النهايات

✍ حساب النهايات :

$\frac{a}{\infty}=0$	$\frac{a}{0}=\infty \quad (a\in\mathbb{R}^*)$	$\frac{\infty}{0}=\infty$
	$\frac{0}{a}=0 \quad (a\in\mathbb{R}^*)$	$\frac{0}{\infty}=0$

❶ حالات عدم التعيين : $\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad +\infty-\infty \quad 0\times\infty$.

❷ لإزالة حالة عدم التعيين يمكن أن نتبع إحدى الطرق التالية : الإختزال أو التحليل أو المرافق أو العدد المشتق .

✍ النهايات والحصر :

f , g , h دوال عددية معرفة على المجال I و l عدد حقيقي .

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$ وكانت $g(x)\le f(x)\le h(x)$ من أجل كل x من I فإن : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.

✍ المستقيمات المقاربة (α عدد حقيقي ثابت) :

❶ المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب :

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\infty$ فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب حيث $x=\alpha$ معادلة له .

❷ المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل :

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\alpha$ فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل حيث $y=\alpha$ معادلة له . .

❸ المستقيم المقارب المائل :

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ فانه يحتمل وجود مستقيم مقارب مائل معادلته: $y=ax+b$.

❹ طريقة إثبات أن المستقيم الذي معادلته : $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

❺ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم المقارب المائل (δ) الذي معادلته $y=ax+b$:

✰ ندرس إشارة الفرق : $f(x)-(ax+b)$.

☛ إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ فإن (C_f) يقع فوق (Δ).

☞ إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ فإن (C_f) يقع تحت (Δ).

✌ إذا كان $f(x)-(ax+b)=0$ فإن (C_f) يقطع (Δ) .

الإستمرارية

✍ التفسيرالبياني للإستمرار :

تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم .

✍ مبرهنة 1 القيم المتوسطة :

ليكن k عدد حقيقي . المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a;b]$ إذا كان :

❶ f مستمرة على المجال $[a;b]$.

❷ $f(a)<k<f(b)$.

✍ مبرهنة 2 القيم المتوسطة :

ليكن k عدد حقيقي . المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$ إذا كان :

❶ f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a;b]$.

❷ $f(a)<k<f(b)$.

✍ نتيجة 1 لمبرهنة القيم المتوسطة :

المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[a;b]$ إذا كان :

❶ f مستمرة على المجال $[a;b]$.

❷ $f(a).f(b)<0$.

✍ نتيجة 2 لمبرهنة القيم المتوسطة (وحدانية الحل) :

تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α في المجال $[a;b]$ إذا كان :

❶ f مستمرة على المجال $[a;b]$.

❷ f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$ (متزايدة تماما أو متناقصة تماما).

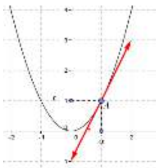
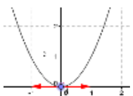
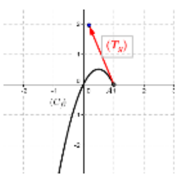
❸ $f(a).f(b)<0$.

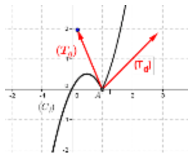
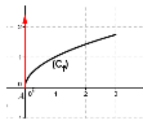
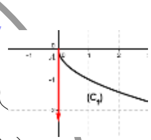
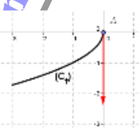
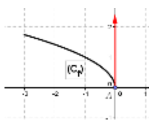
✍ ملاحظة هامة :

يمكن أن يطرح السؤال كالتالي : أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $[a;b]$.

الإشتقاقية

✍ الإشتقاقية : α ، l، l_1، l_2 أعداد حقيقية .

