ZERROUKI AISSA	المستوي الدراسي : السنة ثانية ثانوي

﴿الاحتمـــالات﴾

1- تذكير :

التجربة العشوائية : هي كل تجربة لا يمكن توقع نتائجها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة .

مجموعة الإمكانيات : مجموعة النتائج الممكنة تسمي مجموعة مجموعة الإمكانيات أو مجموعة المخارج أو المجموعة الشاملة ويرمز لها بالرمز Ω وكل عنصر من Ω يسمي إمكانية

الحوادث : كل مجموعة جزئية من Ω تسمي حادثة ، وليكن A جزءا من Ω نقول عندئذ أن A حادثة

- إذا احتوت الحادثة A على عنصر وحيد فإنها تدعي حادثة أولية
- إذا احتوت الحادثة A على أكثر من عنصر تسمى حادثة مركبة
- Ωهي الحادثة الاكيدة و $\varnothing$ هي الحادثة المستحيلة .
- إذا كانت A حادثة ما فإن حادثتها العكسية يرمز لها بالرمز $\bar{A}$ وهي التي تحتوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A
- لتكن A وB حادثتين :
- الرمز $A\cap B$ يعني الحادثة A و B وهي التي تحوي العناصر المشتركة بين A و B
- الرمز $A\cup B$ يعني الحادثة A أو B وهي التي تحوي عناصر A وعناصر B أيضا
- إذا كانت $A\cap B$ خالية أي $\varnothing$ نقول عندئذ أن الحادثتين A و B غير متلائمتين .

مثال :

نرمي زهرة نرد غير مزيفة ذات ستة أوجه مرقمة من 1 الى 6 .

- ✓ الحادثة A " الحصول على رقم زوجي "
- ✓ الحادثة B " الحصول على رقم أكبر أو يساوي 4 "
- ✓ الحادثة C" الحصول على رقم 6 "
- ✓ الحادثة D" الحصول على رقم زوجي أكبر أو يساوى 4 "
- ✓ الحادثة F " الحصول على رقم زوجي أو أكبر أو يساوي 4 "

2 – قانون الاحتمال :

لتكن $\Omega=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ مجموعة الإمكانيات (المخارج) لتجربة عشوائية ذات n عنصر ، يعرف قانون احتمال على Ω إذا ارفقنا كل مخرج e_i من Ω بعدد موجب P_i مع $i\in\{1,2,.....,n\}$ بحيث يكون $P_1+P_2+......+P_n=1$

- ✓ يسمى العدد P_i احتمال تحقق المخرج e_i
- ✓ إذا كانت A حادثة فإن $P(A)$ يرمز الى احتمال الحادثة A والذي يساوي مجموع احتمالات الحوادث الأولية للحادثة A
- ✓ من أجل كل $i\in\{1,2,.....,n\}$: $0\le P(e_i)\le 1$

مثال :

كيس به كرتان حمروان و 4 كرات خضراء و كرة سوداء نسحب كرة واحدة ونسجل لونها ، ما هي احتمالات الحوادث التالية :

1 - A" الحصول على كرة حمراء "

2 - B" الحصول على كرة خضراء "

3 - C " الحصول على كرة سوداء "

3 – تساوي الاحتمال :

عندما يكون لجميع الحوادث الأولية لتجربة عشوائية نفس الاحتمال نقول عن التجربة أنها متساوية الاحتمال

و أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع ويكون : $P_1 = P_2 = P_3 = ... = P_n = \frac{1}{n}$ ويكون احتمال حادثة

في هذه الحالة : $P(A) = \frac{A \text{عددعناصر}}{\Omega \text{عددعناصر}}$

ملاحظة :

يشار الى تساوي الاحتمال من خلال عبارات تتضمنها نصوص التجربة مثل ان يقال (زهرة نرد غير مزيفة أو قطعة نقود متوازنة أو كريات لا نفرق بينها باللمس)

مثال :

نرمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات متتالية ، نعتبر الحادثة A الحصول على ظهرين و وجه نرمز للظهر P بالرمز و للوجه بالرمز F.

