الكتابة: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بالشكل المثلثي للعدد المركب z،

حيث: $r = |z|$ و $\theta = \arg(z)$

ترميز أولر: نضع: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ، هذا الترميز يسمى ترميز أولر، حيث $e^{\wedge}i\theta$ عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له.

الشكل الأسي لعدد مركب: العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له، يكتب على الشكل:

$$\boxed{z = re^{i\theta}}$$

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z.

دستور موافر:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad ، \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

خواص (دستور موافر):

z و w عددان مركبان، θ و α عمدتاهما على الترتيب، لدينا ما يلي:

- $z \cdot w = |z \cdot w| e^{i(\theta+\alpha)}$
- $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\theta-\alpha)}$ مع $|w| \neq 0$
- $\frac{1}{w} = \frac{1}{|w|} e^{i(-\alpha)}$ مع $|w| \neq 0$
- $\overline{z} = |z| e^{i(-\theta)}$
- $z^n = |z|^n e^{in\theta}$ حيث $n \in \mathbb{N}$
- $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}^*$
- $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$
- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$

الخليل للرياضيات

- $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = i$
- $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = -i$
- $e^{i2k\pi} = 1$
- $e^{i(2k+1)} = -1 = i^2$

توطئة:

ليكن z عدد مركب، θ عمدة له، $r = |z|$ و $k \in \mathbb{Z}$ ، لدينا:

$$\boxed{z = \underbrace{z+iy}_{\text{الشكل الجبري}} = \underbrace{r[\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)]}_{\text{الشكل المثلثي}} = \underbrace{re^{i(\theta+2k\pi)}}_{\text{الشكل الأسي}}}$$

كيفية تعيين قيم العدد الطبيعي n:

- z عدد حقيقي غير معدوم يكافئ $\arg(z) = k\pi$

إذن z^n عدد حقيقي غير معدوم يكافئ $n \cdot \arg(z) = k\pi$

- z عدد حقيقي موجب تماما يكافئ $\arg(z) = 2k\pi$

إذن z^n عدد حقيقي موجب تماما يكافئ $n \cdot \arg(z) = 2k\pi$

- z عدد حقيقي سالب تماما يكافئ $\arg(z) = \pi + 2k\pi$

إذن z^n عدد حقيقي سالب تماما يكافئ $n \cdot \arg(z) = \pi + 2k\pi$

- z تخيلي صرف غير معدوم يكافئ $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

إذن z^n تخيلي صرف غير معدوم يكافئ $n \cdot \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

- z تخيلي صرف موجب تماما يكافئ $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

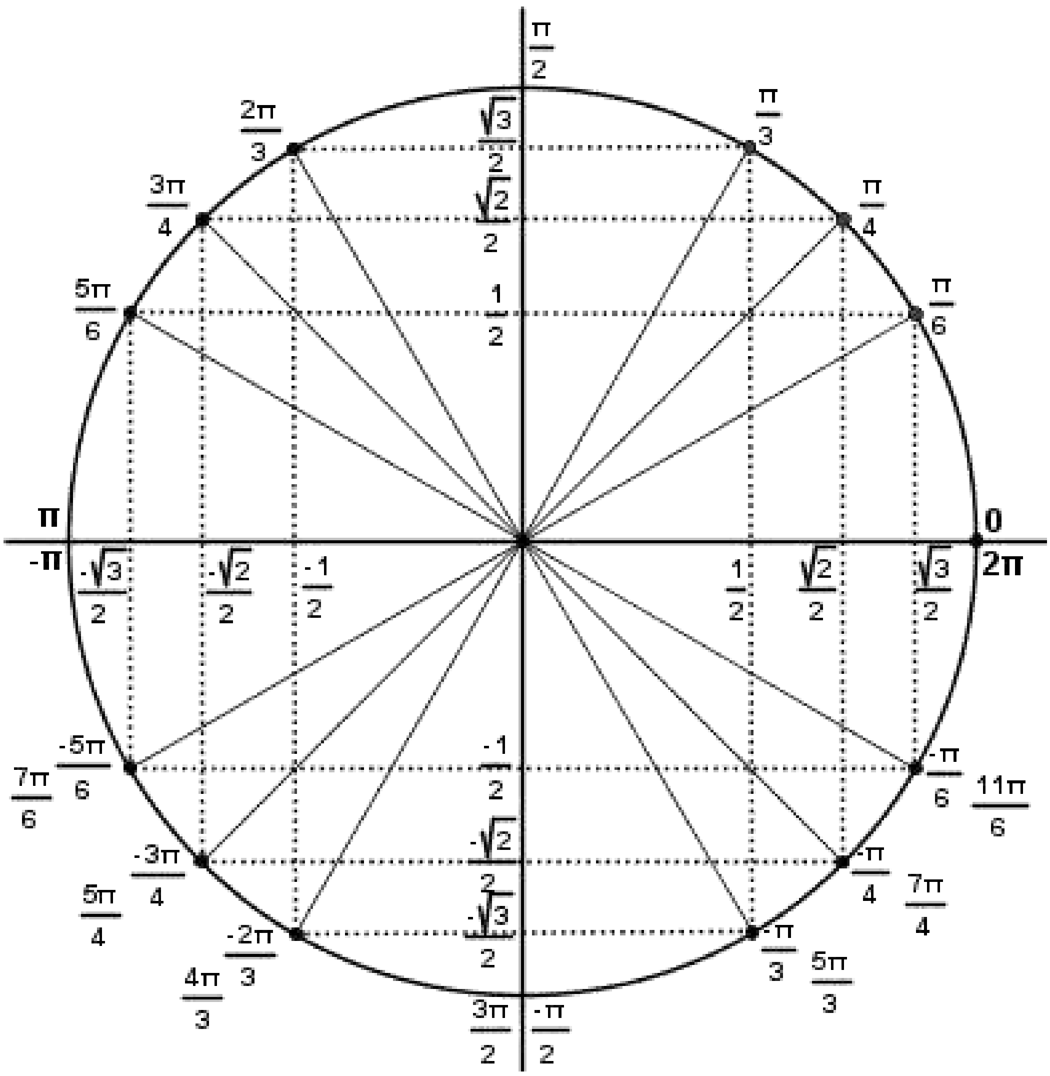
إذن z^n تخيلي صرف موجب تماما يكافئ $n \cdot \arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

