# النهايات والاستمرارية

## 1- نهايات دوال مألوفة

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} \lvert x\rvert = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \lvert x\rvert = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ |
| $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} \frac{1}{x} = -\infty$ | $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \frac{1}{x} = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \sqrt{x} = 0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} [ax+b] = -\infty (a>0)$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} [ax+b] = +\infty (a>0)$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} [ax+b] = +\infty (a<0)$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} [ax+b] = -\infty (a<0)$ |

## 2- التفسير الهندسي للنهايات

| النهاية | تفسيرها الهندسي |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$ | $(\mathbf{C_f})$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = a$ بجوار $\pm\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ | $(\mathbf{C_f})$ يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = x_0$ |
| $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\ (\mp\infty)$ | $(\mathbf{C_f})$ قد يقبل مستقيم مقارب مائل له معادلة من الشكل $y = ax + b$ بجوار $\pm\infty$ |

إذا كان $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathbf{C_f})$ بجوار $\pm\infty$

## 3- العمليات على النهايات

فيما يلي يمثل $a$ عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$

أ- نهاية مجموع دالتين

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | $\mp\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$ | $l+l'$ | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | ح.ع.ت |

ب- نهاية جداء دالتين

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l \neq 0$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $\infty$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x)$ | $l\times l'$ | $\infty$ | $\infty$ | ح.ع.ت |

الإشارة تعين حسب قواعد إشارة الجداء

ج- نهاية حاصل قسمة دالتين

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l \neq 0$ | $\infty$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l' \neq 0$ | $\infty$ | $0$ | $l'$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $\infty$ | $\infty$ | ح.ع.ت | ح.ع.ت |

الإشارة تعين حسب قواعد إشارة حاصل قسمة

## 4- بعض طرق إزالة حالات عدم التعيين

1- الاختزال 2- التحليل 3- المرافق 4- العدد المشتق
5- المقارنة 6- الحصر.

## 5- الاستمرارية

تعريف:

■ $f$ مستمرة عند قيمة $x_0$ معناه $f(x_0)$ معرفة و

$$\lim_{x\overset{>}{\to}x_0} f(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}x_0} f(x) = f(x_0)$$

■ $f$ مستمرة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ معناه $f$ مستمرة عند كل قيمة $x_0$ من هذا المجال.

## 6- تطبيقات مبرهنة القيم الوسطى

حالة 1:

■ $f$ معرفة، مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a, b]$

■ $k$ عدد حقيقي محصور تماما بين $f(a)$ و $f(b)$

حسب مبرهنة القيم الوسطى المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]a, b[$

تفسير هندسي: المنحنى $(\mathbf{C_f})$ يقطع مستقيم معادلته $y = k$ في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ في المجال $]a, b[$

حالة 2:

■ $f$ معرفة، مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a, b]$

■ $f(a) \times f(b) < 0$

حسب مبرهنة القيم الوسطى المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]a, b[$

تفسير هندسي: المنحنى $(\mathbf{C_f})$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ في المجال $]a, b[$

**ملاحظة:**

إذا كان المجال غير محدود مثلا $[a, +\infty[$ فإننا نكتب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ بدلا من الصورة $f(b)$ أي :

$$f(a) \times \lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$$