دروس الدعم والتفوق في مادة الرياضيات -الجزائر

دفاتر التكوين في الرياضيات والاستعداد الجيد للتفوق في شهادة البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي شعبة الرياضيات و تقني رياضي و العلوم التجريبية

Bac 2022

الدفتر 01

المحور : الدوال العددية لمتغير حقيقي

النجاح علم و هندسة

النهايات والسلوك التقاربي لدالة

1/ ملخص شامل للدرس

2/ تمارين للتمكن من أساسيات الدرس

3/ نحو البكالوريا : نماذج امتحانات وبكالوريات وطنية وأجنبية

إعداد: الأستاذ حليلات عمار مكون ثانوي في مادة الرياضيات

الدفتر 01 :النهايات و التفسيرات الهندسية

الدفتر 02 :الاستمرارية ومبرهنة القيم المتوسطة

الدفتر 03 : الاشتقاقية و تطبيقاتها

الدفتر 04 :الدالة الأسية النيبيرية و المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

الدفتر 05 :دالة اللوغاريتم النيبيري والتزايد المقارن وتتمات

الدفتر 06 :الدوال الأصلية والحساب التكاملي وتطبيقاته في حساب المساحات

الدفتر 07 :المتتاليات العددية و البرهان بالتراجع

الدفتر 08 :الاحتمالات و التحليل التوفيقي

الدفتر 09 :الأعداد المركبة و التحويلات النقطية

الدفتر 10 :بكالوريات تجريبية و مراجعات شاملة

بسم الله الرحمان الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على سيدنا محمد خاتم الأنبياء والمرسلين

المقدمة

بداية نتوجه إلى خالقنا بالحمد والثناء الذي وفقنا إلى تحقيق هذا العمل بكل ما وهبنا من قوة العقل والإرادة.

وبتوفيق من الله وحده ، يسرني أن أضع هذا العمل المتواضع بين أيدي تلاميذنا الأعزاء و زملائنا الأساتذة الكرام ،راجيا أن يجدوا فيه ما يعينهم للاختيار تمارين ونماذج امتحانات وملخصات شاملة للدروس وقسمتها إلى دفاتر، كل دفتر مكون من :

الدفتر

- ملخص شامل ومتجدد للدرس
- تمارين هادفة للتمكن من الدرس
- نحو البكالوريا :نماذج امتحانات وبكالوريات وطنية و أجنبية

ووصيتي :-إعادة الدرس والتمكن من المعارف والكفاءات

- المحاولة ثم المحاولة في التمارين ومراجعة الأستاذ في التصحيح

-**الجزء نحو البكالوريا** هام جدا اجتهد في حل جميع النماذج فهي تجعلك تكتسب كفاءة عالية ومميزة لمعالجة امتحان البكالوريا

-الملخص اجتهدت أن يكون شامل ومرجعي للطالب

- -صممت التمارين والتداريب وفقا للمناهج الجديدة لوزارة التربية الوطنية و اختيرت التمارين من الكتاب المدرسي ونماذج بكالوريات وطنية وأجنبية .

ونسعى إلى الوصول بالتلميذ إلى تحقيق الأهداف التالية:

1-اكتساب معارف صحيحة والتدريب على الاستدلال المنطقي والتحرير الرياضي للوصول إلى النتائج المستهدفة

2-اختبار مكتسباته من خلال تمارين هادفة

3-اكتساب كفاءة عالية ومميزة لمعالجة امتحان البكالوريا

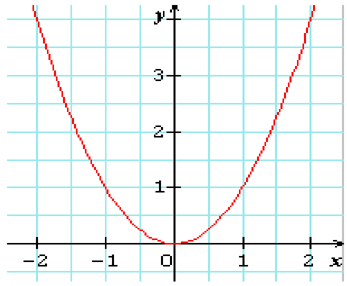
رغم كل ما بذل من جهد ــ لا يخلو هذا العمل من بعض النقائص و الهفوات ، نسعد جدا بكل ملاحظة ونأخذها بعين الاعتبار في الطبعة القادمة.