- z تخيلي صرف سالب تماما يكافئ $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

إذن z^n تخيلي صرف سالب تماما يكافئ $n \cdot \arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

- z حقيقي يكافئ $\sin\theta = 0$
- z حقيقي موجب يكافئ $\cos\theta \geq 0$ و $\sin\theta = 0$
- z حقيقي حقيقي سالب يكافئ $\cos\theta \leq 0$ و $\sin\theta = 0$
- z تخيلي $\cos\theta = 0$
- z تخيلي صرف موجب يكافئ $\sin\theta \geq 0$ و $\cos\theta = 0$
- z تخيلي صرف سالب يكافئ $\sin\theta \leq 0$ و $\cos\theta = 0$

الدائرة المثلثية:



نتائج (من الدائرة المثلثية): من أجل كل $k \in \mathbb{Z}$ لدينا:

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$
- $\sin(k\pi) = 0$
- $\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & ; \quad k \text{ زوجي} \\ -1 & ; \quad k \text{ فردي} \end{cases}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} 1 & ; \quad k \text{ زوجي} \\ -1 & ; \quad k \text{ فردي} \end{cases}$
- $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ يكافئ $\cos\theta = \sin\theta$
- $\theta = \frac{\pi}{4} - k\pi$ يكافئ $\cos\theta = -\sin\theta$

علاقات مثلثية هامة:

- $\cos(\theta + \alpha) = \cos(\theta)\cos(\alpha) - \sin(\theta)\sin(\alpha)$
- $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta)\cos(\alpha) + \sin(\theta)\sin(\alpha)$

- $\sin(\theta+\alpha)=\sin(\theta)\cos(\alpha)+\cos(\theta)\sin(\alpha)$
- $\sin(\theta-\alpha)=\sin(\theta)\cos(\alpha)-\cos(\theta)\sin(\alpha)$
- $\cos^2(\theta)=\frac{1}{2}[\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta-\alpha)]$
- $\sin^2(\theta)=\frac{1}{2}[\cos(\theta-\alpha)-\cos(\theta+\alpha)]$
- $\sin(\theta)\cos(\alpha)=\frac{1}{2}[\sin(\theta+\alpha)+\sin(\theta-\alpha)]$
- $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$
- $\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)-1=1-2\sin^2(\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$
- $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$
- $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$
- $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$
- $\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$
- $\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta)$
- $\sin(\pi+\theta)=-\sin(\theta)$
- $\cos(\pi+\theta)=-\cos(\theta)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin(\theta)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(\theta)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin(\theta)$
- $\sin(\theta+2k\pi)=\sin(\theta)$
- $\cos(\theta+2k\pi)=\cos(\theta)$
- $\sin(\theta+k\pi)=(-1)^k\sin(\theta)$
- $\cos(\theta+k\pi)=(-1)^k\cos(\theta)$

2 المرجح في المستوي المركب

- المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A ، B و C من المستوي. α ، β و γ أعداد حقيقية.
  - إذا كان: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ فإنه توجد نقطة وحيدة G من المستوي تحقق العلاقة الشعاعية التالية:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

تسمى هذه النقطة مرجح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب، وتسمى أيضا مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$

  - اذا كان: $\alpha+\beta+\gamma=0$ فإن G تكون مركز ثقل الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$
- **خواص المرجح:**
  - إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ فإن النقطة G هي منتصف قطعة المستقيم (AB).

- اذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\alpha)\}$ فإن النقط A، B و G على استقامة واحدة.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\alpha);(C;\alpha)\}$ مع $\alpha \neq 0$ وكانت النقط A، B و C ليست على استقامية فإن: G هي مركز ثقل المثلث ABC.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإن G مرجح الجملة إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;k\alpha),(B;k\beta);(C;k\gamma)\}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ و H مرجح الجملة إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ فإن G مرجح الجملة: $\{(H;\alpha+\beta),(C;\gamma)\}$.
- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإنه من أجل نقطة M من المستوي يكون:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

- إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإنه من اجل أي نقطة M من المستوي يكون:

$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$$

لاحقة المرجح:

إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإن لاحقة النقطة G تُعطى بالعبارة:

$$\boxed{z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$$

3 الدائرة وخصائصها

لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما $z_A=a_1+ia_2$ و $z_B=b_1+ib_2$ على الترتيب، لدينا:

- المعادلة الديكارتية للدائرة (C) ذات المركز I ذو اللاحقة $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$ وطول نصف القطر $r=\frac{\sqrt{|z_B-z_A|}}{2}$ تُعطى بالعبارة التالية:

$$x^2+y^2--x(a_1+b_1)-y(a_2+b_2)+a_2+b_2=0$$

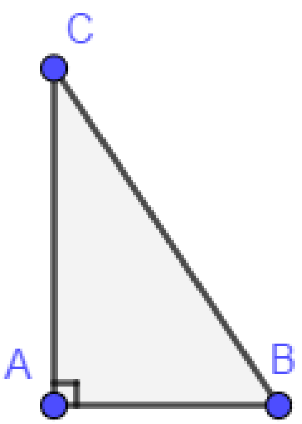
- الدائرة المحيطة بالمثلث القائم يكون قطرها هو وتر هذا المثلث.
- الدائرة المحيطة بالمثلث المتقايس الأضلاع يكون مركزها هو ثقل هذا المثلث.
- إذا كان $|z_A-z_w|=|z_B-z_w|=|z_C-z_w|=r$ ، فإن النقط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز w ونصف القطر r.

4 المستقيم وخصائصه

لتكن النقطت $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ ، C و D من المستوي.
المعادلة المختصرة لمستقيم تعطى بـ $y=ax+b$ حيث a هو ميل المستقيم أو معامل توجيهه و b الترتيبة عند المبدأ.

- معامل توجيه مستقيم مار من النقطتين A و B غير المتطابقتين يعطى بالعبارة : $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
- معادلة المستقيم المار بالنقطة A والموازي لمحور الفواصل تعطى بالعبارة التالية: $y=y_A$.
- معادلة المستقيم المار بالنقطة A والموازي لمحور التراتيب تعطى بالعبارة التالية: $x=x_A$.
- يتوازى مستقيمان إذا وفقط إذا كان لهما نفس معامل التوجيه.
- يتعامد مستقيمان إذا وفقط إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 .
- يتوازى مستقيمان إذا وفقط إذا كانا عموديان على نفس المستقيم.
- لاثبات أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيين يكفي إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا، ولأجل ذلك يكفي اثبات أحد العلاقات التالية:
  - $\overrightarrow{CD}=t\overrightarrow{AB}$
  - $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=t$ حيث $t\in\mathbb{R}^*$.
- لاثبات أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدين يكفي إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعامدين، ولأجل ذلك يكفي اثبات أحد العلاقات التالية:
  - $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
  - $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}+k\pi$
  - $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$
  - $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}=ki$ حيث $k\in\mathbb{Z}$
- لاثبات أن النقط **A، B و C** في استقامية، يكفي اثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا

5 التعرف على طبيعة مثلث



- **المثلث القائم:**

إذا كان: $\boxed{\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=iy}$ حيث: $y\in\mathbb{R}^*-\{-1;1\}$

مع $z_A\neq z_B$ و $z_A\neq z_C$

فإن: المثلث ABC قائم في A في الاتجاه المباشر

التعليل:

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\arg(iy)=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad;\quad k\in\mathbb{Z}$$

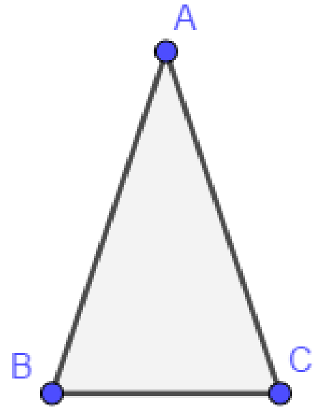
المثلث متساوي الساقين:

إذا كان: $\boxed{\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=1}$ و $\boxed{\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\theta+2k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$