1. أنشئ مخططا يوضح كل الحالات .   2 . استنتج احتمال الحادثة A .

4 – خواص الاحتمالات :

Ω مجموعة الإمكانيات معرف عليها قانون احتمال P :

1) من أجل كل حادثة A فإن $0 \le P(A) \le 1$.

2) $P(\Omega) = 1$ و $P(\varnothing) = 0$

3) إذا كانت A و B حادثين كيفيتين فإن : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) إذا كانت A و B حادثين غير متلائمتين $(A \cap B = \varnothing)$ فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

5) إذا كانت الحادثة A جزءا من الحادثة B $(A \subset B)$ فإن $P(A) \le P(B)$

6) إذا كانت $\bar{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A فإن $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ أي $P(\bar{A}) + P(A) = 1$.

مثال 01 :

عند رمي زهرة نرد غير مزيفة أوجهها مرقمة من 1 ألى 6 ، نعتبر الحوادث :

1 – A" الحصول على رقم زوجي "

2 – B" الحصول على رقم من مضاعفات 3 "

عين الحوادث و احسب احتمالها : A ، B ، $\bar{A}$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$

مثال 02 :

A و B حادثتان حيث : $P(A)=0,3$ ، $P(A \cup B)=0,7$ ، $P(A \cap B)=0,2$ ، احسب : $P(B)$

مثال 03 :

A و B حادثتان حيث : $P(A)=0,45$ ، $P(B)=0,37$ ، $P(A \cup B)=0,82$ ، اثبت أن A و B غير متلائمتين

5 – أمل وتباين والانحراف المعياري لقانون الاحتمال :

لتكن Ω مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية نتائجها أعداد حقيقية حيث :

$\Omega=\{e_1,e_2,........;e_n\}$ **و** P **احتمال على** Ω **، نضع** $P_i=P(e_i)$

- **أمل قانون الاحتمال هو العدد** E **المعرف كما يلي :** $E=\sum_{i=1}^{n} e_i P_i$
- **تباين قانون الاحتمال هو العدد** V **حيث :** $V=\sum_{i=1}^{n}(e_i-E)^2 P_i$
- **الانحراف المعياري لقانون الاحتمال هو العدد** S **حيث :** $S=\sqrt{V}$
- **يمكن أن نكتب :** $V=\sum_{i=1}^{n} e_i{}^2 P_i - E^2$

6– المتغير العشوائي :

لتكن Ω المجموعة الشاملة .

كل دالة عددية معرفة على Ω وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ تسمي متغيرا عشوائيا .

مثال : نرمي ثلاث مرات متتابعة قطعة نقدية متوازنة ، نربح 15 دينار كلما كانت النتيجة (ظهر P) ونخسر 5 دينارات كلما كانت النتيجة

(وجه F) ، وليكن الربح الجبري المحصل عليه بعد 3 رميات .

قانون الاحتمال لمتغير عشوائي :

ليكن P احتمال معرف علي Ω ، X متغير عشوائي معرف على Ω و $X(\Omega)$ مجموعة منتهية ، عندما نرفق بكل قيمة x من X احتمالات الحوادث $X = x_i$ نقول أننا نعرف قانون احتمال P_x للمتغير العشوائي X .

x_i	....	....	....	....	المجموع
$P(X = x_i)$	....	....	....	....	1

مثال :

نسحب كرة من صندوق يحتوي 10 كرات منها 5 بيضاء و 3 حمراء و 2 سوداء ، نرفق بكل كرة بيضاء العدد 2 وبكل كرة العدد -2 وبكل كرة سوداء العدد1.