أهدي هذا العمل المتواضع إلى روح والدي الطاهرة وإلى روح والدتي الطاهرة تغمدهما الله برحمته الواسعة و اسكنهما فسيح جنانه ولأفراد أسرتي وكل إخواني ولأسرة التربية الوطنية بالجزائر الحبيبة التي أعطتنا الكثير ونأمل أن نسدي لها ولو قليلا مما تستحقه جزائرنا العظيمة

ملخص هام وشامل لدرس النهايات

1 .نهايات الدوال المرجعية

:يبرهن أن و حاول من التمثيلات البيانية للدوال المرجعية تستنبط مايلي :

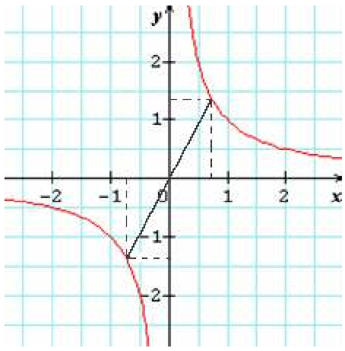


(C) هو منحنى الدّالة مربّع

معادلة (C) هي : $y = x^2$

يسمّى (C) قطعا مكافئا ذروته O

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$



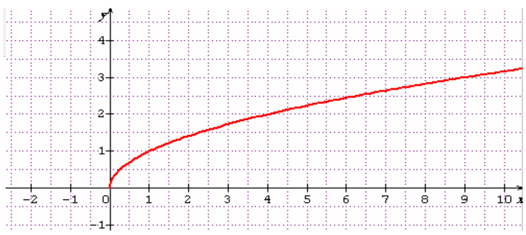
بما أنّ 0 ليس له صورة بالدّالة مقلوب ، فإنّ منحنيها لا يقطع محور التّراتيب .

يسمّى المنحنى الممثل للدّالة "مقلوب" قطعا زائدا.

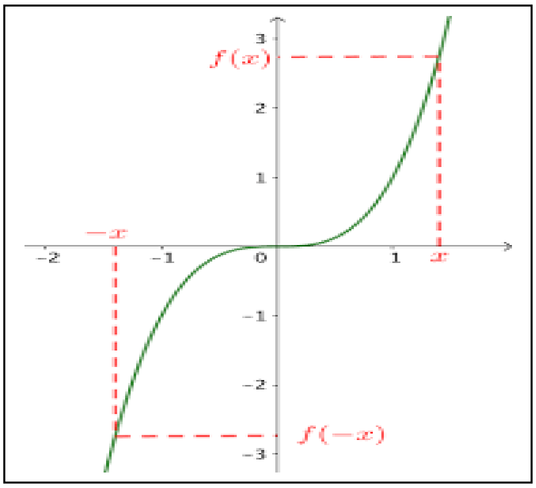
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{\substack{x\to0\\<}} \frac{1}{x} = -\infty \text{ و}$$

$y = \sqrt{x}$



$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$



$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

نتيجة

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n = 2k \\ -\infty & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \text{ و}$$

2.تعاريـف : نكتفي بإعطاء بعض التعاريف وبطريقة مماثلة يمكن الحصول على التعاريف الأخرى

• القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x>B$ يكون $f(x)>A$ و نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

أي بمعنى : يمكننا جعل $f(x)$ كبيرا بالقدر الذي نريد بشرط x كبير بالقدر الكافي .

مثال :أثبت أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2}=+\infty$

•القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0<|x-x_0|<\alpha$ يكون $0\leq|f(x)-l|<e$ و نكتب:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

أي بمعنى : يمكننا جعل $f(x)$ قريبا من l بالقدر الذي نريد بشرط x قريب من x_0 بالقدر الكافي

مثال : أثبت أن: $\lim\limits_{x\to 2}(4x-1)=7$

3.العمليات على النهايات : f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. يبرهن أن:

• نهاية مجموع دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

• نهاية جداء دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))$	$l\times l'$	∞ حسب قاعدة الإشارات	∞ حسب قاعدة الإشارات	ح ع ت

• نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	∞	$l\neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	∞	l'	0	0	∞
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	∞ حسب قاعدة الإشارات	∞ حسب قاعدة الإشارات	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها المبرهنات السابقة من استنتاج النهاية بحالات " عدم التعيين "
(ح ع ت) ومنه نستنتج في العمليات العادية الثلاثة (الجمع ، الجداء ، القسمة) لدينا أربع حالات عدم التعيين

وهي : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty\times 0, +\infty-\infty$

-وفي الحالة $f(x)^{g(x)}$ لدينا ثلاث حالات عدم تعيين وهي : $\infty^0, 0^0, 1^\infty$

4.نهايات دوال مألوفة و قواعد إجرائية : قواعد إجرائية (يبرهن و تستعمل مباشرة في التطبيقات)

1 النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة.