حيث: $\theta \neq \left\{\pm\frac{\pi}{2};\pm\frac{\pi}{3}\right\}$

مع $z_A \neq z_B$ و $z_A \neq z_C$

فإن: المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A في الاتجاه المباشر



التعليل:

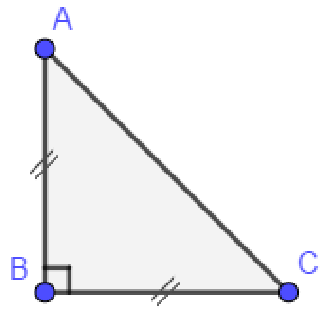
$$AC=AB \Leftarrow \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}=1$$

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\theta+2k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

المثلث القائم ومتساوي الساقين:

إذا كان: $\boxed{\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\pm i}$ مع $z_A \neq z_B$ و $z_A \neq z_C$

فإن: المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين في الاتجاه المباشر



التعليل:

$$AC=AB \Leftarrow \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}=|\pm i|=1$$

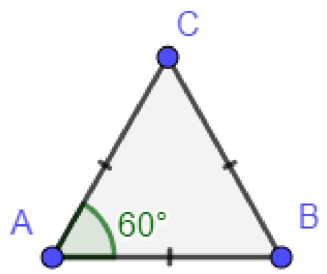
$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\arg(\pm i)=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

المثلث المتقايس الأضلاع:

إذا كان: $\boxed{\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1}$ و $\boxed{\left\{\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}\right\}}$

مع $z_A \neq z_B$ و $z_A \neq z_C$

فإن: المثلث ABC متقايس الأضلاع رأسه A في الاتجاه المباشر



التعليل:

$$AC=AB \Leftarrow \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}=1$$

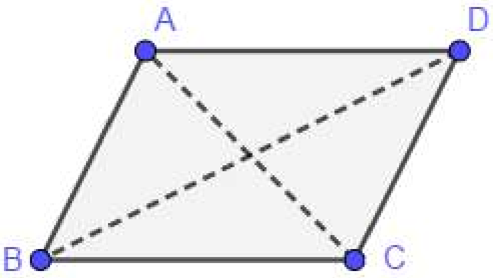
$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

ملاحظات هامة:

- **الارتفاع** هو قطعة مستقيم تكون صادرة من رأس من رؤوس المثلث و تكون عمودية غلى الضلع المقابل و يمثل الارتفاع البعد بين الرأس و الضلع المقابل كما تتقاطع الارتفاعات في نقطة تسمى المركز القائم.
- **المحور** هو مستقيم يمر من أحد أضلاع المثلث في منتصفه و يكون عموديّا عليه و تتلاقى محاور مثلث في نقطة تسمى مركز الدائرة المحيطة بمثلث و يكون لهذه النقطة نفس البعد عن رؤوس المثلث الثلاث و يكون تقاطع محورين فقط كافيا لمعرفة مركز هذه الدائرة.

- **المتوسّط** هو قطعة مستقيم تنطلق من رأس من رؤوس المثلث و تمر من منتصف الضلع المقابل وتتقاطع الموسطات الثلاث في نقطة تسمى مركز ثقل المثلث و يكون تقاطع موسطين فقط كافيا لمعرفة مركز الثقل. كما يكون البعد بين رأس المثلث و مركز الثقل مساويا لـ $2/3$ المتوسط الصادر من ذلك الرأس.
- **المنصف**: هو مستقيم يمرّ من راس من رؤوس المثلث و يقسم الزاوية إلى نصفين و تتقاطع المنصفات الثلاثة في مركز الدائرة المحاطة بالمثلث وهي الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلث الثلاث.

6 التعرف على طبيعة رباعي



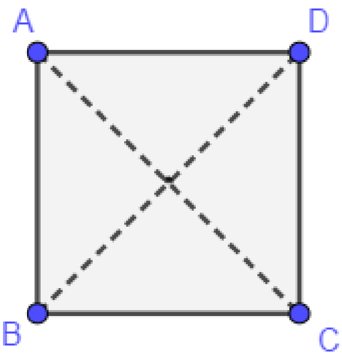
متوازي الأضلاع:

$ABCD$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي : $z_B - z_A = z_C - z_D$
- القطران متناصفان أي:

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

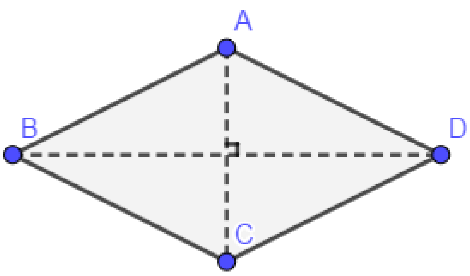
المربع:



$ABCD$ مربع إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

- اذا تحققت الشروط الثلاثة معا:
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$
  - $AB = AD$ أي: $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$
  - $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \pm\frac{\pi}{2}$ أي: $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$
- القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان أي اذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:
  - $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$
  - $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$
  - $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