01/الامل الرياضياتي للمتغير X هو العدد حيث :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$$

02/التباين للمتغير X هو العدد $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P_i$

03/الانحراف المعياري للمتغير X هو العدد $S = \sqrt{V(X)}$

04/ويمكن كتابة $V(X) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 P_i - (E(X))^2$

القوائم ، الترتيبات و التوفيقات :

n و p عددان طبيعيان غير معدومين ، نعتبر التجربة سحب p عنصر من مجموعة ذات n عنصرا :

السحب	التكرار	الترتيب	العدد
على التوالي بالارجاع : **قوائم**	م	م	
على التوالي بدون إرجاع : **ترتيبات**	غ م	م	
في أن واحد : **توفيقات**	غ م	غ م	

حيث : $A_n^p = n(n-1)\times..........\times(n-p+1)$ ، $A_n^n = n! = n(n-1)(n-2)..........\times 2\times 1$

$C_n^1 = n$ ، $C_n^n = 1$ ، $C_1^0 = 1$ ، $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

امثلة :

1) كم عدد من 4 أرقام يمكن تشكيلع باستخدام أرقام
2) لتكن ، كم عدد من 3 ارقام مختلفة من يمكن تشكيله .
3) نريد تشكيل لجنة من رئيس و نائب 1 ونائب 2 من قسم 3علمي 1 (31 تلميذ) بكم طريقة يمكن تشكيلها .

دستور ثنائي الحد :

n و p عددان طبيعين ، n عدد طبيعي $(n \geq 1)$ لدينا : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$

الاحتمالات الشرطية :

- **الحوادث المستقلة** : نقول عن حادثين A و B مستقلتين إذا وفقط إذا كان : $p(a\cap b) = P(A)\times P(B)$
- **الاحتمال الشرطي** : ليكن P احتمال علي المجموعة Ω و A حادثة حيث $P(A)\neq 0$ من اجل كل حادثة B ،

نسمي احتمال" B علما ان A محققة " العدد $P_A(B)$ والمعرف كما يلي : $P_A(B) = \dfrac{p(a\cap b)}{P(A)}$

ويمكن الكتابة أيضا : $P_A(B) = P(\mathrm{B/A})$

مثال : عند رمي زهرة نرد غير مزيف ، ما هو احتمال الحصول على رقم اكبر من 3 علما أنه فردي .

قانون الاحتمالات الكلية :

A حادثة احتمالها غير معدوم ، $\overline{A}$ حادثتها العكسية ، لدينا :

$$\boxed{P(B) = P(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{A}}) = P_A(B)\times P(A) + P_{\overline{A}}(B)\times P(\overline{A})}$$

سلسلة الاحتمالات

01 قطعة نقدية غير مزيفة ذات وجه F وظهر P ، نرمي القطعة 4 مرات متتالية ونعتبر الحوادث التالية :

A : " الحصول على أربعة أوجه "

B : " الحصول على وجهين و ظهرين "

C : " الحصول على ثلاث أوجه و ظهر "

1) قم بإنشاء شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية .

2) إعط عدد الحالات الممكنة .

3) احسب احتمال : A ، B و C

02 كيس A به أقلام 6 زرقاء و 5 حمراء ، و اخر به أقلام 9 زرقاء و5 حمراء نسحب بطريقة عشوائية قلما من كل كيس .

1) ما هو عدد الحالات الممكنة لهذا السحب ؟

2) احسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

- E : " الحصول على قلمين حمراوين "
- F : " الحصول على قلم واحد أحمر "
- G : " الحصول على الأقل على قلم أحمر "

03 كيس يحتوي على 20 كرية منها 15 بيضاء و 5 سوداء ، نسحب علي التوالي كريتين دون ارجاع، احسب احتمال الحوادث التالية :

- E : " الكرتين بيضاويتين "
- F : " الكرية الأولى سوداء و الثانية بيضاء "
- G : " الكريتين من نفس اللون "
- H : " الكريتين سوداويتين "

04 نرمي زهرة نرد مزيف أوجهه الستة تحمل الأرقام من 1 إلى 6 بحيث إحتمال ظهور كل وجه معطي كما يلي :

