طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

سلسلة الخليل

في

المتتاليات العددية

- ملخص شامل
- تمارين محلولة

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 21

1

ملخص شامل حول:

المتتاليات العددية

1 دراسة اتجاه تغير متتالية U_n

ندرس إشارة الفرق $(U_{n+1} - U_n)$:

- في حالة: $U_{n+1} - U_n > 0$ فإن: (U_n) متزايدة تماما.
- في حالة: $U_{n+1} - U_n < 0$ فإن: (U_n) متناقصة تماما.
- في حالة: $U_{n+1} - U_n = 0$ فإن: (U_n) ثابتة

في حالة كانت حدود المتتالية موجبة يمكن أن ندرس إشارة النسبة $\left({}^{u_{n+1}}/{u_n}\right)$

- في حالة: $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ فإن: (U_n) متزايدة تماما.
- في حالة: $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ فإن: (U_n) متناقصة تماما.
- في حالة: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ فإن: (U_n) ثابتة

متتالية ثابتة

(U_n) ثابتة معناه:

$\boxed{U_{n+1} = U_n = \alpha}$

حيث: $\alpha \in \mathbb{R}$

(كل الحدود متساوية وتساوي الحد الأول)

2 تقارب وتباعد متتالية

- إذا كانت $\lim U_n = l$ حيث: $(l \in \mathbb{R})$ فإن: (U_n) متقاربة.
- في الحالات الأخرى (U_n) متباعدة.

نتائج (حول تقارب متتالية):

- إذا كانت (U_n) متزايدة تماما وَ محدودة من الأعلى $(U_n \leq A)$ فهي متقاربة.
- إذا كانت (U_n) متناقصة تماما وَ محدودة من الأسفل $(U_n \geq A)$ فهي متقاربة

3 المتتالية الحسابية

1) طريقة اثبات أن المتتالية (U_n) حسابية:

يكفي أن نثبت أن:

- الفرق $(U_{n+1} - U_n)$ عدد ثابت، أي $\boxed{U_{n+1} - U_n = r}$
- أو نكتب U_{n+1} بدلالة U_n، فنجد: $\boxed{U_{n+1} = U_n + r}$

حيث: r عدد حقيقي: يسمى أساس المتتالية الحسابية (U_n)

2) عبارة الحد العام لمتتالية حسابية:

U_n بدلالة n يسمى الحد العام

- بصفة عامة: $\boxed{U_n = u_p + (n-p)r}$ علاقة تربط بين حدين مختلفين.
- $\boxed{U_n = u_0 + nr}$، في حالة u_0 هو الحد الأول.
- $\boxed{U_n = u_1 + (n-1)r}$، في حالة u_1 هو الحد الأول.

ملاحظة (حول عبارة الحد العام لمتتالية حسابية):

- هذه العلاقات يُمكن استعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعويض U_n بأي حد مُعطى في التمرين.
- نستعمل العلاقة $\boxed{U_n = U_p + (n-p)r}$ إذا كانت (U_n) حسابية ومعرفة بحدين مختلفين

وباستعمال العلاقة نقوم بحساب الأساس فنجد: $\boxed{r = \frac{U_n - U_p}{n-p}}$

3) مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:

بصفة عامة يُحسب المجموع باستعمال العلاقة:

$$\boxed{\text{المجموع} = \left(\text{عدد الحدود}\right)\left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2}\right)}$$

حيث: (عدد الحدود = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول + 1)

4) خاصية الوسط الحسابي:

تكون الأعداد الحقيقية c, b, a بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $\boxed{a + c = 2b}$

4 المتتالية الهندسية

1) طريقة اثبات أن المتتالية (U_n) هندسية:

يكفي أن نثبت أن:

- الحاصل $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ عدد ثابت، أي $\boxed{\frac{U_{n+1}}{U_n} = r}$
- أو نكتب U_{n+1} بدلالة U_n، فنجد: $\boxed{U_{n+1} = qU_n}$

الخليل للرياضيات

حيث: q عدد حقيقي: يسمى أساس المتتالية الهندسية (U_n)

2) عبارة الحد العام لمتتالية هندسية:

U_n بدلالة n يسمى الحد العام

- بصفة عامة: $\boxed{U_n = u_p \times q^{n-p}}$ علاقة تربط بين حدين مختلفين.
- $\boxed{U_n = u_0 \times q^n}$، في حالة u_0 هو الحد الأول.
- $\boxed{U_n = u_1 \times q^{n-1}}$، في حالة u_1 هو الحد الأول.

ملاحظة (حول عبارة الحد العام لمتتالية هندسية):

- هذه العلاقات يُمكن استعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعويض U_n بأي حد مُعطى في التمرين.
- نستعمل العلاقة $\boxed{U_n = u_p \times q^{n-p}}$ إذا كانت (U_n) هندسية ومعرفة بحدين مختلفين وباستعمال العلاقة نقوم بحساب الأساس فنجد: $\boxed{q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}}$

3) مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:

بصفة عامة يُحسب المجموع باستعمال العلاقة:

$$\boxed{\text{المجموع} = \left(\text{الحد الأول}\right)\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right)}$$

حيث: (عدد الحدود = دليل الحد الأخير – دليل الحد الأول + 1)

4) خاصية الوسط الهندسي:

تكون الأعداد الحقيقية c, b, a بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان: $\boxed{a \times c = b^2}$

5) قوانين النهايات المتعلقة بالمتتاليات الهندسية:

- إذا كان: $q > 1$ ، فإن: $\lim(q^n) = +\infty$
- إذا كان: $-1 < q < 1$ فإنّ: $\lim(q^n) = 0$
- إذا كان: $q \leq -1$ فإنّ: $\lim(q^n)$ غير موجودة

2

تمارين محلولة في:

المتتاليات العددية

التمرين 01

(u_n) متتالية حسابية، عين عبارة (u_n) بدلالة n في كل حالة من الحالات التالية:

1. $r = 3$ ، $u_0 = -2$
2. $r = -\frac{1}{2}$ ، $u_1 = -2$
3. $u_5 = 4$ ، $u_3 = -2$
4. $r = \frac{1}{4}$ ، $u_2 = \frac{2}{3}$
5. $u_5 = -\frac{9}{4}$ ، $u_0 = -1$

حل التمرين 01

تُعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية بـ: $\boxed{u_n = u_p + r(n-p)}$

ومنه:

1.

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + r(n-0) \\ &= -2 + 3n \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + r(n-1) \\ &= -2 - \frac{1}{2}(n-1) \\ &= -2 - \frac{1}{2}n + 1 \\ &= -1 - \frac{1}{2}n \end{aligned}$$

3. لدينا:

$$\begin{aligned} u_5 = u_3 + r(5-3) &\Rightarrow 4 = -2 + r(2) \\ &\Rightarrow r = 3 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} u_n &= u_3 + 3(n-3) \\ &= -2 + 3n - 9 \\ &= -11 + 3n \end{aligned}$$

4.

$$u_n = u_2 + \frac{1}{4}(n-2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{4}n - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{4}n
\end{aligned}
$$

5 لدينا:

$$
\begin{aligned}
u_5 = u_0 + r(5-0) &\Rightarrow -\frac{9}{4} = -1 + 5r \\
&\Rightarrow 5r = -\frac{9}{4} + 1 \\
&\Rightarrow 5r = -\frac{5}{4} \\
&\Rightarrow r = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

ومنه:

$$
\begin{aligned}
u_n &= u_0 - \frac{1}{4}n \\
&= -1 - \frac{1}{4}n
\end{aligned}
$$

التمرين 02

(v_n) متتالية هندسية، عين عبارة (v_n) بدلالة n في كل حالة من الحالات التالية:

1. $q = -2$ ، $u_0 = -1$
2. $q = \frac{1}{4}$ ، $u_2 = \frac{2}{3}$
3. $u_4 = 18$ ، $u_2 = 2$
4. $q = -\frac{3}{2}$ ، $u_1 = -2$
5. $u_{p+2} = -16$ ، $u_{p-1} = 2$

حل التمرين 02

تُعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية بـ: $\boxed{u_n = u_p \times q^{(n-p)}}$

ومنه:

1

$$
\begin{aligned}
u_n &= u_0 \times q^{n-0} \\
&= -1 \times (-2)^n
\end{aligned}
$$

2

$$\begin{aligned}
u_n &= u_2 \times q^{n-2} \\
&= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \\
&= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \\
&= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2}} \\
&= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \times 16 \\
&= \frac{32}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n}
\end{aligned}$$

❸ لدينا:

$$\begin{aligned}
u_4 = u_2 \times q^{4-2} &\Rightarrow 18 = 2 \times q^2 \\
&\Rightarrow q^2 = 9 \\
&\Rightarrow q = 3
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
u_n &= u_2 \times q^{n-2} \\
&= 2 \times 3^n \times 3^{-2} \\
&= 2 \times 3^n \times \frac{1}{3^2} \\
&= \frac{2}{9} \times 3^n
\end{aligned}$$

❹

$$\begin{aligned}
u_n &= u_1 \times q^{n-1} \\
&= -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\
&= -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{n} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} \\
&= -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{n} \times \frac{1}{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{n}
\end{aligned}$$

❺

لدينا:

$$\begin{aligned}
u_{p+2} = u_{p-1} \times q^{p+2-(p-1)} &\Rightarrow -16 = 2 \times q^3 \\
&\Rightarrow q^3 = -8
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow q = -2$$

ومنه:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{p-1} \times q^{n-(p-1)} \\ &= 2 \times (-2)^{(n-p)} \times (-2)^1 \\ &= -4 \times (-2)^{(n-p)} \end{aligned}$$

التمرين 03

احسب نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة مما يلي:

1. $u_n = -2 + 3n$
2. $u_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$
3. $u_n = \frac{1}{1+n}$
4. $u_n = \frac{1+2n}{1-n}$
5. $u_n = -\frac{3}{4}\left(\frac{7}{5}\right)^n$
6. $u_n = \left(\frac{3n^2+3}{n^2+4}\right)^n$

حل التمرين 03

حساب نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة مما يلي:

1. $u_n = -2 + 3n$

$$\begin{aligned} lim[u_n] &= lim[-2 + 3n] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

2. $u_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\begin{aligned} lim[u_n] &= lim\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

لأن: $\left(-1 < \frac{2}{3} < 1\right)$

3. $u_n = \frac{1}{1+n}$

$$\begin{aligned} lim[u_n] &= lim\left[\frac{1}{1+n}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. $u_n = \frac{1+2n}{1-n}$

الخليل للرياضيات

$$\begin{aligned} lim[u_n] &= lim\left[\frac{1+2n}{1-n}\right] \\ &= lim\left[\frac{2n}{-n}\right] \\ &= lim[-2] \\ &= -2 \end{aligned}$$

❺ $u_n = -\frac{3}{4}\left(\frac{7}{5}\right)^n$

$$\begin{aligned} lim[u_n] &= lim\left[-\frac{3}{4}\left(\frac{7}{5}\right)^n\right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

لأن: $\left(\frac{7}{5} > 1\right)$.

❻ $u_n = \left(\frac{3n^2+3}{n^2+4}\right)^n$

$$\begin{aligned} lim[u_n] &= lim\left[\left(\frac{3n^2+3}{n^2+4}\right)^n\right] \\ &= lim\left[e^{n\,ln\left(\frac{3n^2+3}{n^2+4}\right)}\right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

التمرين 04

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=36 \\ u_1\times u_2\times u_3=1428 \end{cases}$$

- عين: u_1 ، u_2 و u_3

حل التمرين 04

- تعيين: u_1 ، u_2 و u_3:

لدينا:

$$u_1+u_3=2u_2$$

ومنه:

$$\begin{aligned} u_1+u_2+u_3=36 &\Rightarrow 2u_2+u_2=36 \\ &\Rightarrow 3u_2=36 \\ &\Rightarrow \boxed{u_2=12} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=36 \\ u_1\times u_2\times u_3=1428 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1+12+u_3=36 \\ u_1\times 12\times u_3=1428 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u_1+u_3=24 \ldots (*) \\ u_1\times u_3=119 \ldots (**) \end{cases}$$

لدينا من $(*)$:

$$u_1=24-u_3$$

نعوض في $(**)$ نجد:

$$u_1\times u_3=119 \Rightarrow (24-u_3)\times u_3=119$$
$$\Rightarrow 24u_3-(u_3)^2-119=0$$
$$\Rightarrow -(u_3-7)(u_3-17)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u_3-7=0 \\ \text{أو} \\ u_3-17=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{u_3=7} \\ \text{أو} \\ \boxed{u_3=17} \end{cases}$$

نعوض قيمة u_3 في $(*)$ نجد:

$$u_1+u_3=24 \Rightarrow \begin{cases} u_1+7=24 \\ \text{أو} \\ u_1+17=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{u_1=17} \\ \text{أو} \\ \boxed{u_1=7} \end{cases}$$

إذن:

$$(u_1;u_2;u_3)\in\{(17;12;7);(7;12;17)\}$$

التمرين 05

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n=4n-1$

1. بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r .
2. هل العدد 2021 حد من حدود المتتالية (u_n) ؟ برر اجابتك.
3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
4. عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

حل التمرين 05

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n=4n-1$

1. تبيين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r :

لدينا:

$$u_{n+1}=4(n+1)-1$$

$$= 4n + 4 - 1$$
$$= 4 + u_n$$

ولدينا:

$$u_0 = 4(0) - 1 = -1$$

ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها 4 وحدها الأول $u_0 = -1$

❷ هل العدد 2021 حد من حدود المتتالية (u_n) ؟

$$u_n = 2021 \Rightarrow 4n - 1 = 2021$$
$$\Rightarrow 4n = 2022$$
$$\Rightarrow n = \frac{1011}{2}$$

لدينا: $\frac{1011}{2} \notin \mathbb{N}$ ومنه العدد 2021 ليس حد من حدود المتتالية (u_n) .

