

نهاية بعض الدوال

نهاية دالة كثير حدود هي نهاية الحد الاكبر درجة بجوار $\pm \infty$

مثال

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = +\infty$$

نهاية دالة ناطقة هي نهاية أكبر حد في البسط على أكبر حد في المقام بجوار $\pm \infty$.

مثال

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{x^3 - 3x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3}{x^3} \right) = 2$$

نهاية مركب دالتين

دالة مركبة من الدالتين g و h : $f(x) = goh(x)$ $c; b; a$ أعداد حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ فان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

مثال

$$\text{حساب: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right)$$

نضع $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}}$ لاحظ أن: $f(x) = goh(x)$ مع $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $h(x) = \frac{x-1}{x}$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 \text{ ومنه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) = 2$$

هناك حالات لا يمكن حساب فيها النهاية مباشرة تسمى هذه الحالات بحالة عدم التعيين وهي اربع:

$$+\infty - \infty; 0 \times \infty; \frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}$$

$$\text{الحالات: } \frac{0}{\infty} = 0; \frac{\infty}{0} = \infty; (+\infty) \times (-\infty) = -\infty \text{ ليست حالات عدم التعيين}$$

ولازالة حالات عدم التعيين نتبع احدى الطرق التالية: التحليل والاختزال او الضرب في المرافق أو الحصر العدد المشتق او العامل مشترك نتطرق لكل حالة في التمارين

النهايات والمستقيمات المقاربة

المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ فان المستقيم ذو المعادلة: $y = b$ مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل

المستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ فان المستقيم ذو المعادلة: $x = a$ مستقيم مقارب موازي لمحور الترتيب

المستقيم المقارب المائل

المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$ يكون المستقيم (Δ) مستقيم مقارب

للمنحني (C_f) عند $\pm\infty$ إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

إذا كانت f دالة بحيث: $f(x) = ax + b + g(x)$ و كانت: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$

فان المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = ax + b$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $\pm\infty$.

الوضع النسبي

لدراسة وضعية المنحني (C_g) الممثل لدالة g بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta): y = ax + b$

نقوم بدراسة إشارة الفرق $g(x) - (ax + b)$

إذا كانت: $g(x) - (ax + b) > 0$ فان (C_g) يقع فوق (Δ)

إذا كانت: $g(x) - (ax + b) < 0$ فان (C_g) يقع اسفل (Δ)

النهاية بالمقارنة

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ و f, g, h دوال و l عدد حقيقي.

وكانت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

التمرين 03

باستعمال الاختزال أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 - 4x - 5} \right) ; \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} \right)$$

باستعمال المرافق أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 1}) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1})$$

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos(x) - 1}{x} \right) ; \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 3x - 2}}{x - 1} \right)$$

باستعمال الحصر أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2 + \sin x} \right) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\cos x}{x^2} \right)$$

التمرين 04

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2} \quad \text{: تعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} - \{-1\} \text{ بـ}$$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ فسر النتائج هندسيا.

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2} \quad \text{: عين الاعداد الحقيقية } a; b; c; d \text{ بحيث من أجل كل عدد حقيقي } x$$

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ فسر النتائج هندسيا.

(4) بين أن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مانلا Δ يطلب تعيين معادلة له

(5) حدّد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى Δ .

التمرين 01

أحسب النهايات التالية ثم فسر النتائج هندسيا (بيانيا):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + x + 1) \quad (3) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + x + 1) \quad (2) ; \lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 - 3x^2 + x + 1) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 - 3x^2 + x) \quad (6) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 - 3x^2 + x + 1) \quad (5) ; \lim_{x \rightarrow -1} (-2x^3 - 3x^2 + x) \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 3}{x - 1} \quad (11) ; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 3}{x - 1} \quad (10) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \quad (9) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x^2 - x + 2} \quad (14) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} \quad (13) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x^2 - x - 2} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 2x^2)(1 - x) \quad (17) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x + 3}} \quad (16) ; \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{\frac{1 - 2x}{x + 1}} \quad (15)$$

التمرين 02

أحسب نهايات الدالة عند حدود مجموعة التعريف في كل حالة مما يلي:

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad f(x) = \frac{-3x + 2}{-x + 1} \quad (1)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3\} \quad f(x) = \frac{-3x^2 + 2x + 4}{x + 3} \quad (2)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad f(x) = \frac{2x + 7}{(x - 2)^4} \quad (3)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3; 1\} \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x - 3} \quad (4)$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (5)$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad f(x) = 4x + 2 - \frac{3}{x} \quad (1)$$

التمرين 05

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$
وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) أحسب: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا.

(2) عين الاعداد الحقيقية $a; b; c$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 - 1}$

(3) أحسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)]$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$ ثم فسر النتائج هندسيا.