$p(6)=0,05$ ، $p(5)=0,3$ ، $p(4)=0,15$ ، $p(3)=0,25$ ، $p(2)=0,13$ ، $p(1)=0,12$

1 - أحسب احتمال الحادثة A ظهور رقم زوجي

2 - أحسب احتمال الحادثة B ظهور رقم فردي

3 - أحسب احتمال الحادثة C ظهور رقم أولي

4 - أحسب احتمال الحادثة D ظهور رقم مضاعف للعدد 3

05 يحتوي كيس 15 كرية مرقمة من 1 ألى 15 ، نسحب عشوائيا كرية واحدة ونسجل رقمها :

1 - عين المجموعة الشاملة Ω .

2 - عين الحادثة A الحصول على رقم مضاعف للعدد 5 .

3 - عين الحادثة B الحصول على رقم مضاعف للعدد 3 .

4 - عين الحوادث : $A \cap B$ و $\overline{A}$ و $\overline{B}$ ثم استنتج الحادثين : $\overline{A} \cap \overline{B}$ و $\overline{A \cap B}$.

06 يحتوي كيس على 7 كرات منها 3 كرات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 2 و 3 و 4 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و 4 ، نسحب عشوائيا من الكيس كرة واحدة

1 - أحسب احتمال الحوادث التالية :

N : كرة سوداء ، B : كرة بيضاء ، C : كرة تحمل رقم زوجي .

2 - أحسب احتمال الحوادث : $N \cap B$ ، $N \cap C$ ، $B \cap C$ ، $N \cup B$ ، $N \cup C$ ، $B \cup C$.

07 إليك قانون احتمال الاتي :

1 - أحسب الامل الرياضي

2 - أحسب التباين و الانحراف المعياري

x_i	-6	-5	-4	4	5	8
p_i	0,1	0,2	0,05	0,4	0,0,5	0,2

08 نعتبر المجموعة $\Omega=\{-1,0,2,5,6,10\}$ ونعرف قانون الاحتمال على Ω كما في الجدول :

1 - عين العدد الحقيقي

2 - أحسب الامل لهذا القانون .

3 - أحسب التباين ثم الانحراف المعياري لهذا القانون

e_i	-1	0	2	5	6	10
p_i	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	a

09 نرمي قطعة نقدية غير مزيفة 3 مرات متتابعة وليكن X المتغير العشوائي يرفق بكل 3 رميات متتابعة عدد الأوجه الظاهرة F

1 - أعط الاحالات الممكنة

2 - أعط مجموعة قيم X .

3 - عين قانون الاحتمال للمتغير X .

4 - عين الامل الرياضي للمتغير X

5 - أحسب التباين و الانحراف المعياري للمتغير X .

10 يحتوي وعاء على 6 قريصات لا نفرق بينها باللمس كل منها مرقمة بعدد اولي ينتمي الى مجموعة الاعداد الأولية الستة الأولى ، نسحب من الوعاء قريصتان في أن واحد عشوائيا ، وليكن X هو المتغير عشوائيا أي يأخذ مجموع الرقمين اللذان تحملهما القريصتان المسحوبتان

1 - عين قيم المتغير العشوائي X .

2 - أكتب قانون الاحتمال للمتغير X .

3 - أحسب الامل الرياضي .

4 - أحسب التباين و الانحراف المعياري .

11 يرمي لاعب زهري نرد متوازنين على شكل رباعي أوجه كل منهما تحمل الأرقام 1،2،3،4 وليكن X المعرف كما يلي

أ) إذا كان كان مجموع الرقمين الظاهرين زوجيا يربح نفس مجموع الرقمين بالدينار .

ب) إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين فرديا يخسر نفس مجموع الرقمين بالدينار .

1 - عين قيم المتغير العشوائي X

2 - عين قانون احتمال المتغير X

3 - أحسب الامل الرياضي ، التباين و الانحراف المعياري للمتغير X.