النهايـة	تفسيـرها
$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=l$	الدالة f تقبل الاشتقاق عند α و (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $(\alpha;f(\alpha))$ معامل توجيهه l. 
$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0$	الدالة f تقبل الاشتقاق عند α و (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A(\alpha;f(\alpha))$ مماسا موازيا لمحور الفواصل . 
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=l_1$	الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين α و يسمى l_1 العدد المشتق من اليمين . و (C_f) يقبل نصف مماس عند $A(\alpha;f(\alpha))$ من اليمين معامل توجيهه l_1 . 
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=l_2$	الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار α ويسمى l_2 العدد المشتق من اليسار . و (C_f) يقبل نصف مماس عند $A(\alpha;f(\alpha))$ من اليسار معامل توجيهه l_1 . 

إذا كان	
إذا كان $l_1 \neq l_2$	الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند α و (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ وتسمى A نقطة زاوية 
إذا كان $l_1 = l_2$	الدالة f تقبل الاشتقاق عند α
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = +\infty$	f غير قابلة للإشتقاق على يمين α والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ موازي لمحور التراتيب وموجه نحو الأعلى 
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = -\infty$	f غير قابلة للإشتقاق على يمين α والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ موازي لمحور التراتيب وموجه نحو الأسفل 
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = +\infty$	f غير قابلة للإشتقاق على يسار α والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ موازي لمحور التراتيب وموجه نحو الأسفل 
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = -\infty$	f غير قابلة للإشتقاق على يسار α والمنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة $A(\alpha; f(\alpha))$ موازي لمحور التراتيب وموجه نحو الأعلى 

✍ مشتقات دوال مألوفة :

$f(x)$	$f'(x)$	مجال الإشتقاق
$k \quad (k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax+b \quad (a \in \mathbb{R}^*\ b \in \mathbb{R})$	a	$\mathbb{R}$
$x^n (n \geq 2; n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$cosx$	$-sinx$	$\mathbb{R}$
$sinx$	$cosx$	$\mathbb{R}$

✍ عمليات على المشتقات :

الدالة	مشتقتها
$u+v$	$u'+v'$
$u \times v$	$u' \times v + v' \times u$
αu	$\alpha u'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$v \circ u$	$u' \times v'(u)$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$nu' \times u^{n-1}$

✍ تطبيقات الإشتقاقية :

❶ إتجاه تغير دالة :

f دالة تقبل الاشتقاق على مجال $\mathbb{I}$.

✫ إذا كانت $f'(x) > 0$ من أجل كل x من I فإن الدالة f متزايدة تماما على I.

✫ إذا كانت $f'(x) < 0$ من أجل كل x من I فإن الدالة f متناقصة تماما على I.

✫ إذا كانت $f'(x) = 0$ من أجل كل x من I فإن الدالة f ثابتة على I.

❷ معادلة المماس :

✫ إذا قبلت دالة f الإشتقاق عند x_0 من I فان تمثيلها البياني (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معادلته : $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

✫ إذا قبلت دالة f الإشتقاق على يمين x_0 فان تمثيلها البياني (C_f) يقبل نصف مماس (T_d) عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معادلته :

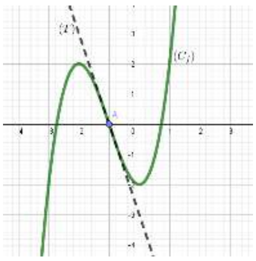
$$\begin{cases} y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$$

✫ إذا قبلت دالة f الإشتقاق على يسار x_0 فان تمثيلها البياني (C_f) يقبل نصف مماس (T_g) عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معادلته :

$$\begin{cases} y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$$

❸ نقطة الإنعطاف :

✫ نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس (T) المنحني (C_f).



✫ إذا انعدمت المشتقة الأولى $f'(x)$ عند x_0 دون تغيير إشارتها فإن النقطة $A(x_0; f(x_0))$ هي نقطة إنعطاف للمنحني (C_f).

✫ إذا انعدمت المشتقة الثانية $f''(x)$ عند x_0 مغيرة إشارتها فإن النقطة $A(x_0; f(x_0))$ هي نقطة إنعطاف للمنحني (C_f).