❸ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) - 1 - (4n - 1)$$
$$= 4n + 4 - 1 - 4n + 1$$
$$= 4 > 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

❹ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n:

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$
$$= \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$
$$= \frac{n+1}{2}(-1 + 4n - 1)$$
$$= \frac{n+1}{2}(4n - 2)$$
$$= (n+1)(4n - 1)$$

التمرين 06

(v_n) المتتالية الهندسية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 63 \\ v_1 \times v_2 \times v_3 = 1728 \end{cases}$$

- عين v_1 ، v_2 و v_3

حل التمرين 06

- تعيين v_1 ، v_2 و v_3 :

لدينا:

$$v_1 \times v_3 = (v_2)^2$$

ومنه:

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 \times v_3 = 1728 &\Rightarrow (v_2)^2 \times v_2 = 1728 \\ &\Rightarrow (v_2)^3 = 1728 \\ &\Rightarrow \boxed{v_2 = 12} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 63 \\ v_1 \times v_2 \times v_3 = 1728 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + 12 + v_3 = 63 \\ v_1 \times 12 \times v_3 = 1728 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_3 = 51 \ldots (*) \\ v_1 \times v_3 = 144 \ldots (**) \end{cases}$$

من $(*)$ لدينا:

$$v_1 = 51 - v_3$$

نعوض في $(**)$ نجد:

$$\begin{aligned} v_1 \times v_3 = 144 &\Rightarrow (51 - v_3)v_3 = 144 \\ &\Rightarrow -(v_3)^2 + 51v_3 - 144 = 0 \\ &\Rightarrow -(v_3 - 3)(v_3 - 48) = 0 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} v_3 - 3 = 0 \\ \text{أو} \\ v_3 - 48 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{v_3 = 3} \\ \text{أو} \\ \boxed{v_3 = 48} \end{cases}$$

نعوض قيمة v_3 في $(*)$ نجد:

$$v_1 + v_3 = 51 \Rightarrow \begin{cases} v_1 + 3 = 51 \\ \text{أو} \\ v_1 + 48 = 51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{v_1 = 48} \\ \text{أو} \\ \boxed{v_1 = 3} \end{cases}$$

ومنه:

$$(v_1; v_2; v_3) \in \{(48; 12; 3); (3; 12; 48)\}$$

التمرين 07

من أجل $\alpha \in \mathbb{R}$ ، نعتبر (u_n) المتتالية الهندسية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \alpha u_{n-1} + 2 \end{cases}$$

1

① عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

② ما هو نوع المتتالية (u_n) في حالة $\alpha = 1$ ؟

❷ نفرض فيما يلي: $\alpha \neq 1$ و $\alpha \neq -1$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = u_n - \frac{2}{1-\alpha}$$

① برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q .

② عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متقاربة.

حل التمرين 07

❶

① تعيين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة:

(u_n) ثابتة معناه:

$$u_n = u_0 = u_{n-1}$$

ومنه:

$$\alpha u_{n-1} + 2 = u_0 \Rightarrow \alpha(1) + 2 = 1$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

② ايجاد نوع المتتالية (u_n) في حالة $\alpha = 1$ ؟

لما $\alpha = 1$ لدينا:

$$u_n = u_{n-1} + 2$$

لدينا:

$$u_{n+1} = u_n + 2$$

ومنه $(u_n)_{\alpha=1}$ متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول $u_0 = 1$

❷

① برهان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q :

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{1-\alpha} \\ &= \alpha u_n + 2 - \frac{2}{1-\alpha} \\ &= \alpha u_n + \frac{2-2\alpha-2}{1-\alpha} \\ &= \alpha u_n - \frac{2\alpha}{1-\alpha} \\ &= \alpha\left(u_n - \frac{2}{1-\alpha}\right) \end{aligned}$$

$$= \alpha v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - \frac{2}{1-\alpha}$$
$$= 1 - \frac{2}{1-\alpha}$$
$$= -\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها α وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0 = -\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

إذن:

$$v_n = -\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)(\alpha)^n$$

② تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متقاربة:

(v_n) متقاربة معناه:

$$\lim_{n\to+\infty}[v_n] = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)(\alpha)^n\right] = l$$

وهذا لا تحقق إلا إذا كان: $-1 < \alpha < 1$

ومنه (v_n) متقاربة لما $\alpha \in]-1;1[$.

التمرين 08

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ 4u_{n+1} = u_n + 9 \end{cases}$$

1 عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2 نفرض في كل ما يلي: $\alpha \neq 3$

① احسب الحدود: u_1 ، u_2 و u_3 .

3 لكل $n \in \mathbb{N}$ نعرف المتتالية (v_n) كما يلي: $v_n = u_n - 3$.

① اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

② اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

④ عبر بدلالة n عن المجموعين S_n و S'_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

حل التمرين 08

❶ تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة:

(u_n) ثابتة معناه: $u_{n+1} = u_n = u_0$

ومنه:

$$4u_{n+1} = u_n + 9 \Rightarrow 4\alpha = \alpha + 9$$
$$\Rightarrow 3\alpha = 9$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 3}$$

❷

① حساب الحدود: u_1 ، u_2 و u_3 :

$$\bullet\ 4u_{0+1} = u_0 + 9 \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{\alpha + 9}{4}}$$

$$\bullet\ 4u_{1+1} = u_1 + 9 \Rightarrow u_2 = \frac{\frac{\alpha + 9}{4} + 9}{4}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{\alpha + 45}{16}}$$

$$\bullet\ 4u_{2+1} = u_2 + 9 \Rightarrow u_3 = \frac{\frac{\alpha + 45}{16} + 9}{4}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{\alpha + 189}{64}}$$

❸

① اثبات ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3$$
$$= \frac{u_n + 9}{4} - 3$$
$$= \frac{u_n - 3}{4}$$
$$= \frac{1}{4} v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - 3 = \alpha - 3$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول v_0 حيث: $v_0 = \alpha - 3$.

② كتابة v_n بدلالة n :

الخليل للرياضيات

$$\boxed{v_n = (\alpha - 3)\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$v_n = u_n - 3 \Rightarrow u_n = v_n + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{u_n = (\alpha - 3)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3}$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty}[u_n] = \lim_{n\to+\infty}\left[(\alpha - 3)\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}_{0} + 3\right] = \boxed{3}$$

④ التعبير بدلالة n عن المجموعين S_n و S'_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= (\alpha - 3)\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}\right) \\ &= (\alpha - 3)\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right) \\ &= \frac{4}{3}(\alpha - 3)\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{(\alpha - 3)}{3}\left(4 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}$$

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ &= v_1 + 3 + v_1 + 3 + \cdots + v_n + 3 \\ &= \underbrace{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}_{S_n} + 3(n+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{S'_n = \frac{(\alpha - 3)}{3}\left(4 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) + 3(n+1)}$$

التمرين 09

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6 \end{cases}$$

وَ (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\quad v_n = u_n - 4$

❶ احسب الحدود: u_1 ، u_2 و u_3 .

❷ بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن:

$$u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$$

❸ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

❹

① اكتب عبارة v_n بدلالة n .

② اكتب عبارة u_n بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n)

❺ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $\quad S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

❻ استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث: $\quad S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

حل التمرين 09

❶ حساب الحدود: u_1 ، u_2 و u_3 :

$$\bullet\ u_{0+1} = -\frac{1}{2}u_0 + 6 \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{2}(6) + 6$$
$$\Rightarrow \boxed{u_1 = 3}$$
$$\bullet\ u_{1+1} = -\frac{1}{2}u_1 + 6 \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{2}(3) + 6$$
$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{9}{2}}$$
$$\bullet\ u_{2+1} = -\frac{1}{2}u_2 + 6 \Rightarrow u_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right) + 6$$
$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{15}{4}}$$

❷ تبيين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$:

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6 \Rightarrow u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 6 - 4$$
$$\Rightarrow u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 2$$
$$\Rightarrow \boxed{u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)}$$

❸ تبيين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 6 - 4 \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 2 \\ &= -\frac{1}{2}(u_n - 4) \\ &= -\frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - 4 = 2$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 2$

① كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$\boxed{v_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

② كتابة عبارة u_n بدلالة n :

$$v_n = u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4$$
$$\Rightarrow \boxed{u_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4}$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n):

$$\lim_{n\to+\infty}[u_n] = \lim_{n\to+\infty}\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4\right] = 4$$

❹ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n:

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= 2\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) \\ &= \left(\frac{2-2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{2}{3}[2 + (-2)^{-n}]}$$

❺ استنتاج بدلالة n المجموع S'_n :

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

الخليل للرياضيات

$$= v_0 + 4 + v_1 + 4 + \cdots + v_n + 4$$
$$= \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{S_n} + 4(n+1)$$
$$\boxed{S'_n = \frac{2}{3}[2 + (-2)^{-n}] + 4(n+1)}$$

التمرين 10

المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي (u_n):

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1

① في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ ، أنشئ (C_f) التمثيل البياني للدالة f حيث:
$f: x \longrightarrow \sqrt{x+2}$ والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = x$.

② أنشئ على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبررا خطوط الانشاء.

③ ما هو تخمينك حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) ؟

2

① بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 2$.

② بين أن (u_n) متناقصة. ماذا تستنتج؟

3

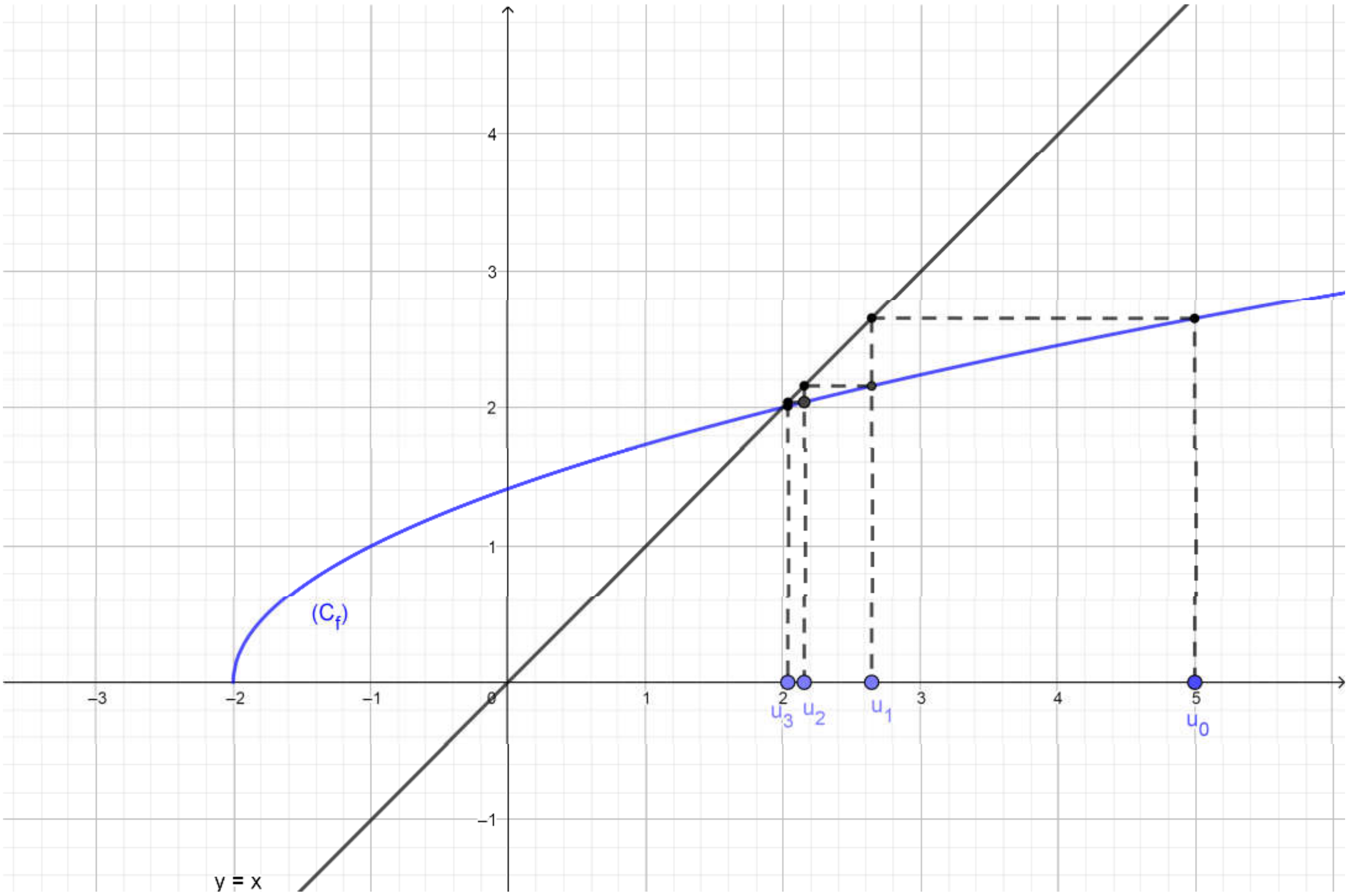
① بين أن النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق: $l = \sqrt{l+2}$.

② استنتج قيمة l .

حل التمرين 10

1

① التمثيل البياني:



② تمثيل الحدود الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (في التمثيل البياني السابق).

