CHABANE Oussama

Clic 5min Maths

القسمة في Z

- ملخص الدرس و تطبيقات
- تمارين محلولة
- بكالوريا 2020-2008

للشعب: لغات أجنبية + أداب و فلسفة

BAC 2021

من تقديم الأستاذ شعبان أسامة

Facebook / telegram/instagram/google : 5min Maths   Tlemcen   0775737163

بسم الله الرحمن الرحيم

اليك أيها الطالب " Clic 5min Maths" للسنة الثالثة ثانوي الشعب العلمية لمحور القسمة في $\mathbb{Z}$

وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد للبكالوريا لدورة 2021، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد و ربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة ,

في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير

الأستاذ شعبان أسامة

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا

و ثانيا لجميع محبي المادة

"

ثمن هذا الملف دعوة في ظهر الغيب

تعريف: a و b عددان صحيحان و b غير معدوم. القول أن العدد b يقسم العدد a يعني وجود عدد صحيح k حيث: $a=kb$. نقول كذلك أن b قاسم للعدد a أو أن a مضاعف للعدد b

نكتب $b|a$ و نقرأ b يقسم a .

مثال: $48=8\times6$ و منه $6|48$

ملاحظة : للعددين الصحيحين a و $-a$ نفس القواسم في $\mathbb{Z}$ ($a=kb$ يعني $-a=-k\ \ b$).

- $37=5\times7+2$. 7 هو حاصل قسمة 37 على 5 و 2 هو باقي قسمة 37 على 5.

تعريف : n عدد طبيعي غير معدوم. القول أن عددين صحيحين a و b متوافقان بترديد n يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n.

نرمز $a\equiv b\ n$ أو $a\equiv b\ n$ و نقرأ a يوافق b بترديد n.

أمثلة: $27\equiv 92\ 5$ ، $12\equiv 34\ 11$ ، $24\equiv 3\ 7$ ، $-20\equiv 1\ 7$ ، $-59\equiv -3\ 8$.

ملاحظة : من أجل كل عدد صحيح x ، $x\equiv 0\ 1$.

مبرهنة: a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. يكون لِـ a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n إذا و فقط إذا كان $a-b$ مضاعفا للعدد n.

ملاحظة: نقول أن r هو الباقي إلا إذا كان $0\leq r<n$. فمثلا $16\equiv 6\ 5$ و 6 ليس باقي قسمة 16 على 5 لأن $6\geq 5$. أما الباقي فهو 1 لأن $16\equiv 1\ 5$ و $0\leq 1<5$.

خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$

الخاصية 1: **من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم و من أجل كل عدد صحيح a لدينا:** $a\equiv a\ [n]$.

الخاصية 2: a و b **عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم. إذا كان** $a\equiv b\ [n]$ **فإن** $b\equiv a\ [n]$.

الخاصية 3 (خاصية التعدي) : n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b و c أعداد صحيحة. إذا كان ($a\equiv b\ \ n$ و $b\equiv c\ \ n$) **فإن** $a\equiv c\ \ n$

الخاصية 4 (خاصية التلاؤم مع الجمع) : n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة. إذا كان ($a\equiv b\ \ n$ و $c\equiv d\ \ n$) **فإن** $a+c\equiv b+d\ \ n$.

الخاصية 5 (خاصية التلاؤم مع الضرب) : n عدد طبيعي غير معدوم. a ، b ، c و d أعداد صحيحة. إذا كان ($a \equiv b \quad n$ و $c \equiv d \quad n$)

فإن $a \times c \equiv b \times d \quad n$.

ملاحظة: يتم تعميم الخاصية السابقة إلى جداء عدة أعداد صحيحة.

الخاصية 6: n و p عددان طبيعيان غير معدومين. a و b عددان صحيحان. إذا كان $a \equiv b \quad n$ فإن $a^p \equiv b^p \quad n$.

تطبيقات

1.

عين باقي قسمة العدد الصحيح a على العدد الطبيعي b ، ثم عين أحصر العدد a بين مضاعفين متعاقبين للعدد b في كل حالة من الحالات الآتية.

1. $a = 8159$ و $b = 52$. 2. $a = 725$ و $b = 91$. 3. $a = -7361$ و $b = 47$.

الحل:

1. $8159 = 52 \times 156 + 47$. 156 هو حاصل قسمة 8159 على 52 و 47 هو باقي قسمة 8159 على 52.

$52 \times 156 \leq 8159 < 52 \times 157$ أي $8112 \leq 8159 < 8164$.

2. $725 = 91 \times 7 + 88$. 7 هو حاصل قسمة 725 على 91 و 88 هو باقي قسمة 725 على 91.

$91 \times 7 \leq 725 < 91 \times 8$ أي $637 \leq 725 < 728$.

3. $-7361 = 47 \times -157 + 18$. -157 هو حاصل قسمة -7361 على 47 و 18 هو باقي قسمة -7361 على 47 . $47 \times -157 \leq -7361 < 47 \times -156$ أي $-7379 \leq -7361 < -7332$.

2.

a عدد صحيح باقي قسمته على 10 هو 6.

1. ما هو باقي قسمة العدد a على 5 ؟
2. ما هو باقي قسمة العدد a على 2 ؟

الحل:

$a=10k+6$ حيث k عدد صحيح .

1. $a=10k+5+1$ و منه $a=5(2k+1)+1$ ومنه باقي قسمة a على 5 هو 1 .

2. $a=2(5k+3)$ ومنه باقي قسمة a على 2 هو 0 .