❹ القيم الحدية المحلية :

✫ إذا انعدمت المشتقة الأولى $f'(x)$ عند x_0 مغيرة إشارتها فإن : $f(x_0)$ قيمة حدية محلية .

عموميات على الدوال

f دالة معرفة على D_f و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي .

❶ الدالة الزوجية :

تكون الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان :

✫ من أجل كل $x \in D_f$ فإن : $-x \in D_f$

✫ $f(-x) = f(x)$.

❷ الدالة الفردية :

تكون الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان :

☆ من أجل كل $x \in D_f$ فإن : $-x \in D_f$

☆ $f(-x) = -f(x)$.

❸ مركز تناظر :

يقبل (C_f) النقطة $A(a;b)$ كمركز تناظر إذا وفقط إذا كان :

☆ من أجل كل $x \in D_f$ فإن : $2a - x \in D_f$

☆ $f(2a-x) + f(x) = 2b$.

❹ محور تناظر :

يقبل (C_f) المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = a$ كمحور تناظر إذا وفقط إذا كان :

☆ من أجل كل $x \in D_f$ فإن : $2a - x \in D_f$

☆ $f(2a-x) = f(x)$.

❺ إنشاء منحنى إنطلاقا من منحنى آخر :

a و b عددان حقيقيان ، (C_f) و (C_g) التمثيلهما البيانيان في المستوي للدالتين f و g.

عبارة $g(x)$ بدلالة $f(x)$	إستنتاج التمثيل البياني لـ (C_g) انطلاقا من (C_f)
$g(x) = f(x+a) + b$	(C_g) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\overline{v}(-a;b)$
$g(x) = -f(x)$	(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .
$g(x) = f(-x)$	(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب .
$g(x) = -f(-x)$	(C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى مبدأ المعلم .
$g(x) = f(\|x\|)$	لما $x \geq 0$ فإن (C_g) منطبق على (C_f) . لما $x \leq 0$ فإن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب .
$g(x) = f(-\|x\|)$	لما $x \leq 0$ فإن (C_g) منطبق على (C_f) . لما $x \geq 0$ فإن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب .
$h(x) = \|f(x)\|$	لما $f(x) \geq 0$ فإن (C_g) منطبق على (C_f) . لما $f(x) \leq 0$ فإن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .

❻ المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة :

f و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي و m وسيط حقيقي .

☆ المعادلـــة $f(x) = m$:

هي مناقشة أفقية , عدد حلول المعادلة هي عدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذو المعادلة $y = m$ الموازية لمحور الفواصل (قم بسحب المسطرة أفقيا من أسفل إلى أعلى ولاحظ عدد نقط تقاطعها مع (C_f))

★ ملاحظة : إن أطراف مجالات المناقشة هي تراتيب النقط التي تتغير عندها الحالات المختلفة لعدد الحلول .

★ حالة عامة : في حالة معادلة $f(x) = u(m)$, ضع $f(x) = M$ وناقش عدد الحلول حسب قيم M واستنتج منها قيم m.

☆ المعادلة $f(x) = ax + m$ (a عدد حقيقي ثابت غير معدوم) :

هي مناقشة مائلة ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معامل توجيهه a (قم بسحب المسطرة وفق منحى اي مستقيم في الشكل معامل توجيهه a من أسفل إلى أعلى ولاحظ عدد نقط التقاطع .)

☆ المعادلة $f(x) = mx + b$:

هي مناقشة دورانية ، في هذه الحالة نبين أن جميع المستقيمات التي معادلاتها من الشكل $y = mx + b$ تشمل نقطة ثابتة A.

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات التي تمر من A.

(قم بتدوير المسطرة بحيث مركز الدوران هو A من أسفل إلى أعلى ولاحظ عدد نقاط التقاطع .)

★ ملاحظة : إن أطراف مجالات المناقشة هي معاملات توجيه المستقيمات المارة من A التي تتغير عندها المختلفة لعدد الحلول .