③ التخمين حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) :

من التمثيل البياني لدينا $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ ، ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة، وتتقارب نحو نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) أي في النقطة ذات الفاصلة 2

❷

① تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 2$:

- لدينا من أجل $n = 0$:

$$u_0 = 5 \geq 2 \ldots (*)$$

- نفرض أن $u_n \geq 2$ صحيحة ، ونثبت أن $u_{n+1} \geq 2$:

لدينا:

$$\begin{aligned} u_n \geq 2 &\Rightarrow u_n + 2 \geq 4 \\ &\Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \geq 2 \\ &\Rightarrow u_{n+1} \geq 2 \ldots (**) \end{aligned}$$

حسب البرهان بالتراجع من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{u_n \geq 2}$$

② تبيين أن (u_n) متناقصة:

لدينا:

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \sqrt{u_n+2}-u_n \\
&= \frac{\left(\sqrt{u_n+2}-u_n\right)\left(\sqrt{u_n+2}+u_n\right)}{\sqrt{u_n+2}+u_n} \\
&= \frac{u_n+2+u_n\sqrt{u_n+2}-u_n\sqrt{u_n+2}-(u_n)^2}{\sqrt{u_n+2}+u_n} \\
&= \frac{-(u_n)^2+u_n+2}{\sqrt{u_n+2}+u_n} \\
&= \frac{-(u_n-2)(u_n+1)}{\sqrt{u_n+2}+u_n}
\end{aligned}$$

لدينا: $\sqrt{u_n+2}+u_n>0$ ومنه إشارة $(u_{n+1}-u_n)$ من إشارة البسط:

u_n	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$u_{n+1}-u_n$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه (u_n) متناقصة تماما.

- **الاستنتاج:**

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ 2 فهي متقاربة.

❸

① تبيين أن النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق: $l=\sqrt{l+2}$:

لدينا (u_n) متقاربة ومنه:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}[u_n]=l \\ \lim\limits_{n\to+\infty}[u_{n+1}]=l \end{cases}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
u_{n+1}=\sqrt{u_n+2} &\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to+\infty}[u_{n+1}]}_{=l}=\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{u_n+2}\right] \\
&\Rightarrow l=\sqrt{\underbrace{\lim_{n\to+\infty}[u_n]}_{=l}+2} \\
&\Rightarrow \boxed{l=\sqrt{l+2}}
\end{aligned}$$

② استنتاج قيمة l :

لدينا:

$$\begin{aligned}
l=\sqrt{l+2} &\Rightarrow l^2=l+2 \\
&\Rightarrow l^2-l-2=0 \\
&\Rightarrow (l-2)(l+1)=0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l-2=0 \\ \text{أو} \\ l+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=2 \\ \text{أو} \\ l=-1\ (\text{مرفوض}) \end{cases}$$

ومنه:

$$\boxed{l=2}$$

التمرين 11

المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: (u_n)

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+2}{u_n+3} \end{cases}$$

وَ (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .
2.
   ① اكتب عبارة v_n بدلالة n .
   ② اكتب عبارة u_n بدلالة n .
   ③ احسب نهاية المتتالية (u_n)
3.
   ① عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$
   ② تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{3}(1-v_n)$$

   ③ استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث:

$$S'_n=\frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+\cdots+\frac{1}{u_n+2}$$

حل التمرين 11

1. تبيين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 :

لدينا:

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} \\
&= \frac{\left(\frac{2u_n+2}{u_n+3}-1\right)}{\left(\frac{2u_n+2}{u_n+3}+2\right)} \\
&= \frac{2u_n+2-u_n-3}{2u_n+2+2u_n+6} \\
&= \frac{u_n-1}{4u_n+8} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{u_n-1}{u_n+2}\right) \\
&= \frac{1}{4}v_n
\end{aligned}
$$

ولدينا:

$$
v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{-1}{2}
$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $-\frac{1}{2}$

2

① كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$
v_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n
$$

② كتابة عبارة u_n بدلالة n :

لدينا:

$$
\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} &\Rightarrow v_n(u_n+2)-(u_n-1)=0 \\
&\Rightarrow v_nu_n+2v_n-u_n+1=0 \\
&\Rightarrow u_n(v_n-1) = -(2v_n+1) \\
&\Rightarrow u_n = -\frac{2v_n+1}{v_n-1} \\
&\Rightarrow u_n = \frac{-\left(\frac{1}{4}\right)^n+1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n} \\
&\Rightarrow u_n = \frac{-(2^{-2})^n+1}{1+(2^{-1})(2^{-2})^n} \\
&\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1-2^{-2n}}{1+2^{-2n-1}}}
\end{aligned}
$$

الخليل للرياضيات

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty}[u_n]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{-\overbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}^{0}+1}{1+\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}_{0}}\right]$$

$$=\frac{1}{1}=\boxed{1}$$

❸

① التعبير بدلالة n عن المجموع S_n:

$$\begin{aligned}S_n&=v_0+v_1+\cdots+v_n\\&=-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)\\&=-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right)\\&=-\frac{2}{3}\left(1-(2^{-2})^{n+1}\right)\\&=\boxed{\frac{2}{3}\left(2^{-2(n-1)}-1\right)}\end{aligned}$$

② التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{1}{3}(1-v_n)=\frac{1}{u_n+2}$:

لدينا:

$$\begin{aligned}v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}&\Rightarrow 1-v_n=1-\frac{u_n-1}{u_n+2}\\&\Rightarrow 1-v_n=\frac{u_n+2-u_n+1}{u_n+2}\\&\Rightarrow 1-v_n=\frac{3}{u_n+2}\\&\Rightarrow\boxed{\frac{1}{3}(1-v_n)=\frac{1}{u_n+2}}\end{aligned}$$

③ استنتاج بدلالة n المجموع S'_n

$$\begin{aligned}S'_n&=\frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+\cdots+\frac{1}{u_n+2}\\&=\frac{1}{3}(1-v_0)+\frac{1}{3}(1-v_1)+\cdots+\frac{1}{3}(1-v_n)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}(1 - v_0 + 1 - v_1 + \cdots + 1 - v_n)$$
$$= \frac{1}{3}\left[1(n+1) - \underbrace{(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)}_{S_n}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[n + 1 - \frac{2}{3}\left(2^{-2(n-1)} - 1\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3n}{3} + \frac{3}{3} - \frac{2^{-2(n-1)+1}}{3} + \frac{2}{3}\right]$$
$$\boxed{S'_n = \frac{1}{9}\left[3n + 5 - 2^{3-2n}\right]}$$

التمرين 12

1 (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

وَ (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

ولنعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

① مثل بيانيا (C_f) و (D) ، ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبررا خطوط الانشاء.

② ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

③ برهن بالتراجع أن: $u_n \leq 6$ مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

④ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل هي متقاربة ؟ برر اجابتك.

2 نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

① اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

② اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

④ عبر بدلالة n عن المجموعين S_n و S'_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

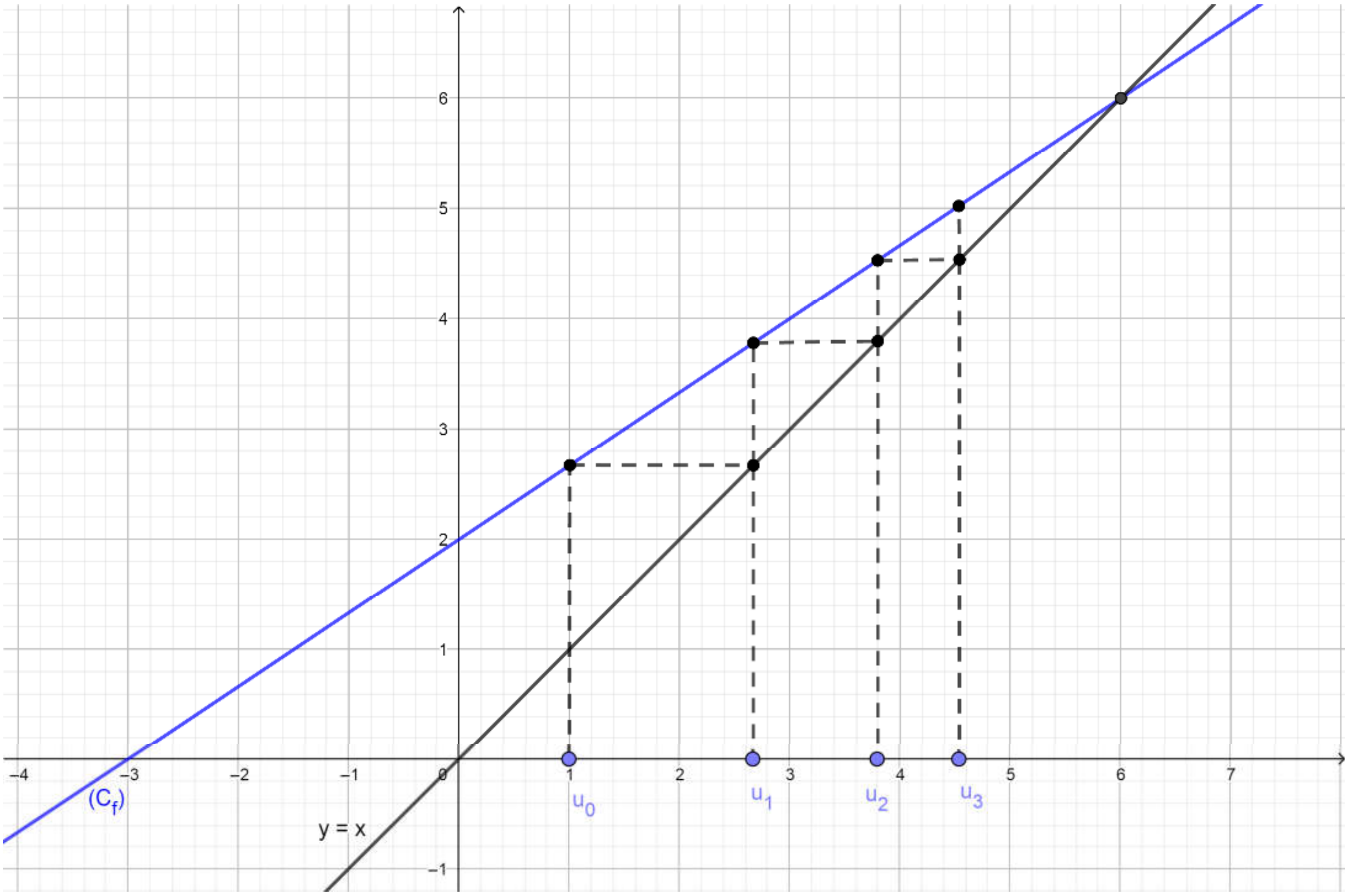
⑤ عبر بدلالة n عن المجموع Q_n حيث: $Q_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$

⑥ عبر بدلالة n عن الجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$

حل التمرين 12

1

① التمثيل البياني للدالة f وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها:



② التخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها:

من التمثيل البياني لدينا $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ، ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة، وتتقارب نحو نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) أي في النقطة ذات الفاصلة 6

③ البرهان بالتراجع أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq 6$:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 1 \leq 6 \dots (*)$$

- نفرض أن $[u_n \leq 6]$ ونثبت أن $[u_{n+1} \leq 6]$:

$$\begin{aligned} u_n \leq 6 &\Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leq 4 \\ &\Rightarrow \frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6 \\ &\Rightarrow u_{n+1} \leq 6 \dots (**) \end{aligned}$$

حسب البرهان بالتراجع من $(*)$ و $(**)$ نجد أن: $\boxed{u_n \le 6}$

④ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n):

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n \\ &= -\frac{1}{3}u_n + 2 \end{aligned}$$

لدينا:

$$-\frac{1}{3}u_n + 2 = 0 \Rightarrow u_n = 6$$

ومنه:

u_n	$-\infty$	6	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	$+$	0	$-$

لدينا من الجدول لما $(u_n \le 6)$ تكون (u_n) متزايدة.

وبما أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 6 فهي متقاربة.

❷

① اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 \\ &= \frac{2}{3}u_n - 4 \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 6) \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - 6 = -5$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول -5 .

② كتابة عبارة v_n بدلالة n و استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$\boxed{v_n = -5\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} v_n = u_n - 6 &\Rightarrow u_n = v_n + 6 \\ &\Rightarrow \boxed{u_n = 6 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n} \end{aligned}$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty}[u_n]=\lim_{n\to+\infty}\left[6-5\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=6$$

④ التعبير بدلالة n عن المجموعين S_n و S'_n :

$$\begin{aligned}S_n&=v_0+v_1+\cdots+v_n\\&=-5\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right)\\&=-5\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n=15\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right)}$$

$$\begin{aligned}S'_n&=u_0+u_1+\cdots+u_n\\&=v_0+6+v_1+6+\cdots+v_n+6\\&=6(n+1)+\underbrace{v_0+v_1+\cdots+v_n}_{S_n}\end{aligned}$$

$$\boxed{S'_n=6(n+1)+15\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right)}$$

⑤ التعبير بدلالة n عن المجموع Q_n:

$$\begin{aligned}Q_n&=v_0^2+v_1^2+\cdots+v_n^2\\&=(-5)^2\left(\frac{1-\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right)\\&=25\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2(n+1)}}{\frac{5}{9}}\right)\\Q_n&=45\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2(n+1)}\right)\end{aligned}$$

⑥ التعبير بدلالة n عن الجداء P_n:

$$\begin{aligned}P_n&=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n\\&=(-5)\left(\frac{2}{3}\right)^0\times(-5)\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\ldots\times(-5)\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