.3

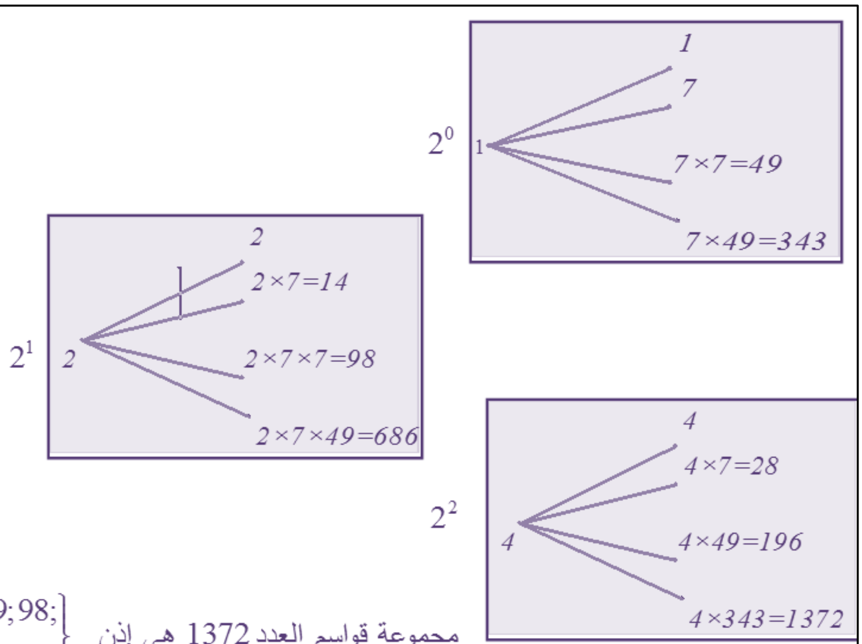
حلل العدد 1372 إلى جداء عوامل أولية و عين مجموعة قواسم العدد 1372 .

الحل:

طريقة: لإيجاد عدد قواسم عدد طبيعي a نحلل a إلى جداء عوامل أولية . إلى كل أس في التحليل نضيف 1 ثم نحسب جداء الأعداد المحصل عليها .

1) $1372=2^2\times7^3$. عدد قواسم 1372 هو $(2+1)(3+1)=12$. العدد 1372 يقبل إذن 12 قاسما .

2) لتكن D_{1372} مجموعة قواسم 1372 . لإيجاد المجموعة D_{1372} يمكن استعمال الشجرة الآتية .



مجموعة قواسم العدد 1372 هي إذن $D_{1372}=\{1;2;4;7;14;28;49;98;196;343;686;1372\}$

.4

من بين الموافقات الآتية أذكر الصحيحة و الخاطئة:

1) $26\equiv 11\ 5$ ؛ 2) $-32\equiv 18\ 10$ ؛ 3) $478\equiv 32\ 5$ ؛ 4) $58\equiv -5\ 7$

5) $63^2\equiv 14\ 5$ ؛ 6) $144\equiv 11\ 19$ ؛ 7) $131^2\equiv 25\ 12$ ؛ 8) $48^3\equiv 36\ 7$

الحل:

🔔طريقة: للبرهان على أن $a\equiv b\ n$ يمكن البرهان على أن $a-b$ مضاعف لـ n أو البرهان على أن لـ a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n .

1) $26-11=15$ و $15=3\times 5$. إذن $26\equiv 11\ 5$ صحيحة.

2) $-32-18=-50$ و $-5\ \times 10=-50$. إذن $-32\equiv 18\ 10$ صحيحة.

3) $478-32=446$ و $446=89\times 5+1$. إذن $478\equiv 32\ 5$ خاطئة . و نكتب $[5$ $478\not\equiv 32$.

4) $58+5=63$ و $63=9\times 7$. إذن $58\equiv -5\ 7$ صحيحة.

5) $63^2=3969$. باقي قسمة 63^2 على 5 هو 4 إذن وبما أن باقي قسمة العدد 14 على 5 هو كذلك 4 فإن $63^2\equiv 14\ 5$ صحيحة.

6) $144=19\times 7+11$ و بما أن العدد 144 يوافق بترديد 19 باقي قسمته على 19 نستنتج أن $144\equiv 11\ 19$ صحيحة.

7) $131^2=1430\times 12+1$ و $25=2\times 12+1$ تحصلنا على نفس الباقي في القسمة على 12 إذن $131^2\equiv 25\ 12$ صحيحة.

8) $48^3=15799\times 7+6$ و $36=5\times 7+1$ لم نحصل على نفس الباقي في القسمة على 7 إذن $48^3\equiv 36\ 7$ خاطئة. و نكتب $[7$ $48^3\not\equiv 36$.

.5

عين في كل حالة من الحالات الآتية $(a\equiv b\ [n])$ باقي قسمة a على n و باقي قسمة b على n، ثم أذكر صحة أو خطأ الموافقة.

1) $262\equiv 927\ 5$ ؛ 2) $-322\equiv 78\ 4$ ؛ 3) $471\equiv 30\ 8$ ؛ 4) $158\equiv 39\ 17$

الحل:

1) $262=5\times52+2$ و $927=5\times185+2$ إذن باقي قسمة 262 على 5 هو 2 و باقي قسمة 927 على 5 هو 2 و منه 262 و 927 لهما نفس الباقي في القسمة على 5 إذن $262\equiv 927 \; 5$ صحيحة .

2) $-322=4\times \; -81 \; +2$ و $78=4\times19+2$ إذن باقي قسمة -322 على 4 هو 2 و باقي قسمة 78 على 4 هو 2 و منه -322 و 78 لهما نفس الباقي في القسمة على 4 إذن $-322\equiv 78 \; 4$ صحيحة .

3) $471=8\times58+7$ و $30=8\times3+6$ إذن باقي قسمة 471 على 8 هو 7 و باقي قسمة 30 على 8هو 6 و منه 471 و 30 ليس لهما نفس الباقي في القسمة على 8 إذن $471\equiv 30 \; 8$ خاطئة. و نكتب $471\not\equiv 30 \; [8$.