المعين:

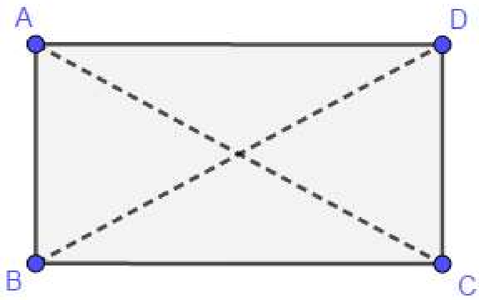


$ABCD$ معين إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

- اذا تحقق الشرطين التاليين معا:
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي: $z_B - z_A = z_C - z_D$
  - $AB = AD$ أي: $|z_B - z_A| = |z_D - z_A|$

- القطران متناصفان ومتعامدان أي اذا تحقق الشرطين التاليين معا:
  - $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$
  - $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$

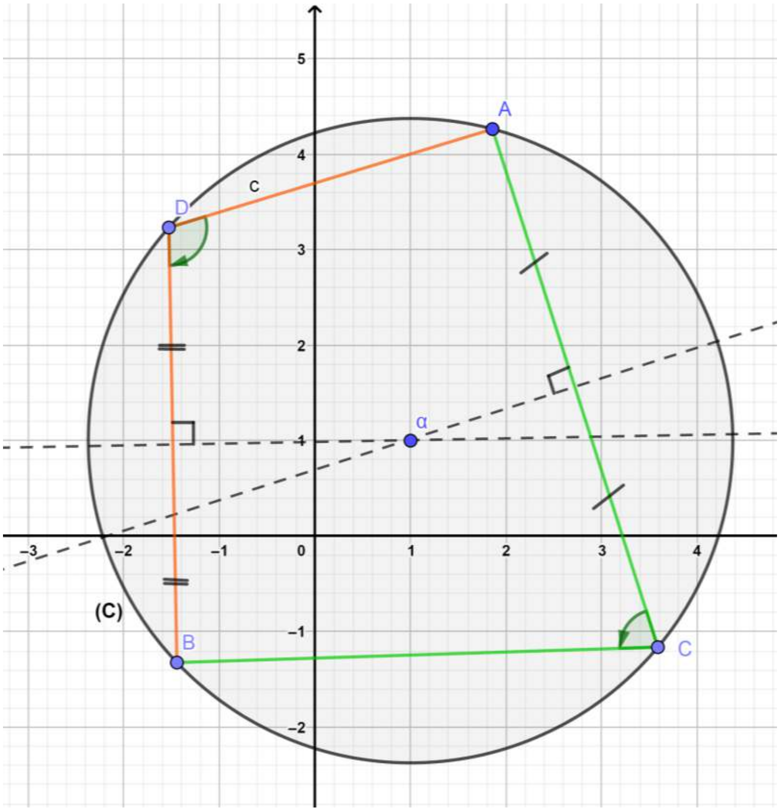
المستطيل:



$ABCD$ مستطيل إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

- اذا تحقق الشرطين التاليين معا:
  - $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي: $z_B-z_A=z_C-z_D$
  - $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})=\pm\frac{\pi}{2}$ أي: $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$
- القطران متناصفان ومتساويان أي اذا تحقق الشرطين التاليين معا:
  - $\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}$
  - $|z_B-z_A|=|z_D-z_A|$

نتيجة:



تكون النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة إذا تحقق أحد الشرطين التالين:

○ أي: $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}) + k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) - \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

وهذا معناه أن الزاويتان $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$ و $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB})$ متكاملتان.

○ أو:

$$\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \cdot \left(\frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}\right) = \alpha \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

7 المعادلات في $\mathbb{C}$

المعادلة $z^2 = a$: حيث: $a \in \mathbb{R}^*$

○ إذا كان $a > 0$ فإن للمعادلة حلان هما: $z = \sqrt{a}$ ، $z = -\sqrt{a}$

○ إذا كان $a < 0$ فإن للمعادلة حلان هما: $z = i\sqrt{-a}$ ، $z = -i\sqrt{-a}$

المعادلة $az^2 + bz + c = a$: حيث a، b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$

العدد $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى المميز.