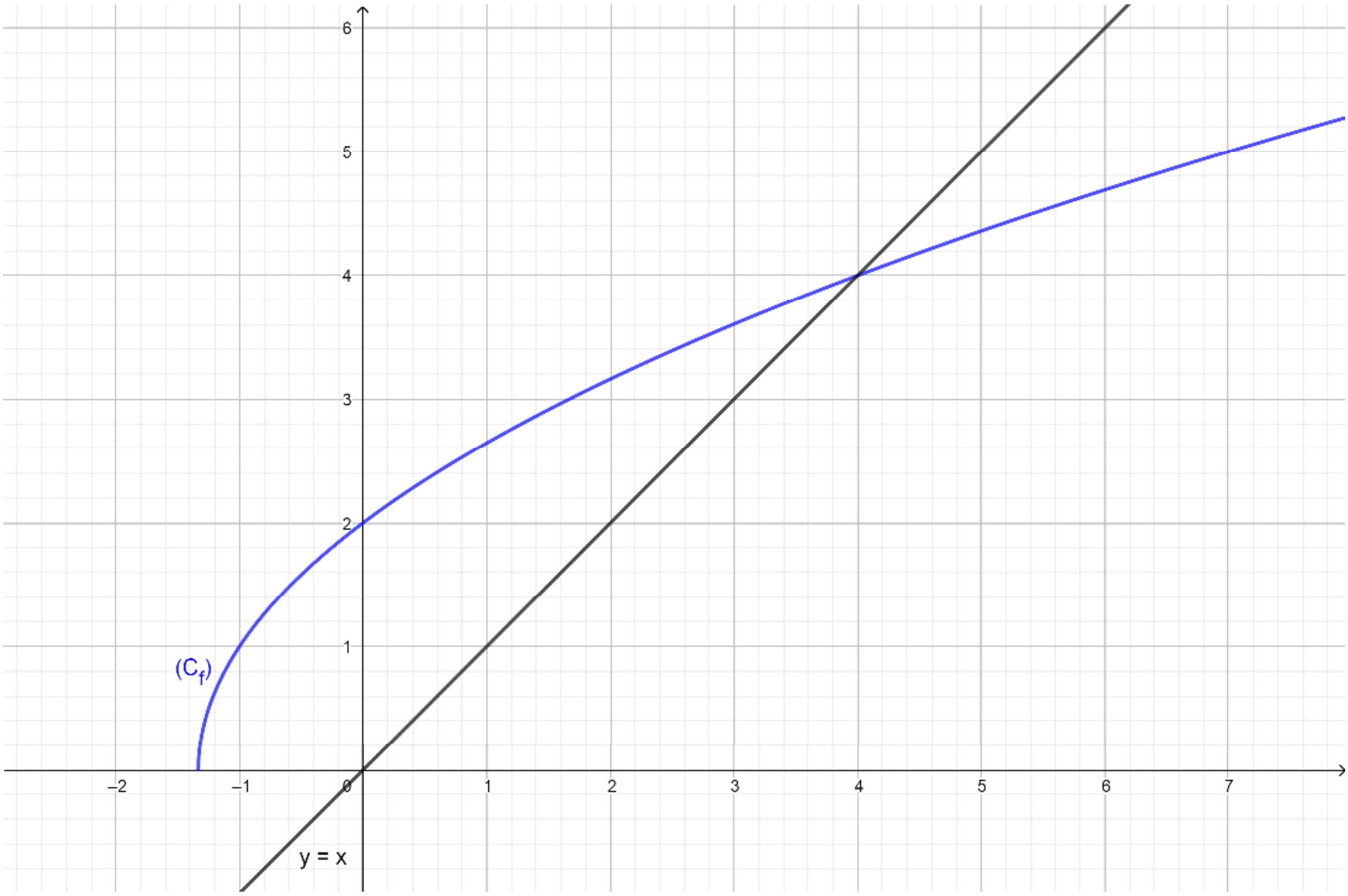
$$= (-5)^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{0} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{1} \times \ldots \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$$

$$= (-5)^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{0+1+\cdots+n}\right)$$

$$\boxed{P_n = (-5)^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)}\right)}$$

التمرين 13

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$ بالعبارة : $f(x)=\sqrt{3x+4}$ ، و(d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ ، كما هو موضح في الشكل التالي:



ولنعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n+4} \end{cases}$$

1

① أعد رسم الشكل، ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبررا خطوط الانشاء.

② ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

③ برهن بالتراجع أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$: فإن: $0 < u_n < 4$.

2

① بين أنه من أجل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(4 - u_n)(u_n + 1)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

② استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3

① بين أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$:

$$4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$$

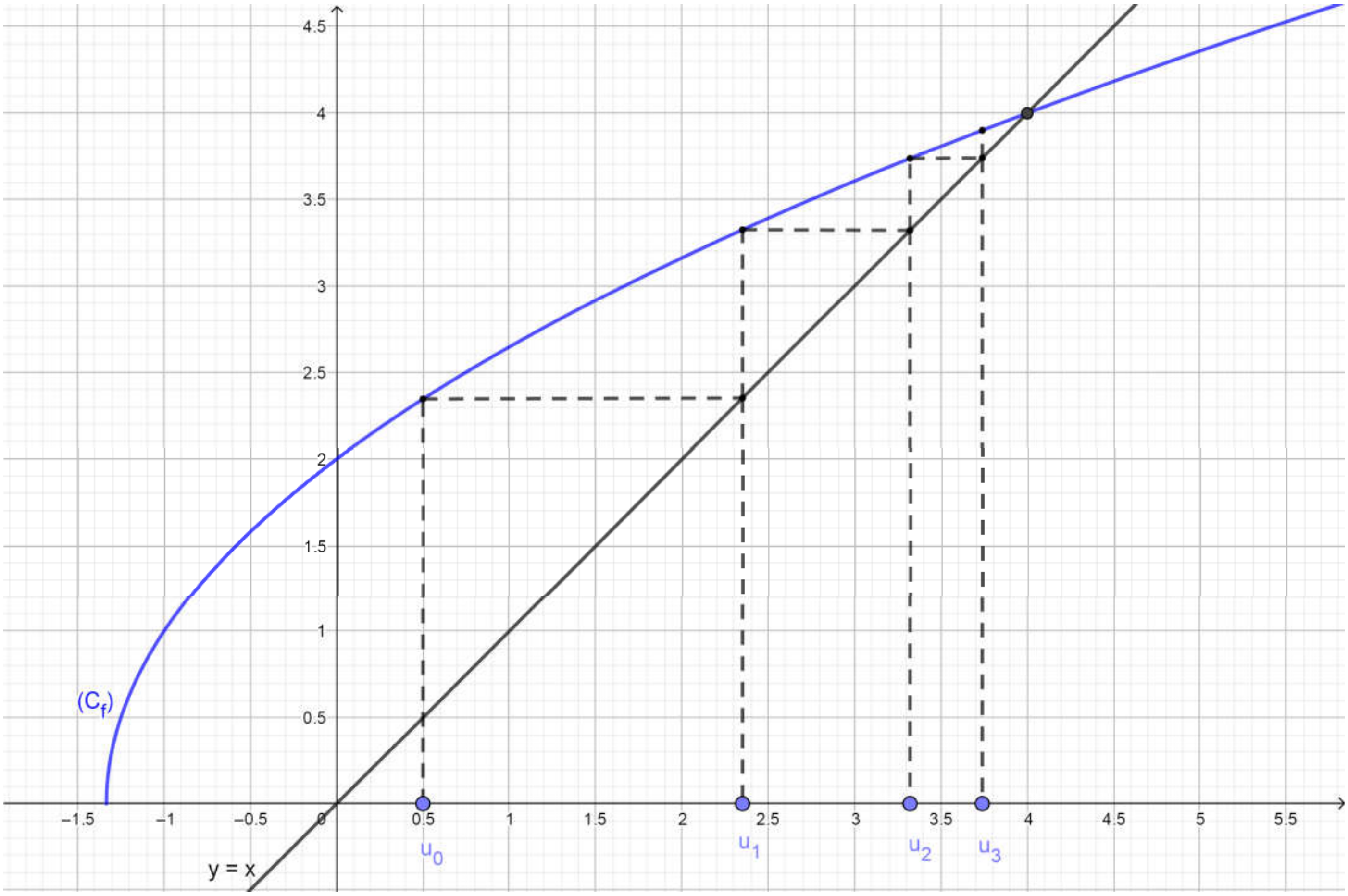
② احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$

③ هل توجد طريقة أخرى لحساب نهاية المتتالية (u_n) ؟

حل التمرين 13

1

① تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها :



② التخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها:

من التمثيل البياني لدينا $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ، ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) **متزايدة**، وتتقارب نحو نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) أي في النقطة ذات الفاصلة 4

③ البرهان بالتراجع أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$: فإن: $0 < u_n < 4$:

- لما $n = 0$ نجد:

$$0 < u_0 < 4 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 4 \ldots (1)$$

- نفرض أن $0 < u_n < 4$ ونبرهن أنّ $0 < u_{n+1} < 4$:

$$\begin{aligned} 0 < u_n < 4 &\Rightarrow 0 < 3u_n < 12 \\ &\Rightarrow 4 < 3u_n + 4 < 16 \\ &\Rightarrow 2 < \sqrt{3u_n + 4} < 4 \\ &\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 4 \ldots (2) \end{aligned}$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$\boxed{0 < u_n < 4}$$

❷

① تبيين أنه من أجل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(4-u_n)(u_n+1)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \sqrt{3u_n+4}-u_n \\ &= \frac{\left(\sqrt{3u_n+4}-u_n\right)\left(\sqrt{3u_n+4}+u_n\right)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n} \\ &= \frac{3u_n+4+u_n\sqrt{3u_n+4}-u_n\sqrt{3u_n+4}-(u_n)^2}{\sqrt{3u_n+4}+u_n} \\ &= \frac{3u_n+4-(u_n)^2}{\sqrt{3u_n+4}+u_n} \\ &= \frac{-(u_n-4)(u_n+1)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n} \\ &= \boxed{\frac{(4-u_n)(u_n+1)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}} \end{aligned}$$

② استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{(4-u_n)(u_n+1)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}$$

ولدينا: $\sqrt{3u_n+4}+u_n > 0$

ومنه إشارة $(u_{n+1}-u_n)$ من إشارة البسط:

$$(4-u_n)(u_n+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} 4-u_n=0 \\ \text{أو} \\ u_n+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n=4 \\ \text{أو} \\ u_n=-1 \end{cases}$$

ومنه:

u_n	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$u_{n+1}-u_n$		$-$	0	$+$	0	$-$	

من الجدول نجد أن (u_n) متزايدة في المجال $0<u_n<4$

❸

① تبيين أنه مهما كان $n\in\mathbb{N}$ فإن: $4-u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (4-u_0)$:

نستعمل البرهان بالتراجع:

- لما $n=0$ لدينا:

$$4-u_0 \le \left(\frac{1}{2}\right)^0 (4-u_0) \Rightarrow 4-u_0 \le 4-u_0 \dots (3)$$

- نفرض أن $\left[4-u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (4-u_0)\right]$ ونبرهن أنّ : $\left[4-u_{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (4-u_0)\right]$:

لدينا:

$$
\begin{aligned}
4-u_{n+1} &= 4-\sqrt{3u_n+4}\\
&= \frac{\left(4-\sqrt{3u_n+4}\right)\left(4+\sqrt{3u_n+4}\right)}{4+\sqrt{3u_n+4}}\\
&= \frac{12-3u_n}{4+\sqrt{3u_n+4}}\\
&= \frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}}(4-u_n)\ \dots(*)
\end{aligned}
$$

ولدينا:

$$
\begin{aligned}
0<u_n<4 &\Rightarrow 0<3u_n<12\\
&\Rightarrow 4<3u_n+4<16\\
&\Rightarrow 2<\sqrt{3u_n+4}<4\\
&\Rightarrow 6<4+\sqrt{3u_n+4}<8\\
&\Rightarrow \frac{1}{8}<\frac{1}{4+\sqrt{3u_n+4}}<\frac{1}{6}\\
&\Rightarrow \frac{3}{8}<\frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}}<\frac{1}{2}\ \dots(**)
\end{aligned}
$$

لدينا من $(*)$ و $(**)$:

$$
\begin{aligned}
4-u_{n+1} &= \frac{3}{\underbrace{4+\sqrt{3u_n+4}}_{(**)}}(4-u_n)\\
\Rightarrow 4-u_{n+1} &< \frac{1}{2}(4-u_n)\ \dots(***)
\end{aligned}
$$

ولدينا حسب فرض التراجع:

$$
\left[4-u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)\right]
$$

ومنه:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{4-u_{n+1}<\frac{1}{2}(4-u_n)}_{(***)} &\Rightarrow 4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)}_{(4-u_n)}\right)\\
&\Rightarrow 4-u_{n+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(4-u_0)\ \dots(4)
\end{aligned}
$$

حسب البرهان بالتراجع من (3) و (4) نجد أن:

$$
\boxed{4-u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)}
$$

② حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$:

لدينا:

$$0<4-u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(4-u_0)$$

لما $n\longrightarrow+\infty$ لدينا:

$$\begin{aligned}&0<4-u_n\leq 0\\&\Rightarrow -4<-u_n\leq -4\\&\Rightarrow 4\leq u_n<4\end{aligned}$$

ومنه:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n)=4}$$

③ ايجاد طريقة أخرى لحساب نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=l\\ \lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1})=l\end{cases}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_{n+1})=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3u_n+4}\right)\\&\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1})}_{=l}=\left(\sqrt{3\underbrace{\lim_{n\to+\infty}(u_n)}_{=l}+4}\right)\\&\Rightarrow l=\sqrt{3l+4}\\&\Rightarrow l^2=3l+4\\&\Rightarrow l^2-3l-4=0\\&\Rightarrow (l+1)(l-4)=0\\&\Rightarrow \begin{cases}l+1=0\\ \text{أو}\\ l-4=0\end{cases}\\&\Rightarrow \begin{cases}l=-1\ (\text{مرفوض})\\ \text{أو}\\ l=4\end{cases}\end{aligned}$$

$l=-1$ مرفوض لأن: $0<u_n<4$

ومنه:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n)=l=4}$$

التمرين 14

❶ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها العام: $u_n = e^{\left(\frac{1}{2}-n\right)}$

① بين أن (u_n) متتالية هندسية، مبينا أساسها وحدها الأول.

② احسب نهاية المتتالية (u_n). ماذا تستنتج؟

③ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 +_2 + \cdots + u_n$

❷ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = ln(u_n)$.

① عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

② عبر بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n)$

③ عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$

حل التمرين 14

❶

① تبيين أن (u_n) متتالية هندسية:

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= e^{\left(\frac{1}{2}-(n+1)\right)} \\ &= e^{\left(\frac{1}{2}-n-1\right)} \\ &= e^{\left(\frac{1}{2}-n\right)}e^{-1} \\ &= e^{-1}u_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$u_0 = e^{\left(\frac{1}{2}-0\right)} = \sqrt{e}$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية e^{-1} أساسها e^{-1} وحدها الأول $\sqrt{e}$

② حساب نهاية المتتالية (u_n):

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\left(\frac{1}{2}-n\right)}\right) = \boxed{0}$$

ماذا تستنتج؟

③ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n:

$$S_n = u_1 +_2 + \cdots + u_n$$

الخليل للرياضيات

$$= \sqrt{e}\left(\frac{1-(e^{-1})^n}{1-e^{-1}}\right)$$

$$= \boxed{\sqrt{e}\left(\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}\right)}$$

④ التعبير عن v_n بدلالة n :

$$v_n = ln(u_n)$$

$$\boxed{v_n = \frac{1}{2} - n}$$

- استنتاج نوع المتتالية (v_n) :

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $\frac{1}{2}$ وأساسها -1.

⑤ التعبير بدلالة n العدد P_n :

$$\begin{aligned}
P_n &= \ln(u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n) \\
&= \ln\left(e^{\left(\frac{1}{2}-0\right)} \times e^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \times \ldots \times e^{\left(\frac{1}{2}-n\right)}\right) \\
&= \ln\left(e^{\left(\frac{1}{2}-0\right)+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-n\right)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}-0\right)+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-n\right) \\
&= \frac{1}{2}(n+1)-(0+1+2+\cdots+n) \\
&= \frac{1}{2}(n+1)-\frac{n+1}{2}(n+0) \\
&= \boxed{\frac{(1+n)(1-n)}{2}}
\end{aligned}$$

⑥ تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$:

$$\begin{aligned}
P_n + 4n > 0 &\Rightarrow \frac{(1+n)(1-n)}{2} + 4n > 0 \\
&\Rightarrow (1+n)(1-n) + 4n > 0 \\
&\Rightarrow 1 - n + n - n^2 + 4n > 0 \\
&\Rightarrow -n^2 + 4n + 1 > 0
\end{aligned}$$

لدينا:

$$\Delta = 16 - 4(-1)(1) = 20 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$$

$$\begin{cases} n_1 = 2 - \sqrt{5} \\ n_2 = 2 + \sqrt{5} \end{cases}$$

ومنه:

$$P_n + 4n > 0 \Rightarrow -n^2 + 4n + 1 > 0$$

$$\Rightarrow -(n-2-\sqrt{5})(n-2+\sqrt{5}) > 0$$
$$\Rightarrow (2+\sqrt{5}-n)(n-2+\sqrt{5}) > 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2+\sqrt{5}-n > 0 \\ \text{أو} \\ n-2+\sqrt{5} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n < 2+\sqrt{5} \\ \text{أو} \\ n > 2-\sqrt{5} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \boxed{n \in]2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}[}$$

التمرين 15

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \end{cases}$$

وَ (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = u_n - 4$$

1. بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n \leq 4$
2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.
3. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
4. اكتب كل من (v_n) و (u_n) بدلالة n .
5. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 +_2 + \cdots + u_n$
6. لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$$

① بين أن المتتالية (w_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

② احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n - w_n]$

حل التمرين 15

1. تبيين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n \leq 4$:

نستعمل البرهان بالتراجع:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 1 \leq 4 \ldots (*)$$

الخاصية محققة من أجل $n = 0$

- نفرض أن $u_n \leq 4$ محققة ونثبت أنّ $u_{n+1} \leq 4$:

$$u_n \leq 4 \Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leq \frac{8}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq 4$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 4 \ldots (**)$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع : من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{u_n \leq 4}$$

❷ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} - u_n$$
$$= -\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$$

لدينا:

$$-\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} = 0$$
$$\Rightarrow u_n = 4$$

u_n	$-\infty$	4	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	$+$	0	$-$

ومنه لما $u_n \leq 4$ لدينا (u_n) **متزايدة تماما**.

❸ تبيين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4$$
$$= \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} - 4$$
$$= \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{3}$$
$$= \frac{2}{3}(u_n - 4)$$
$$= \frac{2}{3}v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - 4 = -3$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -3$.

❹ كتابة كلا من (v_n) و (u_n) بدلالة n :

$$\boxed{v_n = -3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

ولدينا:

$$v_n = u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4$$
$$\Rightarrow \boxed{u_n = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

5 حساب بدلالة n المجموع S_n:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + _2 + \cdots + u_n \\ &= v_1 + 4 + v_2 + 4 + \cdots + v_n + 4 \\ &= 4n + (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) \\ &= 4n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}\right) \\ &= 4n - 2\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}\right) \\ &= \boxed{4n - 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} \end{aligned}$$

6

① تبيين أن المتتالية (w_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 5\left(\frac{1}{v_{n+1} + 5} - 1\right) - 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right) \\ &= 5\left(\frac{1}{5 \underbrace{-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}_{v_{n+1}}} - 1 - \frac{1}{5 \underbrace{-3\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{v_n}} + 1\right) \\ &= 5\left(\frac{1}{5 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} - \frac{1}{5 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow -3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > -3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$\Rightarrow 5 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > 5 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} < \frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} - \frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}} < 0$$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} - \frac{1}{5-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}\right) < 0$$

$$\Rightarrow w_{n+1} - w_n < 0$$

ومنه (w_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

② حساب $\lim_{n\to+\infty}[u_n - w_n]$:

$$\lim_{n\to+\infty}[u_n - w_n] = \lim_{n\to+\infty}\left[4 \underbrace{-3\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{0} - 5\left(\frac{1}{\underbrace{-3\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{0}+5} - 1\right)\right]$$

$$= 4 - 5\left(\frac{1}{5} - 1\right)$$

$$= \boxed{8}$$

التمرين 16

❶ (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

① برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n: $u_n > 1$

② برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

③ استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة.

❷ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$$

① برهن أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

② اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) .

③ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، استنتج أن:

$$u_n = \frac{n+2}{n+1}$$

④ احسب نهاية المتتالية (u_n).

حل التمرين 16

❶

① البرهان بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n: $u_n > 1$:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 2 > 1 \ldots (*)$$

- نفرض أن $(u_n > 1)$ صحيحة ونثبت أنّ $(u_{n+1} > 1)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\Rightarrow \frac{1}{u_n} < 1 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{u_n} > -1 \\ &\Rightarrow 2 - \frac{1}{u_n} > -1 + 2 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 1 \ldots (**) \end{aligned}$$

حسب البرهان بالتراجع من $(*)$ و $(**)$ نجد أن: $(u_n > 1)$.

② برهان أن المتتالية (u_n) متناقصة:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 - \frac{1}{u_n} - u_n \\ &= \frac{2u_n - 1 - (u_n)^2}{u_n} \end{aligned}$$

لدينا $u_n > 1$ معناه $(u_n > 0)$ ومنه إشارة $(u_{n+1} - u_n)$ من إشارة البسط:

$$-(u_n)^2 + 2u_n - 1 = 0$$

لدينا:

$$\Delta = 2^2 - 4(-1)(-1) = 0$$

ومنه:

u_n	$-\infty$	1	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	$+$	0	$-$

ومنه لما $u_n > 1$ تكون (u_n) متناقصة تماما.

③ استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة.

الخليل للرياضيات

❷

① برهان أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 3+\frac{1}{u_{n+1}-1}\\
&= 3+\frac{1}{2-\frac{1}{u_n}-1}\\
&= 3+\frac{1}{\frac{u_n-1}{u_n}}\\
&= 3+\frac{u_n}{u_n-1}\\
&= 3+\frac{u_n+1-1}{u_n-1}\\
&= 3+\frac{1}{u_n-1}+\frac{u_n-1}{u_n-1}\\
&= \underbrace{3+\frac{1}{u_n-1}}_{v_n}+1\\
&= v_n+1
\end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = 3+\frac{1}{u_0-1} = 4$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول 4.

② كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) :

$$\boxed{v_n = 4+n}$$

③ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، استنتاج أن: $u_n = \frac{n+2}{n+1}$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
v_n = 3+\frac{1}{u_n-1} &\Rightarrow 4+n = 3+\frac{1}{u_n-1}\\
&\Rightarrow 1+n = \frac{1}{u_n-1}\\
&\Rightarrow u_n-1 = \frac{1}{1+n}\\
&\Rightarrow u_n = \frac{1}{1+n}+1\\
&\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{2+n}{1+n}}
\end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

④ حساب نهاية المتتالية (u_n):

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n}\right) = \boxed{1}$$

التمرين 17

❶ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي (u_n):

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

① احسب u_1 و u_2.

② برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 3$

❷ لتكن (v_n) المتتالية المُعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ:

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$$

① بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

② اكتب (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

❸ (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ:

$$w_n = \frac{3}{u_n}$$

نضع: $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

① اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$

② بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

③ احسب $\lim_{n\to+\infty}\left[{}^{S_n}/_{n}\right]$.

حل التمرين 17

❶

الخليل للرياضيات

① حساب u_1 و u_2:

$$u_{0+1}=\frac{4u_0}{1+u_0}\Rightarrow u_1=\frac{4}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_1=2}$$
$$u_{1+1}=\frac{4u_1}{1+u_1}\Rightarrow u_1=\frac{4\times 2}{1+2}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_1=\frac{8}{3}}$$

② البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<3$:

- من أجل $n=0$ لدينا:

$$0<1<3\Rightarrow 0<u_0<3\ ...(*)$$

- نفرض أن $0<u_n<3$ صحيحة ونثبت أنّ $0<u_{n+1}<3$:

لدينا:

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=\frac{4u_n}{1+u_n}\\&=\frac{4u_n+4-4}{1+u_n}\\&=\frac{4(u_n+1)}{1+u_n}-\frac{4}{1+u_n}\\&=4-\frac{4}{1+u_n}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}0<u_n<3&\Rightarrow 1<1+u_n<4\\&\Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{1+u_n}<1\\&\Rightarrow 1<\frac{4}{1+u_n}<4\\&\Rightarrow -4<-\frac{4}{1+u_n}<-1\\&\Rightarrow 0<4-\frac{4}{1+u_n}<3\\&\Rightarrow 0<u_{n+1}<3\ ...(**)\end{aligned}$$

حسب البرهان بالتراجع من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{0<u_n<3}$$

❷

① تبيين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$:

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}}$$
$$=\frac{\frac{4u_n}{1+u_n}-3}{\frac{4u_n}{1+u_n}}$$
$$=\frac{4u_n-3-3u_n}{4u_n}$$
$$=\frac{u_n-3}{4u_n}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{u_n-3}{u_n}\right)$$
$$=\frac{1}{4}v_n$$

ولدينا:

$$v_0=\frac{u_0-3}{u_0}=\frac{1-3}{1}=-2$$

ومنه (v_n) متتالية $\boxed{\text{هندسية}}$ أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول -2

② كتابة (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n :

$$\boxed{v_n=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

ولدينا:

$$v_n=\frac{u_n-3}{u_n}\Rightarrow v_nu_n-u_n=-3$$
$$\Rightarrow u_n(v_n-1)=-3$$
$$\Rightarrow u_n=\frac{-3}{v_n-1}$$
$$\Rightarrow u_n=\frac{3}{1-v_n}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_n=\frac{3}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(u_n=\frac{3}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n}\right)$$

$$= \frac{3}{1+2(0)}$$
$$= \boxed{3}$$

❸

① اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$:

$$w_n = \frac{3}{u_n}$$
$$= \frac{3}{\frac{3}{1-v_n}}$$
$$= 3 \times \frac{1-v_n}{3}$$
$$= \boxed{1-v_n}$$

② تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$:

$$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$$
$$= 1 - v_0 + 1 - v_1 + \cdots + 1 - v_n$$
$$= 1(n+1) - (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$$
$$= n + 1 + 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)$$
$$= n + 1 + 2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right)$$
$$= \boxed{n + 1 + \frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}$$

③ حساب $\lim_{n\to+\infty}\left[{}^{S_n}/_{n}\right]$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[{}^{S_n}/_{n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n+1+\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}{n}\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{8}{3n}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right]$$
$$= \boxed{1}$$

التمرين 18

❶ (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) \end{cases}$$

① احسب u_1، u_2 و u_3 .

② بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$\frac{2n+3}{2n+1} > 1$$

③ استنتج اتجاه تغير (u_n) .

❷ (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 2n+1$.

① برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن: $e^{u_n} = v_n$.

② استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

③ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث:

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

④ احسب المجموع (T_n) حيث:

$$T_n = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \cdots + e^{u_{2018}}$$

حل التمرين 18

❶

① حساب u_1، u_2 و u_3 :

$$u_{0+1} = u_0 + \ln\left(\frac{2(0)+3}{2(0)+1}\right) \Rightarrow \boxed{u_1 = \ln(3)}$$

$$u_{1+1} = u_1 + \ln\left(\frac{2(1)+3}{2(1)+1}\right) \Rightarrow u_2 = \ln(3) + \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \ln(5)}$$

$$u_{2+1} = u_2 + \ln\left(\frac{2(2)+3}{2(2)+1}\right) \Rightarrow u_3 = \ln(5) + \ln\left(\frac{7}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_3 = \ln(7)}$$

② تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$:

الخليل للرياضيات

لدينا

$$2n+3>2n+1 \Rightarrow \boxed{\frac{2n+3}{2n+1}>1}$$

③ استنتاج اتجاه تغير (u_n) :

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)-u_n \\ &= \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

وبما أن $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ فإن : $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)>0$

ومنه : $u_{n+1}-u_n>0$

اذن: (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

❷

① البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن: $e^{u_n}=v_n$:

- من أجل $n=0$ لدينا:

$$e^{u_0}=v_0 \Rightarrow e^0=1 \Rightarrow 1=1 \ldots (*)$$

- نفرض أن $e^{u_n}=v_n$ ونثبت أن $e^{u_{n+1}}=v_{n+1}$:

$$\begin{aligned} e^{u_n}=v_n &\Rightarrow u_n=\ln(v_n) \\ &\Rightarrow u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)=\ln\left(\underbrace{2n+1}_{v_n}\right)+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) \\ &\Rightarrow u_{n+1}=\ln\left((2n+1)\times\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\right) \\ &\Rightarrow u_{n+1}=\ln(2n+3) \\ &\Rightarrow e^{u_{n+1}}=2n+3 \\ &\Rightarrow e^{u_{n+1}}=2(n+1)+1 \\ &\Rightarrow e^{u_{n+1}}=v_{n+1} \ldots (**) \end{aligned}$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{e^{u_n}=v_n}$$

② استنتاج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) :

$$\begin{aligned} e^{u_n}=v_n &\Rightarrow u_n=\ln(v_n) \\ &\Rightarrow \boxed{u_n=\ln(2n+1)} \end{aligned}$$

③ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{v_1}{v_0} \times \frac{v_2}{v_1} \times \dots \times \frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{v_n}{v_0}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2n+1}{1}\right)$$
$$= \boxed{\ln(2n+1)}$$

④ حساب المجموع T_n:

نلاحظ أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول 1 ومنه:

$$\begin{aligned} T_n &= e^{u_{1996}} + e^{u_{1997}} + \cdots + e^{u_{2021}} \\ &= v_{1996} + v_{1997} + \cdots + v_{2021} \\ &= (2021 - 1996 + 1)\frac{(2(2021) + 1 + 2(1996) + 1)}{2} \\ &= 26 \times \frac{8036}{2} \\ &= \boxed{104468} \end{aligned}$$

التمرين 19

❶ (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$$

① احسب u_1، u_2 و u_3 .

② هل المتتالية u_n حسابية ؟ هندسية ؟

❷ نضع من أجل كل عدد n : $v_n = u_n - 2n + 6$

① احسب v_0، v_1، v_2 و v_3 .

② اثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها.

③ اكتب عبارة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

④ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

⑤ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

حل التمرين 19

❶

① حساب u_1، u_2 و u_3 :

$$u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = -\frac{1}{2}}$$

$$u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + 1 - 1 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = -\frac{1}{4}}$$

$$u_{2+1} = \frac{1}{2}u_2 + 2 - 1 \Rightarrow u_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{7}{8}}$$

② هل المتتالية u_n حسابية ؟ هندسية ؟

- (u_n) متتالية حسابية معناه:

$$u_3 - u_2 = u_2 - u_1 = u_1 - u_0 = r$$

لدينا:

$$\begin{cases} u_3 - u_2 = \frac{9}{8} \\ u_2 - u_1 = \frac{1}{4} \\ u_1 - u_0 = -1 \end{cases}$$

$$u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$$

ومنه (u_n) ليست حسابية.

- (u_n) متتالية هندسية معناه:

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1}{u_0} = q$$

لدينا:

$$\begin{cases} \frac{u_3}{u_2} = -\frac{7}{2} \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} \\ \frac{u_1}{u_0} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$$

ومنه (u_n) ليست هندسية.

③ حساب v_0، v_1، v_2 و v_3 :

$$v_0 = u_0 - 2(0) + 6 \Rightarrow \boxed{v_0 = 7}$$

$$v_1 = u_1 - 2(1) + 6 \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{7}{2}}$$

$$v_2 = u_2 - 2(2) + 6 \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{7}{4}}$$

$$v_3 = u_3 - 2(3) + 6 \Rightarrow \boxed{v_3 = \frac{7}{8}}$$

④ اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2(n+1) + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n + n - 1 - 2n - 2 + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n - n + 3 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 2n + 6) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

ولدينا: $v_0 = 7$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول 7 .

⑤ كتابة عبارة (v_n) بدلالة n :

$$\boxed{v_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

- استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n :

لدينا:

$$v_n = u_n - 2n + 6 \Rightarrow u_n = v_n + 2n - 6$$

$$\Rightarrow u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$$

⑥ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6\right)$$
$$= +\infty$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

⑦ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n:

لدينا:

الخليل للرياضيات

$$u_n = v_n + 2n - 6 = v_n + w_n$$

حيث (w_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول -6

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= v_0 + 2(0) - 6 + v_1 + 2(1) - 6 + \cdots + v_n + 2n - 6 \end{aligned}$$

نضع $w_n = 2n - 6$

نلاحظ أن w_n عبارة متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول -6 ومنه:

$$\begin{aligned} S_n &= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (w_0 + w_1 + \cdots + w_n) \\ &= 7\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) + (n+1)\frac{(2n - 6 - 6)}{2} \\ &= 7\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right) + (n+1)\frac{(2n - 12)}{2} \\ &= \boxed{14\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(n-6)} \end{aligned}$$

التمرين 20

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^3}{3(u_n)^2 + 1} \end{cases}$$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$.
2. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
3. استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة.
4. بين انه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$$

5. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

6. احسب نهاية المتتالية (u_n).

حل التمرين 20

1 تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \geq 0$:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 1 > 1 \ldots (*)$$

- نفرض أن $(u_n > 0)$ ونثبت صحة $(u_{n+1} > 0)$:

نضع من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$u_{n+1} = f(x) = f(u_n)$$

أي:

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(3x^2+1) - 6x^4}{(3x^2+1)^2} \\ &= \frac{3x^2(3x^2+1-2x^2)}{(3x^2+1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x^2+1)}{(3x^2+1)^2} \end{aligned}$$

لدينا: $f'(x) > 0$ و $f(0) = 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ولدينا من فرض البرهان:

$$\begin{aligned} u_n > 0 &\Rightarrow f(u_n) > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 0 \ldots (**) \end{aligned}$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{u_n > 0}$$

2 تبيين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(u_n)^3}{3(u_n)^2 + 1} - u_n \\ &= \frac{(u_n)^3 - 3(u_n)^3 - u_n}{3(u_n)^2 + 1} \\ &= \frac{-2(u_n)^3 - u_n}{3(u_n)^2 + 1} \\ &= \frac{-u_n(2(u_n)^2 + 1)}{3(u_n)^2 + 1} \end{aligned}$$

لدينا: $(3(u_n)^2 + 1 > 0)$ و $(2(u_n)^2 + 1 > 0)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(-u_n)$

ومنه:

$$u_{n+1}-u_n<0$$

اذن المتتالية (u_n) $\boxed{\text{متناقصة تماما}}$ على $\mathbb{N}$.

❸ استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة:

لدينا (u_n) متناقصة تماما ، ولدينا $u_n>0$ فهي محدودة من الأسفل بـ 0

إذن: المتتالية (u_n) $\boxed{\text{متقاربة}}$.

❹ تبيين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}\leq\frac{1}{3}u_n$:

لدينا:

$$\begin{aligned}u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n&=\frac{(u_n)^3}{3(u_n)^2+1}-\frac{1}{3}u_n\\&=\frac{3(u_n)^3-3(u_n)^3-u_n}{3(3(u_n)^2+1)}\\&=\frac{-u_n}{3(3(u_n)^2+1)}\end{aligned}$$

لدينا $(3(u_n)^2+1>0)$ ومنه إشارة $\left(u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n\right)$ من إشارة $(-u_n)$

لدينا:

$$u_n>0\Rightarrow -u_n\leq 0$$

اذن:

$$u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n\leq 0\Rightarrow \boxed{u_{n+1}\leq\frac{1}{3}u_n}$$

❺ استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$:

لدينا:

$$\begin{aligned}u_1&\leq\frac{1}{3}u_0\leq\frac{1}{3}\\u_2&\leq\frac{1}{3}u_1\leq\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\leq\left(\frac{1}{3}\right)^2\\u_3&\leq\frac{1}{3}u_2\leq\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\leq\left(\frac{1}{3}\right)^3\\&\vdots\\u_n&\leq\frac{1}{3}u_{n-1}\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

اذن:

$$\boxed{u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

❻ حساب نهاية المتتالية (u_n):

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) \le \lim_{n\to+\infty}(u_n) \le \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \boxed{0}$$

التمرين 21

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ 4u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$$

و (v_n) متتالية معرفة بالشكل: $v_n = u_{n+1} - u_n$

❶ احسب u_2 و v_0 .

❷ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

❸ اكتب عبارة (v_n) بدلالة n .

❹ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$$

❺ عبر عن (u_n) بدلالة n ثم استنتج نهايتها.

حل التمرين 21

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ 4u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$$

و (v_n) متتالية معرفة بالشكل: $v_n = u_{n+1} - u_n$

❶ حساب u_2 و v_0 :

$$4u_{0+2} = 7u_{0+1} - 3u_0 \Rightarrow u_2 = \frac{7\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{4}\right)}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{11}{16}}$$

$$v_0 = u_{0+1} - u_0 \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{1}{4}}$$

❷ تبيين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= \frac{7u_{n+1} - 3u_n}{4} - u_{n+1} \\ &= \frac{7u_{n+1} - 3u_n - 4u_{n+1}}{4} \\ &= \frac{3u_{n+1} - 3u_n}{4} \\ &= \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) \\ &= \frac{3}{4}v_n \end{aligned}$$

ولدينا: $v_0 = \frac{1}{4}$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول $\frac{1}{4}$

❸ التعبير عن (v_n) بدلالة n :

$$\boxed{v_n = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

❹ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}}\right) \\ &= \boxed{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} \end{aligned}$$

❺ التعبير عن (u_n) بدلالة n :

الخليل للرياضيات

لدينا:

$$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \\ v_2 = u_3 - u_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} = u_n - u_{n-1} \end{cases}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد:

$$\underbrace{v_0 + v_1 + v_2 + \cdots v_{n-1}}_{S_n} = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \cdots + u_n - u_{n-1}$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n = u_n - u_0$$

$$\Rightarrow u_n - \frac{1}{4} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{5}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

- استنتاج نهايتها:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$
$$= \boxed{\frac{5}{4}}$$

لأن: $-1 < \frac{3}{4} < 1$.

التمرين 22

1 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$

2 لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \lambda n - 1$ حيث λ عدد طبيعي.

① اثبت أنه يوجد عدد طبيعي λ تكون من أجله المتتالية (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

② نضع $\lambda = 2$، اكتب عبارة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) .

③ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

④ احسب $\lim_{n\to+\infty}(S_n)$.

حل التمرين 22

1

① البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 2^{-0} - 2(0) + 1 \ldots (*)$$

- نفرض أن $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$ ونثبت أن $u_{n+1} = 2^{-(n+1)} - 2(n+1) + 1$

لدينا:

$$u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - n - \frac{3}{2}$$

ولدينا:

$$u_n = 2^{-n} - 2n + 1 \Rightarrow \frac{u_n}{2} = \frac{2^{-n}}{2} - n + \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{u_n}{2} - n = 2^{-n-1} - 2n + \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{u_n}{2} - n - \frac{3}{2} = 2^{-(n+1)} - 2n - \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} = 2^{-(n+1)} - 2n - 1 \ldots (**)$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{u_n = 2^{-n} - 2n + 1}$$

2

① اثبات أنه يوجد عدد طبيعي λ تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \lambda(n+1) - 1$$
$$= \underbrace{\frac{u_n}{2} - n - \frac{3}{2}}_{u_{n+1}} + \lambda n + \lambda - 1$$
$$= \frac{1}{2}(u_n + \lambda n - 1) + \frac{1}{2}\lambda(n+2) - n - 2$$
$$= \frac{1}{2}v_n + \left(\frac{1}{2}\lambda(n+2) - n - 2\right)$$

لكي تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن $\left(\frac{1}{2}\lambda(n+2) - n - 2\right) = 0$

$$\frac{1}{2}\lambda(n+2) - n - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda(n+2) = n + 2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 + \lambda(0) - 1 = 1$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول 1 من أجل $\lambda = 2$.

② كتابة عبارة (v_n):

$$\boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

- استنتاج عبارة (u_n) :

لدينا:

$$v_n = u_n + 2n - 1 \Rightarrow u_n = v_n - 2n + 1$$
$$\Rightarrow \boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n + 1}$$

③ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n:

$$\begin{aligned} S_n &= v_1 + v_2 + \cdots + v_n \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 - (2^{-1})^{n+1}}{\frac{1}{2}} \\ &= 2(1 - 2^{-n-1}) \\ &= \boxed{2 - 2^{-n}} \end{aligned}$$

④ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} (S_n) = \lim_{n\to+\infty} (2 - 2^{-n}) = \boxed{2}$$

لأن: $-1 < 2^{-1} < 1$

التمرين 23

❶ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{3}n + \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

① احسب u_1 و u_2

❷ نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - \frac{2}{3}n$

① بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول

② عين عبارة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

③ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

❸ ليكن S'_n حيث: $S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، بين أن:

$$S'_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3}n(n+1)$$

❹ ليكن الجداء P_n حيث: $P_n = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$ ، بين أن: $P_n = \left(\sqrt{2}\right)^{-n(n+1)}$

حل التمرين 23

❶

① حساب u_1 و u_2:

$$u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{11}{12}}$$

$$u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{3}(1) + \frac{2}{3} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{9}{8}}$$

❷

① تبيين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{3}(n+1) \\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}n \\ &= \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}n\right) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - \frac{2}{3}(0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$.