4) $158=17\times9+5$ و $39=17\times2+5$ إذن باقي قسمة 158 على 17 هو 5 و باقي قسمة 39 على 17 هو 5 و منه 158 و 39 لهما نفس الباقي في القسمة على 17 إذن $158\equiv 39 \; 17$ صحيحة.

6.

لتكن الأعداد الصحيحة التالية : $a=255$ ، $b=837$ و $c=3691$.

1.عين باقي قسمة الأعداد a، b و c على العدد 11 .

2.باستعمال الموافقات عين باقي قسمة كل من $a+b$ ، $a\times c$ ، $a+b+c$ ، a^2 ، $a\times b\times c$.

الحل:

1. باستعمال حاسبة نجد أن بواقي الأعداد a ، b و c على العدد 11 هي 2 ، 1 ، 6 على الترتيب.
2. لدينا: $\begin{cases} a\equiv 2 \; 11 \\ b\equiv 1 \; 11 \end{cases}$ و بتطبيق خاصية الجمع نجد $a+b\equiv 3 \; 11$ و منه الباقي هو 3.

لدينا $a\equiv 2 \; 11$ و $c\equiv 6 \; 11$. بتطبيق خاصية الضرب نجد $ac\equiv 12 \; 11$ و بما أن $12\equiv 1 \; [11]$

فإنه بالتعدي $ac\equiv 1 \; 11$ و منه الباقي هو 1.

لدينا: $\begin{cases} a\equiv 2 \; 11 \\ b\equiv 1 \; 11 \\ c\equiv 6 \; 11 \end{cases}$ و بتطبيق خاصية الجمع نجد $a+b+c\equiv 9 \; 11$ و الباقي هو 9 .

لدينا: $a\equiv 2 \; 11$ و بتطبيق الخاصية 6 نجد $a^2\equiv 2^2 \; 11$ أي $a^2\equiv 4 \; 11$ و الباقي هو 4 .

$\begin{cases} a\equiv 2 \; 11 \\ b\equiv 1 \; 11 \\ c\equiv 6 \; 11 \end{cases}$ و بتطبيق خاصية الضرب نجد $a\times b\times c\equiv 1\times2\times6 \; 11$ أي $a\times b\times c\equiv 12 \; 11$

و $12\equiv 1 \; 11$ و بتطبيق خاصية التعدي نجد $a\times b\times c\equiv 1 \; 11$ و الباقي هو 1.

.٧

a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv 3\ [5]$ و $b \equiv 4\ [5]$.

1.بين أن العدد $2a+b$ يقبل القسمة على 5.
2.عين باقي قسمة العدد $2a^2+b^2$ على 5.
2.تحقق أن $b \equiv -1\ [5]$. استنتج باقي قسمة b^{2007} و b^{1428} على 5.

الحل:

1. لدينا $\begin{cases} a \equiv 3 & 5 \\ b \equiv 4 & 5 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2a \equiv 6 & 5 \\ b \equiv 4 & 5 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a \equiv 1 & 5 \\ b \equiv 4 & 5 \end{cases}$ لأن $6 \equiv 1\ [5]$. بتطبيق خاصية الجمع نحصل على: $2a+b \equiv 5\ [5]$ و بما أن $5 \equiv 0\ [5]$ فإن $2a+b \equiv 0\ [5]$. باقي قسمة $2a+b$ على 5 هو 0. نستنتج هكذا أن العدد $2a+b$ يقبل القسمة على 5.

2. لدينا $\begin{cases} a \equiv 3 & 5 \\ b \equiv 4 & 5 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2a^2 \equiv 2\times 9 & 5 \\ b^2 \equiv 16 & 5 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2a^2 \equiv 3 & 5 \\ b^2 \equiv 1 & 5 \end{cases}$ لأن $18 \equiv 3\ [5]$ و $16 \equiv 1\ [5]$.
بتطبيق خاصية الجمع نحصل على: $2a^2+b^2 \equiv 4\ [5]$. باقي قسمة العدد $2a^2+b^2$ على 5 هو إذن 4.

3. من الواضح أن $4 \equiv -1\ [5]$ و منه باستعمال خاصية التعدي نحصل على $b \equiv -1\ [5]$.
بتطبيق الخاصية6 نحصل على $b^{2007} \equiv (-1)^{2007}\ [5]$ و $b^{1428} \equiv 1^{1428}\ [5]$ أي $b^{2007} \equiv -1[5]$ و $b^{1428} \equiv 1[5]$.

و بما أن $-1 \equiv 4\ [5]$ فإن $b^{2007} \equiv 4[5]$. نستنتج أن باقي قسمة b^{2007} على 5 هو 4 و باقي قسمة b^{1428} على 5 هو 1.

التمارين

1.

a و b عددان طبيعيان حيث $\mathbf{b = 2006}$ ، $\mathbf{a = 1428}$

1/أ) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 9

ب) بين أن : $b \equiv -1[9]$

ج) هل العددان a و b متوافقان بترديد 9؟ برر إجابتك.

2/أ) ما هو باقي قسمة العدد $(a+b^2)$ على 9؟

2.

1-أحسب باقي قسمة كل من 3^2 ، 3^3 ، 3^4 ، 3^5 ، 3^6 على 7.

2-عين باقي قسمة كل من: 3^{6n} و 3^{6n+4} على 7 حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

استنتج باقي قسمة 3^{2008} على 7.

3-بين أن العدد: $3\times3^{6n+4}-2\times3^{6n}+4$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .

3.