○ إذا كان $\Delta > 0$ فإن للمعادلة حلين مختلفين هما:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

○ إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حل حقيقي مضاعف هو:

$$z = -\frac{b}{2a}$$

○ إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين ومختلفين هما:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

نتائج:

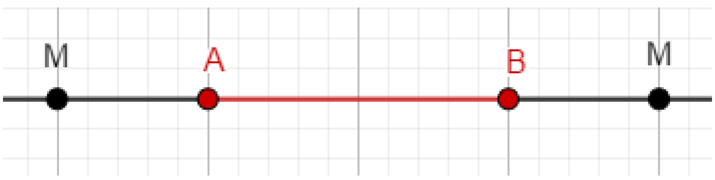
○ $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

○ $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ و $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$

8 مجموعات النقط في المستوي المركب

لنعتبر في كل ما سيأتي أن A، B و M نقط من المستوي المركب لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z

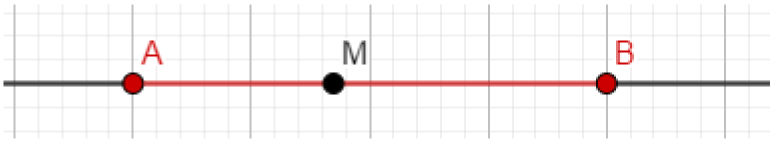
- $|az - z_A| = |z_O|$: مع $a; z_O \in \mathbb{C}^*$:
  - إذا كان $a = 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = |z_O|$ $\left(AM = r \text{ يكافئ } |z - z_A| = |z_O|\right)$
  - إذا كان $a \neq 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها النقطة ذات اللاحقة $\frac{z_a}{2}$ ونصف قطرها $r = \left|\frac{z_O}{a}\right|$
- $|z - z_A| = |kz_O - z_B|$: مع $k \in \mathbb{C}$ و $z_A \neq z_B$:
  - إذا كان $k = 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = |z_B|$.
  - إذا كان $k = 1$ فإن مجموعة النقط M هي محور قطعة المستقيم (AB) $\left(AM = BM \text{ يكافئ } |z - z_A| = |z - z_B|\right)$
  - إذا كان $k = -1$ فإن مجموعة النقط M هي محور قطعة المستقيم (AB') ، حيث B' لاحقتها هي: $z_{B'} = -z_B$ $$\left(AM = B'M \text{ يكافئ } |z - z_A| = |-z - z_B| = |-(z - (-z_B))| = |z - z_{B'}|\right)$$
  - إذا كان $k \in \mathbb{C}^*$ و $|k| \neq 1$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي دائرة قطرها $[GH]$، حيث G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(E;-k)\}$ و H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(E;k)\}$ مع E نقطة لاحقتها $z_E = \frac{z_B}{k}$.
- $(z - z_A)\overline{(z - z_A)} = |z_O|$: مع $z_O \in \mathbb{C}$:
  - إذا كان $z_O \neq 0$ فإن مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = \sqrt{|z_O|}$
  - إذا كان $z_O = 0$ فإن مجموعة النقط M هي النقطة A. $\left((z - z_A)\overline{(z - z_A)} = 0 \text{ وعليه : } (z - z_A) = 0 \text{ أو } \overline{(z - z_A)} = 0 \text{ هذا يعطينا } z = z_A \text{ أو } \bar{z} = \overline{z_A}\right)$
- $arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \theta$: مع $\theta \in \mathbb{R}$ و $z \neq z_A \neq z_B$:
  - إذا كان $\theta = 0 + 2k\pi$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة المستقيمة $]AB[$.



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

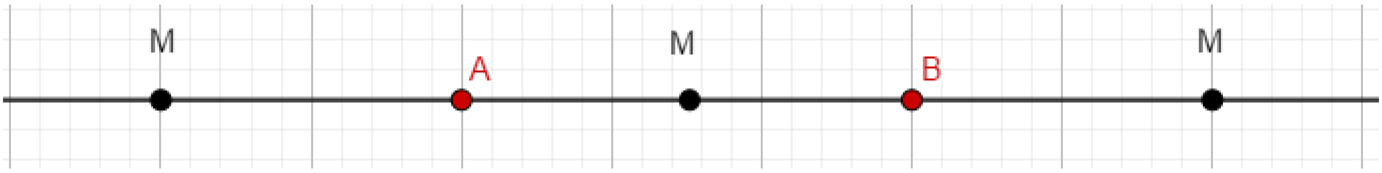
  - إذا كان $\theta = \pi + 2k\pi$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي القطعة المستقيمة $]AB[$ باستثناء النقطتين A و B

الخليل للرياضيات



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

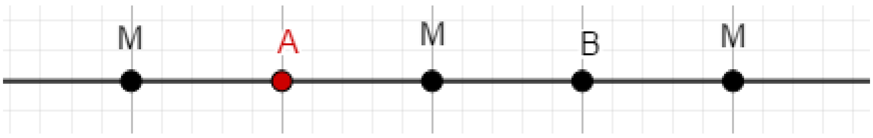
- إذا كان $\boldsymbol{\theta = 0 + k\pi}$ فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

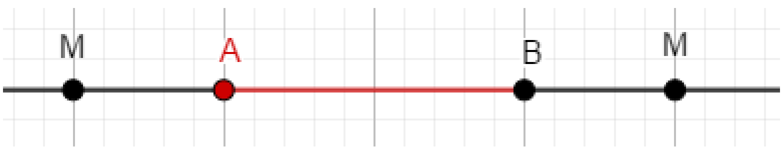
$\boldsymbol{L = \frac{z - z_B}{z - z_A}}$ **:** مع $z \neq z_A$:

- إذا كان $\boldsymbol{L}$ **حقيقي** فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة A ونرمز لها بالرمز $(AB) - \{A\}$.