② تعيين عبارة (v_n) و (u_n) بدلالة n :

$$v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

ولدينا:

$$v_n = u_n - \frac{2}{3}n \Rightarrow u_n = v_n + \frac{2}{3}n$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{2}{3}n}$$

③ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n:

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

❸ تبيين عبارة S'_n :

لدينا: $u_n = v_n + \frac{2}{3}n$

ومنه:

$$S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$= v_1 + \frac{2}{3}(1) + v_2 + \frac{2}{3}(2) + \cdots + v_n + \frac{2}{3}n$$

$$= v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \frac{2}{3}(1 + 2 + \cdots + n)$$

$$= S_n + \frac{2}{3}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3}n(n+1)}$$

❹ تبيين أن: $P_n = (\sqrt{2})^{-n(n+1)}$:

$$P_n = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \ldots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2+3+\cdots+n}$$

$$= (2^{-1})^{\frac{1}{2}n(n+2)}$$

$$= \left(2^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)^{n(n+1)}$$

$$= \left(2^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{-n(n+1)}$$

$$= \boxed{(\sqrt{2})^{-n(n+1)}}$$

التمرين 24

❶ (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بالشكل التالي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

① احسب u_1 ، u_2 ، v_1 و v_2 .

❷ نعتبر (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = v_n - u_n$.

① برهن أن المتتالية (w_n) هندسية أساسية أساسها $\frac{1}{4}$.

② اكتب عبارة (w_n) بدلالة n .

③ عين نهاية المتتالية (w_n).

❸ ادرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

❹ برهن ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين، ماذا تستنتج؟

❺ نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

① برهن ان المتتالية (t_n) ثابتة.

② استنتج نهاية المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

حل التمرين 24

❶

① حساب u_1 ، v_1 ، u_2 و v_2 :

$$u_{0+1}=\frac{u_0+v_0}{2}\Rightarrow u_1=\frac{3+4}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_1=\frac{7}{2}}$$
$$v_{0+1}=\frac{u_{0+1}+v_0}{2}\Rightarrow v_1=\frac{\frac{7}{2}+4}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{v_1=\frac{15}{4}}$$
$$u_{1+1}=\frac{u_1+v_1}{2}\Rightarrow u_2=\frac{\frac{7}{2}+\frac{15}{4}}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_2=\frac{29}{8}}$$
$$v_{1+1}=\frac{u_{1+1}+v_1}{2}\Rightarrow v_2=\frac{\frac{29}{8}+\frac{15}{4}}{2}$$
$$\Rightarrow \boxed{v_2=\frac{59}{16}}$$

❷

① برهان أن المتتالية (w_n) هندسية أساسية أساسها $\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned}w_{n+1}&=v_{n+1}-u_{n+1}\\&=\frac{u_{n+1}+v_n}{2}-\frac{u_n+v_n}{2}\\&=\frac{\frac{u_n+v_n}{2}+v_n}{2}-\frac{u_n+v_n}{2}\\&=\frac{\frac{u_n+v_n+2v_n}{2}}{2}-\frac{u_n+v_n}{2}\\&=\frac{u_n+3v_n}{4}-\frac{2u_n+2v_n}{4}\\&=\frac{-u_n+v_n}{4}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$
$$= \frac{1}{4}w_n$$

ولدينا:

$$w_0 = v_0 - u_0$$
$$= 4 - 3$$
$$= 1$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول 1 .

② كتابة عبارة (w_n) بدلالة n :

$$\boxed{w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

③ تعيين نهاية المتتالية (w_n):

$$\lim_{n\to+\infty}(w_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 0$$

❸ دراسة اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) :

لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$$
$$= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}$$
$$= \frac{v_n - u_n}{2}$$
$$= \frac{w_n}{2}$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة المتتالية (w_n) ، ولدينا وضوحا أن $(w_n) > 0$.

ومنه المتتالية (u_n) $\boxed{\text{متزايدة}}$ تماما على $\mathbb{N}$.

ولدينا:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n$$
$$= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{2} - v_n$$
$$= \frac{u_n + v_n + 2v_n}{4} - \frac{4v_n}{4}$$
$$= \frac{u_n - v_n}{4}$$

$$= -\frac{w_n}{4}$$

ومنه المتتالية (v_n) $\boxed{\text{متناقصة}}$ تماما على $\mathbb{N}$.

❹ برهان ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين:

لدينا:

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty}(w_n) = 0$$

ولدينا:

(u_n) متتالية متزايدة تماما و (v_n) متناقصة تماما

اذن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين.

- الاستنتاج:

بما أن المتتالتين متجاورتين فإن لهما نفس النهاية.

❺ نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

① برهان ان المتتالية (t_n) ثابتة:

$$t_{n+1} - t_n = \frac{u_{n+1} + 2\frac{u_{n+1} + v_n}{2}}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + 2\frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{2}}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

$$= \frac{u_n + v_n + v_n - u_n - 2v_n}{3}$$

$$= \frac{0}{3}$$

$$= 0$$

ومنه (t_n) متتالية $\boxed{\text{ثابتة}}$

② استنتاج نهاية المتتالتين (u_n) و (v_n) :

بما أن (t_n) ثابتة ، لدينا:

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} = t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{3 + 2(4)}{3} = \frac{11}{3} = t_1 = t_2 = \lim_{n\to+\infty}(t_n)$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}(t_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n+2v_n}{3}\right)=\frac{11}{3}$$

ولدينا:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(u_n)=l\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(u_{n+1})=l\end{cases}$$

وبما أن لـ (u_n) و (v_n) نفس النهاية فإن:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(u_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}(v_n)=l\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(u_{n+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}(v_{n+1})=l\end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n+2v_n}{3}\right)=\frac{11}{3}&\Rightarrow\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)+2\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)}{3}=\frac{11}{3}\\&\Rightarrow\frac{l+2l}{3}=\frac{11}{3}\\&\Rightarrow 3l=11\\&\Rightarrow l=\frac{11}{3}\end{aligned}$$

إذن:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}(u_n)=\lim_{x\to+\infty}(u_n)=\frac{11}{3}}$$

التمرين 25

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ كما يلي:

$$\begin{cases}u_0=0\\ u_1=1\\ u_{n+1}=7u_n+8u_{n-1}\end{cases}$$

والمتتالية (s_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $s_n=u_{n+1}+u_n$

❶

① بين ان المتتالية (s_n) هندسية مبينا أساسها وحدها الأول.

② استنتج عبارة s_n بدلالة n .

❷ نضع $v_n=(-1)^n\times u_n$ ، ونعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$t_n=v_{n+1}-v_n$$

① عبر عن t_n بدلالة s_n

② عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

③ احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[{}^{u_n}/_{8^n}\right]$.

حل التمرين 25

❶

① تبيين ان المتتالية (s_n) هندسية:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= u_{n+2} + u_{n+1} \\ &= \underbrace{7u_{n+1} + 8u_n}_{u_{n+2}} + u_{n+1} \\ &= 8u_{n+1} + 8u_n \\ &= 8(u_{n+1} + u_n) \\ &= 8s_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} s_0 &= u_{0+1} + u_0 \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ومنه (s_n) متتالية هندسية أساسها 8 و حدها الأول 1.

② استنتاج عبارة s_n بدلالة n :

$$\boxed{s_n = (8)^n}$$

❷

$$t_n = v_{n+1} - v_n$$

① التعبير عن t_n بدلالة s_n:

$$\begin{aligned} t_n &= v_{n+1} - v_n \\ &= (-1)^{n+1} \times u_{n+1} - (-1)^n \times u_n \\ &= (-1)^{n+1} \times u_{n+1} + (-1)^{n+1} \times u_n \\ &= (-1)^{n+1}(u_{n+1} + u_n) \\ &= (-1)^{n+1} \times s_n \end{aligned}$$

② التعبير عن v_n و u_n بدلالة n :

لدينا:

$$\begin{cases} t_0 = v_1 - v_0 \\ t_1 = v_2 - v_1 \\ t_2 = v_3 - v_2 \\ \quad\vdots \\ t_{n-1} = v_n - v_{n-1} \end{cases}$$

بالجمع نجد:

$$t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_3 - v_2 + \cdots + v_n - v_{n-1}$$

ومنه:

$$t_0+t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}=-v_0+v_n$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} t_n=(-1)^{n+1}\times s_n \Rightarrow t_{n-1}&=(-1)^n\times s_{n-1}\\ \Rightarrow t_{n-1}&=(-1)^n\times(8)^{n-1}\\ \Rightarrow t_{n-1}&=(-1)^n\times\frac{(8)^n}{8}\\ \Rightarrow t_{n-1}&=\frac{(-1\times 8)^n}{8}\\ \Rightarrow t_{n-1}&=\frac{(-8)^n}{8}\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} t_0+t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}=-v_0+v_n \Rightarrow -1\left(\frac{1-(-8)^n}{1-(-8)}\right)&=\underbrace{-0}_{-v_0}+v_n\\ \Rightarrow v_n&=-\left(\frac{1-(-8)^n}{9}\right)\\ &\Rightarrow \boxed{v_n=\frac{1}{9}((-8)^n-1)}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_n=(-1)^n\times u_n \Rightarrow u_n&=\frac{v_n}{(-1)^n}\\ \Rightarrow \boxed{u_n=\frac{(-8)^n-1}{9(-1)^n}}\end{aligned}$$

❸ حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[{}^{u_n}/_{8^n}\right]$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{u_n}{8^n}\right]&=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\frac{(-8)^n-1}{9(-1)^n}}{8^n}\right]\\ &=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-8)^n-1}{8^n\times 9(-1)^n}\right]\\ &=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-8)^n-1}{9(-8)^n}\right]\\ &=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(-8)^n\left(1-\frac{1}{(-8)^n}\right)}{9(-8)^n}\right]\end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{(-8)^n}}{9}\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{9}}$$

التمرين 26

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ، ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$$

1 احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2

① برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$

② استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > \frac{4}{3}n$

3 لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = u_n - 2n + 1$$

① بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

② استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$$

③ احسب بدلالة n المجموع S_n ، حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

4 نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بـ: $w_0 = -1$ ، ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 3$$

① احسب w_1 ، w_2، w_3 و w_4 ، ما تخمينك لنوعية المتتالية (w_n).

② برهن صحة تخمينك على نوعية المتتالية (w_n) .

③ احسب w_{1011} .

حل التمرين 26

1 حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

- $3u_{0+1} = u_0 + 4(0) + 4 \Rightarrow 3u_1 = \underbrace{3}_{u_0} + 4(0) + 4$

$$\Rightarrow 3u_1 = 7$$

الخليل للرياضيات

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{7}{3}}$$

- $3u_{1+1} = u_1 + 4(1) + 4 \Rightarrow 3u_2 = \frac{7}{3} + 4(1) + 4$

$$\Rightarrow 3u_2 = \frac{31}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{31}{9}}$$

- $3u_{2+1} = u_2 + 4(2) + 4 \Rightarrow 3u_3 = \frac{31}{9} + 4(2) + 4$

$$\Rightarrow 3u_3 = \frac{139}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{139}{27}}$$

❷

① برهان أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$:

نبرهن القضية بالتراجع:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 3 > 0 \dots (*)$$

- نفرض أن $u_n > 0$ ونبرهن أن $u_{n+1} > 0$:

لدينا:

$$u_n > 0 \Rightarrow u_n + 4n + 4 > 4n + 4$$

ولدينا: $4n + 4 > 0$

إذن:

$$u_{n+1} > 0 \dots (**)$$

حسب مبدا البرهان بالتراجع: من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{u_n > 0}$$

② استنتاج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > \frac{4}{3}n$:

لدينا: $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$

ومنه: $3u_n = u_{n-1} + 4(n-1) + 4 = u_{n-1} + 4n$

ولدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n-1} > 0$

ومنه: $u_{n-1} + 4n > 4n$

ومنه: $3u_n > 4n$

اذن: $\boxed{u_n > \frac{4}{3}n}$

الخليل للرياضيات

❸

① تبيين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2(n+1) + 1 \\ &= u_{n+1} - 2n - 1 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} 3v_{n+1} &= 3u_{n+1} - 6n - 3 \\ &= \underbrace{u_n + 4n + 4}_{3u_{n+1}} - 6n - 3 \\ &= u_n - 2n + 1 \\ &= v_n \end{aligned}$$

ومنه:

$$v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = \underbrace{u_0}_{3} - 2(0) + 1 \Rightarrow v_0 = 4$$

ومنه (v_n) متتالية $\boxed{\text{هندسية}}$ أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول 4 ، ومنه:

$$\boxed{v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

② استنتاج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$:

لدينا: $v_n = u_n - 2n + 1$

ومنه: $u_n = v_n + 2n - 1$

إذن:

$$\boxed{u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1}$$

ملاحظة: يمكن استعمال مبدأ البرهان بالتراجع

③ حساب بدلالة n المجموع S_n :

لدينا:

$$u_n = v_n + 2n - 1$$

ومنه:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= v_1 + 2(1) - 1 + v_2 + 2(2) - 1 + \cdots + v_n + 2n - 1 \\ &= v_1 + v_2 + \cdots + v_n + 2(1 + 2 + \cdots + n) - 1(n+1) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{v_1 \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}}_{v_1+v_2+\cdots+v_n} + 2\left(\underbrace{\frac{n}{2}(n+1)}_{1+2+\cdots+n}\right) - (n+1)$$

$$= 4\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} + n(n+1) - (n+1)$$

$$= 6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + (n+1)(n-1)$$

$$\boxed{S_n = 6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + n^2 - 1}$$

4

① حساب w_1 ، w_2، w_3 و w_4 :

$$1w_1 = (1+1)w_{1-1} + 3 \Rightarrow w_1 = 2w_0 + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{w_1 = 1}$$
$$2w_2 = (2+1)w_{2-1} + 3 \Rightarrow w_2 = 2w_1 + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{w_2 = 6}$$
$$3w_3 = (3+1)w_{3-1} + 3 \Rightarrow w_3 = 2w_2 + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{w_3 = 15}$$
$$4w_4 = (1+1)w_{4-1} + 3 \Rightarrow w_4 = 2w_3 + 3$$
$$\Rightarrow \boxed{w_4 = 28}$$

من الحدود الأولى يمكن التخمين أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول $w_0 = -1$

أي:

$$\boxed{w_n = -1 + 2n}$$

② برهان صحة التخمين على طبيعة المتتالية (w_n) :

لتكن القضية (P_n) حيث:

$$w_n = -1 + 2n \ldots (P_n)$$

لدينا: $w_0 = -2 + 2(0) = -1$ ومنه (P_0) محققة.