(4) ادر وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى $y = x + 1$: (Δ) .

التمرين 06

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$
وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

(2) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ماذا تستنتج.

(3) أحسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. خمن وجود مستقيم مقارب مائل.

(4) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -2x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C) .

(5) بين أن $u(x) + 2x > 0$ ثم ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

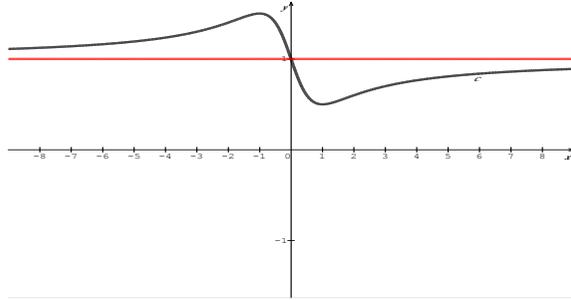
نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(2) حل في \mathbb{R} المعادلة: $f(x) = g(x)$ ماذا تستنتج.

التمرين 07

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (Δ) مستقيم معادلته: $y = 1$.



بقراءة بيانية:

(1) شكل جدول تغيرات الدالة f . (2) حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(3) عين اشارة الدالة f . (4) اثبت ان النقطة $A(0; 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C) .

التمرين 08

المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

بقراءة بيانية:

(1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

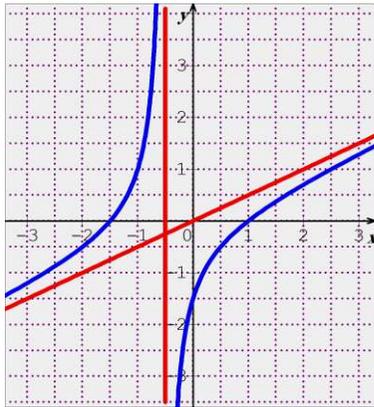
(2) عين اشارة الدالة f' .

(3) عين اشارة الدالة f .

(4) عين وضعية C_f بالنسبة للمستقيم القارب المائل.

(5) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(6) حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = 0$



التمرين 10

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$. جدول تغيراتها كما يلي :

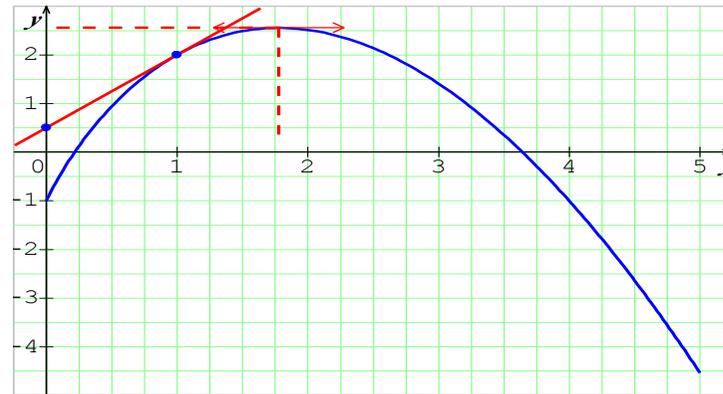
x	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$

نفرض أنه من أجل كل $x > 1$ ، $f(x)$ تكتب على الشكل $f(x) = ax + \frac{b}{x-c}$ ، a ، b و c أعداد حقيقية نريد تعيينها. نسمي (C_f) منحنى f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- عين نهايات الدالة f عند اطراف مجموعة التعريف.
- أثبت أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الترتيب. ثم استنتج قيمة c .
- انطلاقا من عبارة $f(x)$ ، بين أن لدينا العلاقة $6a + b = 5$.
- انطلاقا من عبارة $f'(x)$ بين أن لدينا $4a - b = 0$.
- استنتج عبارة $f(x)$ وبرهن أن المستقيم (D) ذي المعادلة $x - 2y = 0$ مقارب للمنحنى (C_f) .
- أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (D) .
- أرسم (C_f) ومستقيمه المقاربين.

التمرين 09

الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$



المستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحنى عند النقطتين اللتين فاصلتاها 1 و $\frac{16}{9}$.

- بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$ و $f(0)$.
- بقراءة بيانية عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- شكل جدول تغيرات الدالة f .
- حل بيانيا في المجال $[0; +\infty[$ المترجمات التالية (القيم المقروءة في التمثيل تعطى بالتقريب إلى 10^{-1})
(أ $f(x) \geq 0$ ، ب $f'(x) \leq 0$)
- نعتبر من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) = a + bx(2 - \sqrt{x})$ مع a و b عدنان حقيقيان.
أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = b\left(2 - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$
ب - باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال 1 عين a و b .