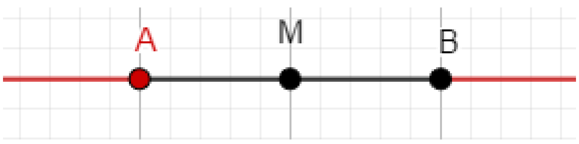
-شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

- إذا كان $\boldsymbol{L}$ **حقيقي موجب** فإن مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة $]AB[$ ، ونرمز لها بالرمز $(AB) -]AB[$.



-شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط-

- إذا كان $\boldsymbol{L}$ **حقيقي سالب** فإن مجموعة النقط M من المستوي هي قطعة المستقيم $[AB]$ باستثناء النقطة A ، ونرمز لها بالرمز $[AB] - \{B\}$.



- شكل يوضح مجموعة النقط M والتي تنتقل في المستقيم الملون بالأسود فقط -

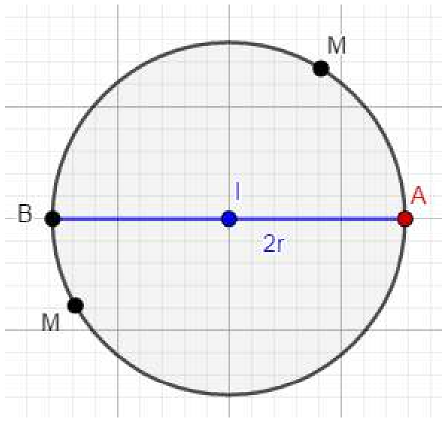
○ إذا كان L **تخيلي صرف**: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي الدائرة التي مركزها النقطة I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1+b_1)+i(a_2+b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطة A



-شكل يوضح مجموعة النقط M
والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

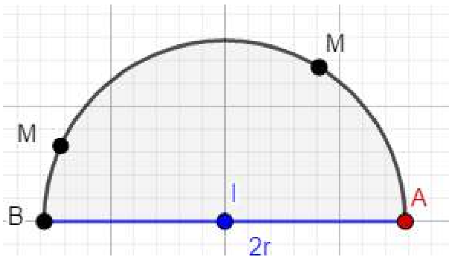
○ إذا كان L **تخيلي موجب**: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع فوق المستقيم (AB) في الاتجاه المباشر) التي مركزها النقطة I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1+b_1)+i(a_2+b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطة A



-شكل يوضح مجموعة النقط M
والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

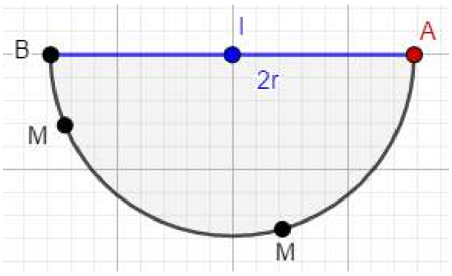
○ إذا كان L **تخيلي سالب**: فإن مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع تحت المستقيم (AB) في الاتجاه المباشر) التي مركزها النقطة I ذات اللاحقة:

$$z_I = \frac{(a_1+b_1)+i(a_2+b_2)}{2}$$

ونصف قطرها:

$$r = \frac{\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}}{2}$$

باستثناء النقطة A



-شكل يوضح مجموعة النقط M
والتي تنتقل في الجزء الملون بالأسود فقط-

● $\boxed{arg(z-z_A) = \overline{arg(z-z_A)}}$ مع $z \neq z_A$:

مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AM) الموازي لحامل محور الفواصل باستثناء النقطة A.

- $\boxed{z = z_A + qe^{i\theta}}$: مع $\theta \in \mathbb{R}$ (متغير) و $q \in \mathbb{R}^*$ (معلوم):

مجموعة النقط M من المستوي هي الدائرة التي مركزها النقطة A وطول نصف قطرها r حيث: $r = |q|$