12 مجموعة متكونة من 100 شخص 60% رجال ونعلم أن 20% من الرجال و 25% من النساء يتكلمون الفرنسية

نختار شخصا عشوائيا من هذه المجموعة ، ما هي احتمالات الحوادث التالية :

1 - A " رجل يتكلم الفرنسية "

2 - B " امرأة تتكلم الفرنسية "

3 - C " شخص يتكلم الفرنسية "

13 نظم 5 لاعبين A ، B ، C ، D ، E منافسة في لعبة الشطرنج ، نفرض ان اللاعبين A ، B و C لهم نفس الاحتمال للربح واللاعبين D و E لهما نفس الاحتمال للربح و أن اللاعب A له ثلاث مرات حظوظ الربح للاعب D .

1. احسب احتمال ربح كل لاعب .
2. احسب احتمال ربح D أو E .
3. ما هو احتمال ربح A أو B أو C .
4. ما هو احتمال أن B لا يربح .

14 كيس يحتوي على 8 كرات منها 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء وكرة بيضاء ، نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الكيس ، نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق عدد الالوان المحصل عليها

1. احسب عدد الحالات الممكنة .
2. احسب الاحتمالات التالية : - 3 كرات من نفس اللون - كرة على الاقل حمراء - كرتين على الاكثر حمراء
3. ما هي قيم X
4. احسب الاحتمالات التالية : $P(x=1)$ ، $P(x=3)$ واستنتج $P(x=2)$
5. احسب الامل الرياضي $E(X)$ و التباين $V(X)$ ثم الانحراف المعياري $\delta(X)$

15 يحتوي كيس على اربع كرات بيضاء تحمل الارقام 0،1،1،2 وأربع كرات حمراء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الكيس ، وليكن X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات التي تحمل الرقم 1

1. ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون .
2. ما هو احتمال الحصول على 3 كرات تحمل نفس الرقم .
3. ما هو احتمال الحصول على 3 كرات ارقامها مختلفة مثنى مثنى .
4. عين قانون احتمال المتغير العشوائي X
5. احسب الامل الرياضي $E(X)$
6. احسب التباين $V(X)$
7. احسب الانحراف المعياري $\delta(X)$

16 يضم كيس 5 كرات متماثلة منها 3 بيضاء والباقي سوداء، نسحب كرتين عشوائيا ،نعتبر عدد الكرات البضاء المحصل عليها عين قانون احتمال في كل حالة

أ) السحب على التوالي دون ارجاع .

ب) السحب على التوالي مع الارجاع .

ج) السحب دفعة واحدة .

17 نفرض أن احتمال الازدياد للجنسين (الذكر و الانثى) متساوي مهما كانت رتبة هذه الولادة ، نعتبر مجموعة تمثل عائلات لها طفلان ونختار منها عشوائيا عائلة

1. احسب احتمال الحوادث التالية :

A : " العائلة لها ذكران "

B : " الطفل الأكبر ذكر "

C : " العائلة لها على الأقل ذكر "

D : "الطفل الأصغر بنت "

2. إذا علمت أن الطفل الأكبر ذكر احسب احتمال أن العائلة لها ذكران .

3. احسب : $P_C(A)$ ، $P_D(A)$ ، $P_A(C)$.

هدية :

تكدست في رأسي المشكلات و كنت أضنها يسيـــــــــرات

دخلت مغــــارة الرياضيــات رأيـــــت كنـــــوز متـــلألأت

جائتني الاعداد متتاليات هذه هندسية وأخرى حسابية المكونات

أسرعت للخروج فقيدتني المتسلسلات بين عمودين من أعمدة المحددات

قفزت الى رأسي الاحتمالات هربت من احدي المقذوفات

وحاولت توحيد المقامات فسالت عن المنجيات

قالو عليك بالمنحنيات وجدت نفسي أسير الفئات

تكالبت علي أذرع اللوغاريتمات وكبلتني قيود المتابينات

فعلمت أنه لا مفر من الرياضيات سرت وحيدا علي محور السينات