نفرض أن (P_n) محققة ونبرهن أن (P_{n+1}) محققة. أي نبرهن أن $(w_{n+1} = 1 + 2n)$:

لدينا: $nw_n = (n+1)w_{n-1} + 3$

ومنه: $(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 3$

ومنه: $(n+1)w_{n+1} = (n+2)(-1+2n) + 3$

ومنه: $(n+1)w_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$

ومنه: $(n+1)w_{n+1} = (n+1)(2n+1)$

ومنه: $w_{n+1} = 2n+1$

اذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$\boxed{w_n = -1+2n}$$

③ حساب w_{1011} :

لدينا: $w_n = -1+2n$

ومنه:

$$w_{1011} = -1+2(1001)$$
$$\boxed{w_{1011} = 2021}$$

التمرين 27

من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعرف المتتالية (u_n) كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)u_n \end{cases}$$

1. احسب u_2 ، u_3

2.
① برهن أنه من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$ يكون: $u_n > 0$.
② برهن ان المتتالية (u_n) متناقصة.
③ ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية (u_n) ؟

3. نضع من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = {}^{u_n}/_{n}$
① برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
② استنتج أنه من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$ يكون: $u_n = {}^{n}/_{2^n}$

4. نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \ln x - x\ln 2$$

① عين نهاية الدالة عند $+\infty$.
② استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

حل التمرين 27

1. حساب u_2 ، u_3:

الخليل للرياضيات

$$u_{1+1} = \left(\frac{1+1}{2(1)}\right)u_1 \Rightarrow u_2 = \frac{2}{2}u_1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{1}{2}}$$

$$u_{2+1} = \left(\frac{2+1}{2(2)}\right)u_2 \Rightarrow u_3 = \frac{3}{4}u_2$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{3}{8}}$$

❷

① برهان أنه من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$ يكون $u_n > 0$:

نستعمل البرهان بالتراجع:

- من أجل $n = 1$ لدينا:

$$u_1 = \frac{1}{2} > 0 \ldots (*)$$

- نفرض أن $(u_n > 0)$ ونثبت أن $(u_{n+1} > 0)$:

لدينا:

$$u_n > 0 \Rightarrow (n+1)u_n > 0$$
$$\Rightarrow \frac{(n+1)u_n}{2n} > 0$$
$$\Rightarrow u_{n+1} > 0 \ldots (**)$$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع: من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{u_{n+1} > 0}$$

② برهان ان المتتالية (u_n) متناقصة:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)u_n}{2n} - u_n$$
$$= \frac{nu_n + u_n - 2nu_n}{2n}$$
$$= \frac{u_n(1-n)}{2n}$$

لدينا $2n > 0$ و $(1-n) < 0$

ومنه $(u_{n+1} - u_n < 0)$

اذن المتتالية (u_n) $\boxed{\text{متناقصة}}$ تماما على $\mathbb{N}^*$.

③ الاستنتاج:

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة بالأسفل بـ 0 فهي متقاربة.

❸

① برهان أن المتتالية (v_n) هندسية :

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{n} \\ &= \frac{\frac{(n+1)u_n}{2n}}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)u_n}{2n(n+1)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{u_n}{n} \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}$$

اذن: (v_n) متتالية $\boxed{\text{هندسية}}$ أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$.

② استنتاج أنه من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$ يكون $u_n = {}^{n}/_{2^n}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \\ &= 2^{-n} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n}{n} &\Rightarrow u_n = nv_n \\ &\Rightarrow u_n = n(2)^{-n} \\ &\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{n}{2^n}} \end{aligned}$$

❹

① تعيين نهاية الدالة عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)) = \lim_{x\to+\infty}(\ln x - x\ln 2)$$

الخليل للرياضيات

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}-\ln 2\right)\right)$$
$$= -\infty$$

② استنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x - x\ln 2 \\ &= \ln x - \ln 2^x \\ &= \ln\left(\frac{x}{2^x}\right) \end{aligned}$$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{2^x}\right)\right) = -\infty$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2^n}\right) = \underbrace{e^{-\infty}}_{(***)} = \boxed{0}$$

ملاحظة: $(***)$ ليست كتابة رياضية ، وإنما للتوضيح ليس إلا.

التمرين 28

لتكن المتتالية العددية (u_n) ذات الحدود غير المعدومة $u_0 = 1$ وَ $u_1 = \frac{1}{2}$ ،

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $(u_{n+1})^2 = 2u_{n+2} \times u_n$

ونضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
2. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون:

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times u_n$$

3. بين اذن أنه من أجل كل عد طبيعي n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

4. احسب نهاية المتتالية (u_n) .

حل التمرين 28

لتكن المتتالية العددية (u_n) ذات الحدود غير المعدومة $u_0 = 1$ وَ $u_1 = \frac{1}{2}$ ،

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $(u_{n+1})^2 = 2u_{n+2} \times u_n$

ونضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

❶ تبيين أن المتتالية (v_n) هندسية:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{(u_{n+1})^2}{2u_n}}{u_{n+1}} \\ &= \frac{u_{n+1}}{2u_n} \\ &= \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{2}$$

إذن المتتالية (v_n) $\boxed{\text{هندسية}}$ أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$

❷ استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times u_n$:

لدينا:

$$v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

ولدينا:

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_n v_n$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{n+1} = u_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

❸ تبيين أنه من أجل كل عد طبيعي n $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$:

$$u_1 = u_0 \left(\frac{1}{2}\right)$$

الخليل للرياضيات

❹ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$$
$$= \boxed{0}$$

لأن: $-1 < \frac{1}{2} < 1$

التمرين 29

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4u_n} \end{cases}$$

❶ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$$

❷ ادرس اتجاه تغير (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

❸ (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$$

① بين أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

② اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n

③ عين $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$.

❹ عين بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$$

حل التمرين 29

❶ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$\frac{3}{2} \leq u_0 \leq 3 \Rightarrow \left[\frac{3}{2} \leq 3 \leq 3\right] \ldots (*)$$

- نفرض أن $\left(\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3\right)$ ونثبت أن $\left(\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 3\right)$:

لدينا:

$$\frac{3}{2} \le u_n \le 3 \Rightarrow 6 \le 4u_n \le 12$$
$$\Rightarrow \frac{1}{12} \le \frac{1}{4u_n} \le \frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{4} \le \frac{9}{4u_n} \le \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \le -\frac{9}{4u_n} \le -\frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{2} \le 3 - \frac{9}{4u_n} \le \frac{9}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{2} \le u_{n+1} \le \frac{9}{4}$$
$$\Rightarrow \left[\frac{3}{2} \le u_{n+1} \le 3\right] \dots (*)$$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع: من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{\frac{3}{2} \le u_n \le 3}$$

❷ دراسة اتجاه تغير (u_n) ، ثم استنتاج أنها متقاربة:

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{9}{4u_n} - u_n$$
$$= \frac{12u_n - 9 - 4(u_n)^2}{4u_n}$$

لدينا: $4u_n > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط

$$12u_n - 9 - 4(u_n)^2 = 0$$
$$\Delta = 12^2 - 4(-4)(-9) = 0$$

ومنه:

$$u_n = \frac{-12}{2(-4)} = \frac{3}{2}$$

ومنه:

$$12u_n - 9 - 4(u_n)^2 = 0 \Rightarrow \left(u_n - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{2}$$

u_n	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	$+$	0	$-$

ومنه (u_n) **متناقصة** تماما على المجال $\left]\frac{3}{2}; 4\right[$

- الاستنتاج:

لدينا (u_n) متناقصة تماما $]4\,;\frac{3}{2}[$ ومحدودة من الأسفل بـ $\frac{3}{2}$ فهي متقاربة

3

① تبيين أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2}{2u_{n+1}-3} \\ &= \frac{2}{2\left(3-\frac{9}{4u_n}\right)-3} \\ &= \frac{2}{\frac{24u_n-18-12u_n}{4u_n}} \\ &= \frac{8u_n}{12u_n-18} \\ &= \frac{4u_n}{6u_n-9} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2u_n}{2u_n-3}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2u_n-3+3}{2u_n-3}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2u_n-3}{2u_n-3}+\frac{3}{2u_n-3}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(1+\frac{3}{2u_n-3}\right) \\ &= \frac{2}{3}+\frac{2}{2u_n-3} \\ &= \frac{2}{3}+v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = \frac{2}{2u_0-3} = \frac{2}{3}$$

ومنه (v_n) متتالية **حسابية** أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $\frac{2}{3}$

② كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n :

$$v_n = \frac{2}{3}+\frac{2}{3}n \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{2}{3}(n+1)}$$

ولدينا:

$$v_n = \frac{2}{2u_n-3} \Rightarrow 2v_nu_n - 3v_n = 2$$

$$\Rightarrow 2v_n u_n = 2 + 3v_n$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{2 + 3v_n}{2v_n}$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{2 + 3\frac{2}{3}(n+1)}{2\frac{2}{3}(n+1)}$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{3 \times 2(n+2)}{4(n+1)}$$
$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{3(n+2)}{2(n+1)}}$$

③ تعيين $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n}{2n}\right)$$
$$= \boxed{\frac{3}{2}}$$

❹ تعيين بدلالة n المجموع S_n:

لدينا:

$$v_n = \frac{2}{2u_n - 3} \Rightarrow 2u_n v_n - 3v_n = 2$$
$$\Rightarrow u_n v_n = \frac{2 + 3v_n}{2}$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{3}{2}v_n$$

ومنه

$$S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$
$$= 1 + \frac{3}{2}v_0 + 1 + \frac{3}{2}v_1 + \cdots + 1 + \frac{3}{2}v_n$$
$$= 1(n+1) + \frac{3}{2}(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$$
$$= n + 1 + \frac{3}{2}\left(\left(\underbrace{\frac{2}{3}(n+1)}_{v_n} + \underbrace{\frac{2}{3}}_{v_0}\right)\frac{\overbrace{n+1}^{n-0+1}}{2}\right)$$
$$= (n+1) + \frac{3}{2}\left(\left(\frac{2}{3}(n+2)\right)\frac{n+1}{2}\right)$$

الخليل للرياضيات

$$= (n+1) + \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$
$$= (n+1)\left(1 + \frac{n+2}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{n+4}{2}\right)$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}(n+1)(n+4)}$$

التمرين 30

❶ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$1 \le u_n \le 2$$

② بين أن (u_n) متزايدة، ماذا تستنتج ؟

❷ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \ln(u_n - 1)$$

① بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

② اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

❸ عين نهاية المتتالية (u_n).

حل التمرين 30

❶

① البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \le u_n \le 2$:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$1 \le u_0 \le 2 \Rightarrow 1 \le \frac{3}{2} \le 2 \ldots (*)$$

- نفرض أن $(1 \le u_n \le 2)$ ونثبت أن $(1 \le u_{n+1} \le 2)$:

لدينا:

$$1 \le u_n \le 2 \Rightarrow 0 \le u_n - 1 \le 1$$
$$\Rightarrow 0 \le \sqrt{u_n - 1} \le 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1+\sqrt{u_n-1} \leq 2$$
$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2 \dots (**)$$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع: من $(*)$ و $(**)$ نجد أن:

$$\boxed{1 \leq u_n \leq 2}$$

② تبيين أن (u_n) متزايدة:

لدينا:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{u_n-1}}{u_n}$$

ولدينا:

$$1+\sqrt{u_n-1} > \sqrt{u_n-1}$$

ولدينا:

$$\sqrt{u_n-1}-u_n = \frac{(\sqrt{u_n-1}-u_n)(\sqrt{u_n-1}+u_n)}{\sqrt{u_n-1}+u_n}$$
$$= \frac{u_n-1+u_n\sqrt{u_n-1}-u_n\sqrt{u_n-1}-(u_n)^2}{\sqrt{u_n-1}+u_n}$$
$$= \frac{u_n-1-(u_n)^2}{\sqrt{u_n-1}+u_n}$$

لدينا $\left(\sqrt{u_n-1}+u_n > 0\right)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط

$$u_n-1-(u_n)^2 = 0$$
$$\Delta = 1^2-4(-1)(-1) = -3 < 0$$

ومنه:

$$\sqrt{u_n-1}-u_n < 0 \Rightarrow \sqrt{u_n-1} < u_n$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u_n-1}} > \frac{1}{u_n}$$

ولدينا سابقا:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{u_n-1}}{u_n} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{\sqrt{u_n-1}}{u_n}$$
$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{\sqrt{u_n-1}}{\sqrt{u_n-1}} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

اذن المتتاليه (u_n) **متزايدة** تماما على $\mathbb{N}$.

الخليل للرياضيات

- الاستنتاج:

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ، ومحدودة من الأعلى فهي $\boxed{\text{متقاربة}}$.

③ تبيين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1} - 1) \\ &= \ln\left(1 + \sqrt{u_n - 1} - 1\right) \\ &= \ln\left((u_n - 1)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n - 1) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_0 &= \ln(u_0 - 1) \\ &= \ln\left(\frac{3}{2} - 1\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\ln 2 \end{aligned}$$

④ كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = -\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \boxed{v_n = -\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} v_n = \ln(u_n - 1) &\Rightarrow e^{v_n} = u_n - 1 \\ &\Rightarrow u_n = e^{v_n} + 1 \\ &\Rightarrow u_n = e^{-\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 \\ &\Rightarrow u_n = \left(e^{\ln(2)}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 \\ &\Rightarrow u_n = 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 \\ &\Rightarrow \boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1} \end{aligned}$$

⑤ تعيين نهاية المتتالية (u_n):

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}(u_n) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}_{0} + 1\right) \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►