- $\boxed{z = z_A + qe^{i\theta}}$: مع $\theta \in \mathbb{R}$ (معلوم) و $q \in \mathbb{R}^*$ (متغير):
   - إذا كان: $q \in \mathbb{R}$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \theta + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$.
   - إذا كان: $q \in \mathbb{R}_+$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \theta + 2k\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$.
   - إذا كان: $q \in \mathbb{R}_-$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AM}$ الذي يحقق: $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \theta + (2k+1)\pi \ ; k \in \mathbb{Z}$.
- $\boxed{arg(z - z_A) = arg(qz - z_B)}$: مع $\theta \in \mathbb{R}$ (معلوم) و $q \in \mathbb{R}^*$ (متغير):
   - إذا كان: $q = 1$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B
   - إذا كان: $q = -1$ مجموعة النقط M من المستوي هي المستقيم (AB') باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$.
   - إذا كان: $q = i$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع **فوق** المستقيم (AB') في الاتجاه المباشر) التي طول نصف قطرها r حيث: $r = \frac{AB'}{2}$ ومركزها النقطة I ذات اللاحقة $z_I = \frac{z_A + z_{B'}}{2}$ ، باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$
   - إذا كان: $q = -i$ مجموعة النقط M من المستوي هي نصف الدائرة (الواقع **تحت** المستقيم (AB') في الاتجاه المباشر) التي طول نصف قطرها r حيث: $r = \frac{AB'}{2}$ ومركزها النقطة I ذات اللاحقة $z_I = \frac{z_A + z_{B'}}{2}$ ، باستثناء النقطتين A و B' مع $z'_B = -z_B$
- **توجيه :**

إذا صعب عليك تعيين مجموعة النقط فاستعمل الطريقة التحليلية وذلك بوضع $z = x + iy$، وركز جيدا في النشر والتبسيط والحساب.

9 التحويلات النقطية في المستوي المركب

f تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$. والمعرف كما يلي:

$$f(z) = az + b$$

M' هي صورة النقطة M : $M' = f(M)$.

- في حالة الشكل المركب: $\boxed{z' = az + b}$:

إذا كان: $a \in \mathbb{R}$ و $a = 1$

فإن f **انسحاب:**
لاحقة شعاعه $\vec{v}$ هي:
$z_{\vec{v}} = b$

إذا كان: $a \in \mathbb{R}$ و $a \neq 1$

فإن f **تحاكي:**
نسبته $k = a$
ولاحقة مركزه w هي:
$$z_w = \frac{b}{1-a}$$

إذا كان: $a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$

فإن f **دوران:**
نسبته: $k = 1$
زاويته $\theta = \arg(a)$
ولاحقة مركزه w هي:
$$z_w = \frac{b}{1-a}$$

إذا كان: $a \in \mathbb{C}$ و $|a| \neq 1$

فإن f **تشابه مباشر:**
نسبته: $k = |a|$
وزاويته $\theta = \arg(a)$
ولاحقة مركزه w هي:
$$z_w = \frac{b}{1-a}$$

- في حالة الشكل المركب: $\boxed{z' - z_w = a(z - z_w)}$:
  - f تحاكي: نسبته k ولاحقة مركزه z_w. عبارته المركبة: $z' - z_w = k(z - z_w)$.
  - f دوران: زاويته θ ولاحقة مركزه z_w. عبارته المركبة: $z' - z_w = e^{i\theta}(z - z_w)$.
  - f تشابه مباشر: نسبته k وزاويته θ ولاحقة مركزه z_w. عبارته المركبة: $z' - z_w = ke^{i\theta}(z - z_w)$

تعيين تحويل نقطي يحول نقطتين :

يطلب السؤال بالشكل التالي:

أوجد طبيعة التحويل R الذي يحول النقطة A إلى النقطة B ويحول النقطة C إلى النقطة D مع تعيين عناصره المميزة.

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \ldots (1) \\ z_D = az_C + b \ldots (2) \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) نجد: $a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

من a نعين طبيعة التحويل R ، بعد ذلك نعوض قيمة a في (1) أو (2) ثم نجد العناصر المميزة للتحويل R.

الاستنتاج من علاقة أن نقطة هي صورة نقطة أخرى بتحويل:

اذا كان $a = \frac{z_B - z_w}{z_A - z_w}$ فإن: $z_B - z_w = a(z_A - z_w)$ وهذا يعني أن النقطة B هي صورة النقطة A بالتحويل الذي مركزه w، ويتم تحديد طبيعة التحويل من خلال قيمة كما ذكرنا سابقا.

تركيب التحويلات النقطية:

- تركيب عدة انسحابات هو انسحاب، شعاعه هو مجموع أشعتها.
- تركيب عدة تحاكيات لها نفس المركز هو تاحكي، له نفس المركز ونسبته هي جداء النسب.
- تركيب عدة دورنات لها نفس المركز هو دوران، له نفس المركز، وزاويته هي مجموع الزوايا.
- تركيب عدة تشابهات مباشرة لها نفس المركز هو تشابه مباشر، له نفس المركز ونسبته هي جداء النسب وزاويته هي مجموع الزوايا.
- اذا اختلفت مركز التحويلات النقطية أو كانت من طبائع مختلفة، نتعرف على طبيعة مركباتها باستعمال العبارة المركبة ونستعمل نفس الطريقة المستخدمة في تركيب الدوال العددية.

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►