ليكن العدد الطبيعي $a=25$

1.أ-تحقق أن: $a\equiv1[3]$

ب-استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2a^2+4$ على 3

ج-بين أن: $a^{360}-5\equiv2[3]$

2.أ)أدرس،حسب قيم العدد الطبيعي n ،بواقي قسمة 5^n على 3

ب)عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $5^n+a^2\equiv0[3]$

4.

a و b عددان طبيعيان حيث: $a=2010$ و $b=1431$.

1.أ-عين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7.

ب-استنتج مما سبق ، باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a+2b)$ على 7.

ج-تحقق أن: $a^3\equiv 1[7]$ و $b^3\equiv 6[7]$ واستنتج أن

$a^3+b^3\equiv 0[7]$.

2.أوجد الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $n+2010^3\equiv 1431[7]$

ثم استنتج قيم n الأصغر من أوتساوي16.

5.

نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث: $a=619$ و $b=2124$.

1).بين أن العددين a و b متوافقان بترديد5.

2.أ)بين أن: $2124\equiv -1[5]$

ب)استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2124^{720} و 619^{721} على5.

ج)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2124^{2n}\equiv 1[5]$.

د)عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $2124^{4n}+619^{4n+1}+n\equiv 0[5]$.

6.

a و b و c أعداد صحيحة بحيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3،باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4 وباقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6.

1-عين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين: $a\times b$ ، a^2-b^2.

2-أ)أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $c^{2n}\equiv 1[7]$.

ب)تحقق أن $48\equiv 6[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين: 48^{2010} و 48^{2011} على 7.

الحلول

حل التمرين الأول:

a و b عددان طبيعيان حيث **b = 2006** ، **a = 1428**

1/أ) تعين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 9

لدينا: $1428 = 9*158+6$ و بالتالي الباقي هو **6.**

ب) بين أن : $b \equiv -1[9]$

لدينا: $2006 = 9*222+8$ أي: $\begin{cases} b \equiv 8[9] \\ 8 \equiv -1[9] \end{cases}$ و منه حسب خاصية التعدي نجد: $b \equiv -1[9]$

جـ) هل العددان a و b متوافقان بترديد 9؟

a و b **غير متوافقان بترديد 9 لأن باقيهما على 9 غير متساوي**

2/أ) باقي قسمة العدد $(a+b^2)$ على 9.

لدينا:
$$a \equiv 6[9]$$
$$b \equiv -1[9]$$
$$b^2 \equiv 1[9]$$
$$a+b^2 \equiv 6+1[9]$$
$$a+b^2 \equiv 7[9]$$
اذن الباقي هو 7.

حل التمرين الثاني:

1-أحسب باقي قسمة كل من 3^2 ، 3^3 ، 3^4 ، 3^5 ، 3^6 **على 7.**

العدد	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
الباقي على 7	2	6	4	5	1

2-من الجدول باقي قسمة: 3^{6n} على 7 هو **1.**

باقي قسمة. 3^{6n+4} على 7 **هو: 4**

استنتج باقي قسمة 3^{2008} على 7.

نلاحظ أن: $2008 = 6*334+4$ **بالاستعانة بالجدول نجد الباقي هو 4.**

3-بين أن العدد: $3\times3^{6n+4}-2\times3^{6n}+4$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .

$3^{6n+4} \equiv 4\ [7]$
$3^{6n} \equiv 1\ [7]$
$3\times3^{6n+4}-2\times3^{6n}+4 \equiv 3\times4-2\times1+4\ [7]$
$3\times3^{6n+4}-2\times3^{6n}+4 \equiv 12-2+4\ [7]$
$3\times3^{6n+4}-2\times3^{6n}+4 \equiv 14\ [7]$

بما أن: $14 \equiv 0\ [7]$

حسب خاصية التعدي:

فإن: $3\times3^{6n+4}-2\times3^{6n}+4 \equiv 0\ [7]$

- **ومنه من أجل كل عدد طبيعي** n:

العدد $3\times3^{6n+4}-2\times3^{6n}+4$ **يقبل القسمة على** 7.

حل التمرين الثالث:

ليكن العدد الطبيعي $a=25$

1.أ-تحقق أن: $a\equiv1[3]$ **نلاحظ** $25=8*3+1$

$25\equiv1[3]$

ب-استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2a^2+4$ **على 3**

$a \equiv 1\ [3]$
$a^2 \equiv 1^2\ [3]$
$a^2 \equiv 1\ [3]$

$2a^2 \equiv 2\times1\ [3]$
$2a^2 \equiv 2\ [3]$

$2a^2+4 \equiv 2+4\ [3]$
$2a^2+4 \equiv 6\ [3]$

وبما أن: $6 \equiv 0\ [3]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $2a^2+4 \equiv 0\ [3]$

اذن لاباقي هو 0.ج-بين أن: $a^{360}-5\equiv2[3]$

$a \equiv 1\ [3]$
$a^{360} \equiv 1^{360}\ [3]$
$a^{360} \equiv 1\ [3]$

$a^{360}-5 \equiv 1-5\ [3]$
$a^{360}-5 \equiv -4\ [3]$
$-6 \equiv 0\ [3]$

$2+(-6) \equiv 2+0\ [3]$
$-4 \equiv 2\ [3] \dots (2)$

حسب خاصية التعدي: $a^{360}-5 \equiv 2\ [3]$

2.أ)،حسب قيم العدد الطبيعي n ،بواقي قسمة 5^n على**3**.

نلخص بواقي قسمة 5^n على 3 في الجدول التالي:

n	$2k$	$2k+1$	$k \in \mathbb{N}$
$5^n \equiv$	1	2	[3]

ب)عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $5^n + a^2 \equiv 0[3]$

لدينا: $5^n + a^2 \equiv 0\ [3]$

$a^2 \equiv 1\ [3]$

$5^n + 1 \equiv 0\ [3]$

$5^n \equiv -1\ [3]$

$5^n \equiv 2\ [3]$

و لدينا من السؤال السابق: $5^{2k+1} \equiv 2\ [3]$ **بالمطابقة نجد:** $n = 2k+1$

حل التمرين الرابع:

a وb عددان طبيعيان حيث: $a = 2010$ و $b = 1431$.

1.أ- باقي القسمة الإقليدية للعدد a **على 7 هو 1. نكتب:** $a \equiv 1[7]$

باقي القسمة الإقليدية للعدد b **على 7 هو 3. نكتب** $b \equiv 3[7]$

ب- باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a+2b)$ **على 7.**

لدينا: $a \equiv 1\ [7]$

و لدينا: $b \equiv 3\ [7]$

$2b \equiv 2 \times 3\ [7]$

ومنه: $2b \equiv 6\ [7]$

$a + 2b \equiv 1 + 6\ [7]$

$a + 2b \equiv 7\ [7]$

$7 \equiv 0\ [7]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $a + 2b \equiv 0\ [7]$ **و بالتالي الباقي هو 0.**

جـ-تحقق أن: $a^3 \equiv 1[7]$

لدينا:

$a^3 \equiv 1^3[7]$

$a^3 \equiv 1[7]$

و $b^3 \equiv 6[7]$

$b^3 \equiv 3^3[7]$

$b^3 \equiv 3[7]$

اذن بالجمع نجد: $a^3 + b^3 \equiv 0[7]$.

2.أوجد الأعداد الطبيعية n **التي تحقق:** $n + 2010^3 \equiv 1431[7]$

$$n + 2010^3 \equiv 1431\ [7]$$

$n + 2010^3 \equiv 1431[7]$
$n + a^3 \equiv b\ [7]$
$n + 1 \equiv 3\ [7]$
$n \equiv 3 - 1[7]$
$n \equiv 2\ [7]$

ومنه: $n = 7k + 2$ **حيث** k **عدد طبيعي**

استنتاج قيم n الأصغر من أوتساوي16.

نحل في $\mathbb{N}$ المتراجحة: $n \leq 16$
$7k + 2 \leq 16$
$7k \leq 16 - 2$
$7k \leq 14$

ومنه: $k \leq 2$

إذن قيم k هي: $k \in \{0\,,1\,,2\}$

نلخص قيم n في الجدول التالي:

k	0	1	2
$n = 7k + 2$	2	9	16

إذن قيم n هي: $n \in \{2\,,9\,,16\}$

حل التمرين الخامس:

نعتبر العددين الطبيعيين a وb حيث: $a = 619$ **و** $b = 2124$.

1).اثبات أن العددين aو b متوافقان بترديد5.

لدينا: $619 = 123 \times 5 + 4$
$619 \equiv 4\ [5]$
$a \equiv 4\ [5]$

- **باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 5 هو:** 4

ولدينا: $2124 = 424 \times 5 + 4$

نكتب: $2124 \equiv 4\ [5]$

أي: $b \equiv 4\ [5]$

- **باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 5 هو:** 4

بما أن للعددين a و b نفس باقي القسمة الإقليدية على 5، فهما متوافقان بترديد 5.

2.أ)بين أن: $2124 \equiv -1[5]$

لدينا: $2125 \equiv 0\ [5]$

نضيف العدد (-1) لطرفي الموافقة (من خواص الموافقات)

فيكون: $2125 + (-1) \equiv 0 + (-1)\ [5]$

ومنه: $2124 \equiv -1\ [5]$

ب)استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2124^{720} و 619^{721} على5.

لدينا: $2124 \equiv -1\ [5]$

حسب خواص الموافقات: $2124^{720} \equiv (-1)^{720}\ [5]$

بما أن 720 عدد زوجي فإن: $(-1)^{720} = 1$

ومنه: $2124^{720} \equiv 1\ [5]$

إذن باقي قسمة 2124^{720} على 5 هو: 1

$619 \equiv 4\ [5]$

$619 \equiv -1\ [5]$

$619^{721} \equiv (-1)^{721}\ [5]$

بما أن 721 عدد فردي فإن: $(-1)^{721} = -1$

أي: $619^{721} \equiv -1\ [5]$

ومنه: $619^{721} \equiv 4\ [5]$

إذن باقي قسمة 619^{721} على 5 هو: 4

ج)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2124^{2n} \equiv 1[5]$.

لدينا: $2124 \equiv -1\ [5]$

$2124^{2n} \equiv (-1)^{2n}\ [5]$

$(-1)^{2n} = 1$

ومنه: $2124^{2n} \equiv 1\ [5]$

د)عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0[5]$.

$$2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0\ [5]$$

$$2124^{4n} + 619^{4n+1} + n \equiv 0\ [5]$$

$$2124^{4n} + 619 \times 619^{4n} + n \equiv 0\ [5]$$

$$2124^{2(2n)} + 619 \times 619^{2(2n)} + n \equiv 0\ [5]$$

$$(2124^{2n})^2 + 619 \times (619^{2n})^2 + n \equiv 0\ [5]$$

$$(1)^2 + 4 \times (1)^2 + n \equiv 0\ [5]$$

$$1 + 4 + n \equiv 0\ [5]$$

$$n + 5 \equiv 0\ [5]$$

أي: $n \equiv 0\ [5]$

ومنه: $n = 5k$

حيث k عدد طبيعي.

حل التمرين السادس:

a وb وc أعداد صحيحة بحيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3،باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4 وباقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6.

1-تعين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين: $a \times b$ ، $a^2 - b^2$.

لدينا: $a \equiv 3\ [7]$

ولدينا: $b \equiv 4\ [7]$

$a \times b \equiv 12\ [7]$

$12 \equiv 5\ [7]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $a \times b \equiv 5\ [7]$

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $a \times b$ على 7 هو: 5

$a \equiv 3\ [7]$

حسب خواص الموافقات: $a^2 \equiv 3^2\ [7]$

$3^2 \equiv 2\ [7]$

$a^2 \equiv 2\ [7]$

ولدينا: $b \equiv 4\ [7]$

حسب خواص الموافقات: $b^2 \equiv 4^2\ [7]$

وبما أن: $4^2 \equiv 2\ [7]$

$b^2 \equiv 2\ [7]$

$a^2 - b^2 \equiv 0\ [7]$

باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على 7 هو: 0

2-أ) اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $c^{2n} \equiv 1[7]$.

لدينا: $c \equiv 6\ [7]$

وبما أن: $6 \equiv -1\ [7]$

$c \equiv -1\ [7]$

حسب خواص الموافقات: .... $c^{2n} \equiv (-1)^{2n}\ [7]$

$(-1)^{2n} = 1$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $c^{2n} \equiv 1\ [7]$

ب)تحقق أن $48 \equiv 6[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين: 48^{2010}

بما أن 2010 عدد زوجي فإن: $(-1)^{2010} = 1$

ومنه: $48^{2010} \equiv 1\ [7]$

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد 48^{2010} على 7 هو: 1

48^{2011} على 7.

بما أن 2011 عدد فردي فإن: $(-1)^{2011} = -1$

أي: $48^{2011} \equiv -1\ [7]$

ومنه: $48^{2011} \equiv 6\ [7]$

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد 48^{2011} على 7 هو: 6

القسمة الاقليدية و الموافقات في Z

بكالوريا 2008-2020

بكالوريا 2008

الموضوع الأول: (06 نقط)

a و b عددان طبيعيان حيث $b = 2006$ ، $a = 1428$

1/أ) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 9

ب) بين أن : $b \equiv -1[9]$

ج) هل العددان a و b متوافقان بترديد 9؟ برر إجابتك.

2/أ) ما هو باقي قسمة العدد $(a+b^2)$ على 9؟

ب) استنتج باقي قسمة $(a+b^2)$ على 3.

الموضوع الثاني: (04نقط)

1-أحسب باقي قسمة كل من 3^2 ، 3^3 ، 3^4 ، 3^5 ، 3^6 على 7.

2-عين باقي قسمة كل من: 3^{6n} و 3^{6n+4} على 7 حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

استنتج باقي قسمة 3^{2008} على 7.

3-بين أن العدد: $3\times3^{6n+4}-2\times3^{6n}+4$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n.

بكالوريا 2009

الموضوع الأول: (05نقط)

ليكن العدد الطبيعي $a = 25$

1.أ-تحقق أن: $a \equiv 1[3]$

ب-استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $2a^2+4$ على 3

ج-بين أن: $a^{360}-5 \equiv 2[3]$

2.أ)أدرس،حسب قيم العدد الطبيعي n،بواقي قسمة 5^n على 3

ب)عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $5^n+a^2 \equiv 0[3]$

الموضوع الثاني: (05نقط)

1)أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

2)عين باقي القسمة الإقليدية للعدد: $(1429^{2009}+2008^{1430})$ على 9

.

3)بين أن العدد A حيث: $A=7^{3n}+7^{3n+1}+7^{3n+2}+6$ يقبل القسمة على 9 من أجل كل عدد طبيعي n.

بكالوريا 2010

الموضوع الأول: (06 نقط)

a و b عددان طبيعيان حيث: $a=2010$ و $b=1431$.

1.أ-عين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7.

ب-استنتج مما سبق ، باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a+2b)$ على 7.

ج-تحقق أن: $a^3 \equiv 1[7]$ و $b^3 \equiv 6[7]$ واستنتج أن $a^3+b^3 \equiv 0[7]$.

2.أوجد الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $n+2010^3 \equiv 1431[7]$

ثم استنتج قيم n الأصغر من أوتساوي 16.

الموضوع الثاني: (03نقط)

في كل من الأسئلة الآتية،اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة،مع التعليل.

1.باقي القسمة الإقليدية للعدد (203-) على 5 هو:

أ) 3-　　　ب) 2　　　ج) 3

2. x عدد صحيح. إذا كان باقي القسمة الإقليدية للعدد x على 7 هو 5،فإن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2x+5$ على 7 هو:

أ) 0　　　ب) 1　　　ج) 2.

بكالوريا 2011

الموضوع الأول: (06نقط)

نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث: $a=619$ و $b=2124$.

1.بين أن العددين a و b متوافقان بترديد 5.

2.أ)بين أن: $2124 \equiv -1[5]$

ب)استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2124^{720} و 619^{721} على 5.

ج)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2124^{2n} \equiv 1[5]$.

د)عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $2124^{4n}+619^{4n+1}+n \equiv 0[5]$.

الموضوع الثاني: **(06نقط)**

a وb وc أعداد صحيحة بحيث باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3،باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4 وباقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6.

1-عين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين: $a\times b$ ، a^2-b^2.

2-أ)أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $c^{2n}\equiv 1[7]$.

ب)تحقق أن $48\equiv 6[7]$ ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين: 48^{2010} و 48^{2011} على 7.

بكالوريا

2012

الموضوع الأول: **(03نقط)**

اذكر في كل حالة من الحالات الآتية إن كانت العبارة المقترحة صحيحة أوخاطئة مع التعليل.

1. n و n' عددان طبيعيان حيث: $n=3n'+5$. باقي قسمة n على 3 هو 5.

2.باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2012} على 7هو 4.(لاحظ أن: $2012=3\times670+2$).

3. n عدد صحيح حيث: $n\equiv 2[11]$. باقي القسمة الإقليدية للعدد $2n^2-9$ على 11 هو 10.

الموضوع الثاني: **(06نقط)**

a وb عددان طبيعيان بحيث: $a+b\equiv 7[11]$ و$a-b\equiv 5[11]$.

1.أ) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a^2-b^2 على العدد11.

ب)بين أن: $2a\equiv 1[11]$ و $2b\equiv 2[11]$ ثم استنتج أن: $a\equiv 6[11]$ و $b\equiv 1[11]$.

2.أ)أثبت أن: $a^5\equiv -1[11]$

ب)استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k: $a^{10k}\equiv 1[11]$.

3.أ)تحقق أن: $2012=10\times201+2$.

ب)عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a^{2012} على العدد 11.

بكالوريا

2013

الموضوع الأول: (06نقط)

1-هل العددان 2013 و718 متوافقان بترديد 7؟

2-أ)عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^6 على 7.

ب)استنتج أنه،من أجل كل عدد طبيعي n: $4^{6n}-1\equiv 0[7]$

3-أ)عين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2013 و718 على 7.

ب)بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $3\times718^{6n}+2013$ يقبل القسمة على 7.

4-أ)تحقق أن: $1434\equiv -1[7]$.

ب)عين الأعداد الطبيعية n، الأصغر من 25، بحيث: $1434^{2n}+n\equiv 0[7]$.

الموضوع الثاني: **(06نقط)**

a وb عددان صحيحان حيث: $a\equiv 2[7]$ و $b\equiv 6[7]$.

1-عين باقي القسمة الإقليدية للعدد $3a+b$ على 7.

2-عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a^2+3b^2 على 7.

3-أ)تحقق أن: $b\equiv -1[7]$.

ب)استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين b^{2013} وb^{1434} على 7.

4-عين الأعداد الطبيعية n بحيث: $(a+b)^n+n\equiv 0[7]$.

بكالوريا

2014

الموضوع الأول: **(05نقط)**

1)عين باقي القسمة الاقليدية للعدد28 على العدد 9

2)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k: $10^k\equiv 1[9]$

3)استنتج أن: $4\times10^4+3\times10^3+2\times10^2+28\equiv 1[9]$

4)أ)تحقق أن: $2^3\equiv -1[9]$

ب)عين الأعداد الطبيعية n بحيث: $2^{6n}+n-1\equiv 0[9]$

الموضوع الثاني: **(06نقط)**

عين الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الخمسة مع التبرير:

	الاقتراح-أ	الاقتراح -ب	الاقتراح -ج
1	عدد قواسم العدد 1435هو:	8	5	2
2	إذا كان $a\equiv -1[8]$ فإن باقي قسمة a على 8هو:	-1	7	6
3	العددان1435و 2014متوافقان بترديد:	2	4	3
4	إذا كان $x\equiv 2[5]$ و $y\equiv 2[5]$ فإن:	$x^9+y^9\equiv 3[5]$	$x^9+y^9\equiv 2[5]$	$x^9+y^9\equiv 4[5]$
5	لدينا $27\equiv 21[6]$ إذن:	$9\equiv 7[6]$	$9\equiv 7[2]$	$9\equiv 7[3]$

بكالوريا 2015

الموضوع الأول: **(05نقط)**

عين الاقتراح الوحيد الصحيح مع التعليل. من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الأربعة التالية:

1.اذا كان a عددا صحيحا حيث: $a\equiv -1[5]$ فان:

أ- $a\equiv 2[5]$ ب- $a\equiv 6[5]$ ج- $a\equiv 99[5]$

2.باقي القسمة الإقليدية للعدد -99 على 7 هو:

أ- 1- ب- 6 ج- 1

3.من أجل كل عدد طبيعي n.العدد 10^n-1 يقبل القسمة على:

أ- 3 ب- 5 ج- 2

4.مجموع كل ثلاثة أعداد طبيعية متعاقبة هو دوما:

أ-عدد زوجي ب- مضاعف للعدد3 ج-مضاعف للعدد4

الموضوع الثاني: **(06نقط)**

a و b عددان صحيحان يحققان: $a\equiv 13[7]$ و $b\equiv -6[7]$

1.عين باقي القسمة الاقليدية على 7 لكل من a و b

2.بين أن العددين a^3+1 و b^3+1 يقبلان القسمة على7

3.أ-تحقق أن : $a\equiv 2015[7]$ و $a\equiv 1436[7]$

ب-عين باقي القسمة الاقليدية على 7 للعدد: 2015^3+1436^3 .

ج-استنتج أن: $2015^3+1436^3-1962^2+1\equiv 0[7]$

بكالوريا 2016

الموضوع الأول: **(05نقط)**

1.عين باقي القسمة الاقليدية لكل من الأعداد $2^4,2^3,2^2,2^1,2^0$ على العدد5.

2.أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $2^{4n}\equiv 1[5]$

ب-استنتج باقي القسمة الاقليدية لعدد 2^{2016} على العدد5.

3.عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون : $2^{2016}+2+n\equiv 0[5]$

الموضوع الثاني: **(06نقط)**

1.أ- عين باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^3 على9.

ب-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k: $4^{3k}\equiv 1[9]$

ج-أدرس حسب قيم العدد طبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على9.

د- عين باقي القسمة الاقليدية للعدد 2015^{2016} على9.

2.أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $8^{2n}\equiv 1[9]$

ب-عين الأعداد الطبيعية بحيث يكون العدد مضاعفا للعدد9. $8^{2n}+4^n+1$.

بكالوريا 2017

الموضوع الأول: **(06نقط)**

نعتبر الأعداد الطبيعية c,b,a حيث:

$a=2016$ ، $b=1437$ و $c=1954$

1. عين باقي القسمة الاقليدية لكل من الأعداد c,b,a على5.

2. استنتج باقي القسمة الاقليدية لكل من الأعداد: $a+b+c$ و $a\times b\times c$ و b^4 على5.

3.أ-تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $b^{4n}\equiv 1[5]$

ب-استنتج أن العدد $b^{2016}-1$ يقبل القسمة على 5.

4.أ- تحقق أن : $c\equiv -1[5]$

ب-بين أن: $c^{1438}+c^{2017}\equiv 0[5]$

الموضوع الثاني: **(06نقط)**

c,b,a ثلاثة أعداد طبيعية حيث:

$a=-5[7]$ ، $b=1966$ و $c=2017$

1. عين باقي القسمة الاقليدية لكل من الأعداد c,b,a على7.

2.تحقق أن: $b=-1[7]$

3.أثبت أن العدد: $b^{2017}+3c^{1438}-2$ يقبل القسمة على7.

4. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $2^{3k}=1[7]$ ثم استنتج أن: $2^{3k+1}=2[7]$ و $2^{3k+2}=4[7]$

5. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : 2^n+3 .قابلا القسمة على7.

بكالوريا 2017الدورة الاستثنائية

الموضوع الأول: **(06نقط)**

1.أ- عين باقي القسمة الاقليدية لكل من الأعداد $4^3, 4^2, 4$ على 9.

ب-بين أن :من أجل كل عدد طبيعي n ، $4^{3n}=1[9]$.

ج-استنتج أن :من أجل كل عدد طبيعي n، $4^{3n+1}=4[9]$.

2.تحقق أن: $2020^{1438}=4[9]$.

3.بين أن العدد $\left(2020^{1438}-2017^2+1995\right)$ يقبل القسمة على 9.

الموضوع الثاني: **(06نقط)**

a و b عددان صحيحان حيث: : $a\equiv 14[13]$ و $b\equiv -1[13]$

1.أ- بين أن باقي القسمة الاقليدية للعددين a و b على 13 هوا 1 و 12 على الترتيب.

ب-استنتج باقي القسمة الاقليدية لكل من $a-b, a+b$ و $2a+b^2$ على 13.

2.بين أن العدد $a^{1438}+b^{2017}$ يقبل القسمة على13.

3.عين الأعداد الطبيعية n بحيث: $b^{2017}+n+1438\equiv 0[13]$.

بكالوريا 2018

الموضوع الأول: **(06نقط)**

1.أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على5.

2. عين قيم العدد الطبيعي a حتى يكون : $2018=4a+2$

3.بين أن العدد: $2^{2018}+2017^8-5$ يقبل القسمة على 5.

4.أ-تحقق بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $12^n\equiv 2^n[5]$ و $(-3)^n\equiv 2^n[5]$.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $12^n+(-3)^n-4\equiv 0[5]$.

الموضوع الثاني: **(06نقط)**

a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث: $a=4b+6$

1.عين باقي القسمة الاقليدية للعدد a على 4.

2.بين أن a و b متوافقان بترديد 3.

3.نضع: $b=489$

أ-تحقق أن : $a\equiv -1[13]$.

ب-استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد $a^{2018}+40^{2968}$ على 13.

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $a^{2n}+n+3$ قابلا للقسمة على 13.

بكالوريا 2019

الموضوع الأول: **(06نقط)**

a و b عددان طبيعيان حيث : $a=2019$ و $b=2969$

1 أ) عين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 7.

ب) إستنتج أن العددين a و $3b$ متوافقان بترديد 7 .

2 بيّن أن : $9a+b\equiv 0[7]$.

3 تحقق أنّ: $2a\equiv -1[7]$ ثم إستنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^{2969}\times 2^{2969}$ على 7 .

4 عيّن قيم العدد الطبيعي n حيث : $b^n+an+2\equiv 0[7]$

بكالوريا 2019

الموضوع الثاني: **(06نقط)**

a و b العددان الطبيعيان حيث $a=2019$ ، $b=1441$.

1 تحقق أن : $a\equiv 13[17]$.

2 بيّن أنّ : a و b متوافقان بترديد 17 ، ثم إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 17.

3 بيّن أنّ : $a\times b\equiv -1[17]$ ، ثم إستنتج أنّ $3a^2\times b^2+14\equiv 0[17]$.

4 أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 17 ،

5 بيّن أنّ: $2019^{1954}+169^{2n}+1441^{2969}-13\equiv 0[17]$.

6 عيّن قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $n+1954^{1962}+16\equiv 0[17]$

بكالوريا 2020

الموضوع الأول: **(06نقط)**

لتكن الأعداد الطبيعية a ، b و c حيث : $a=2020$ ، $b=2970$ و $c=1441$.

1) عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد a ، b و c على 9.

2) تحقق أنّ العددين b و $(a+5)$ متوافقان بترديد 9.

3) تحقق أنّ: $2a\equiv -1[9]$ ثمّ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $(2a)^{31}$ على 9.

4) بيّن أنّ العدد $\left(3a-2b-12c^2\right)$ يقبل القسمة على 9.

بكالوريا 2020

الموضوع الثاني: **(06نقط)**

a و b عددان صحيحان حيث: $a \equiv 2[7]$ ، $b = 2020$.

1) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 .

2) بيّن أنّ : $a^2+b^2 \equiv -1[7]$ ثم استنتج أنّ العدد $8-\left(a^2+b^2\right)^{1962}$ يقبل القسمة على 7

3) أ . عيّن بواقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 4 ، 4^2 و 4^3 على 7 .

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $4^{3n} \equiv 1[7]$ ثمّ استنتج أنّ: $4^{3n+1} \equiv 4[7]$.

جـ. بيّن أنّ: $b^{21} \equiv 1[7]$

4) عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $4^n + a + b^{21} \equiv 0[7]$.

بالتوفيق في بكالوريا 2021

أ. شعبان أسامة

هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ

و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي للصفحة

5min Maths