مثال : $\lim_{x\to-\infty}(-x^3+3x^2-4x+3)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$

2 النهاية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

مثال : $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x^2-3x+4}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$

3 f دالة كثير حدود للمتغير الحقيقي x ، a عدد حقيقي . $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

4 $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ و $\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$

5 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (تبرهن بالحصر)

5.نهاية دالة مركبة :

1−4 مبرهنة: a، b و c تمثل أعددا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f=v\circ u$.
إذا كانت $\lim_{x\to a}u(x)=b$ و إذا كانت $\lim_{x\to b}v(x)=c$ فإن $\lim_{x\to a}f(x)=c$

أمثلة : $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)=؟$ ، $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{3x+1}}=؟$

2−4 نهاية الدالة الجذر التربيعي لدالة : f دالة عددية موجبة في جوار لـ x_0 و l عدد حقيقي موجب

إذاكانت $\lim_{x\to x_0}f(x)$ هي	تكون $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}$ هي
l	$\sqrt{l}$
$+\infty$	$+\infty$

6.النهايات بالمقارنة :

f، g و h دوال عددية معرفة ،على الأقل ، على المجموعة $D=]x_0-\alpha;x_0[\cup]x_0;x_0+\alpha[$:

يبرهن و نقبل :

* **مبرهنة الحد من الأسفل :** إذا كان من أجل كل عنصر x من D : $g(x)\le f(x)$ و كانت $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ فإن : $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

* **مبرهنة الحد من الأعلى :** إذا كان من أجل كل عنصر x من D : $f(x)\le g(x)$ و كانت $\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$ فإن : $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

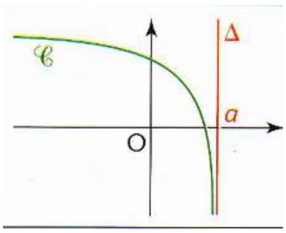
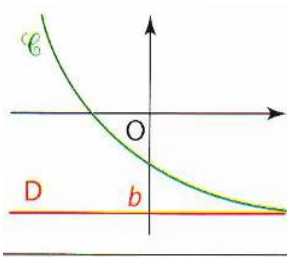
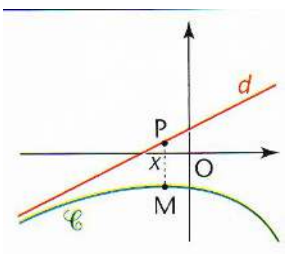
* **مبرهنة الحصر :** إذا كان من أجل كل عنصر x من D : $g(x)\le f(x)\le h(x)$

و كانت $\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=l$ فإن : $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$

مثال : احسب $\lim_{x\to+\infty} x^2.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

7.التفسير البياني و السلوك التقاربي لدالـة :

* a و b عددان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

النهاية	المستقيم المقارب(تفسير بياني)	التمثيل البياني
$\lim_{\substack{> \\ x\to a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{\substack{< \\ x\to a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{\substack{> \\ x\to a}} f(x)=-\infty$ أو $\lim_{\substack{< \\ x\to a}} f(x)=-\infty$	المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=a$ و الموازي لمحور التراتيب مستقيم مقارب للمنحني (C)	
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$	المستقيم (D) ذو المعادلة $y=b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	
$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ أو $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ أو $\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$	المستقيم (d) ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	

• **ملاحظات :**

1 – إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ أو $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$ فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة $(a\neq0)$ $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f

2 – لدراسة وضعية المنحني (C) الممثل لدالة f بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $\left[f(x)-(ax+b)\right]$.

إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ تكون وضعية (C) تحت المستقيم المقارب المائل.

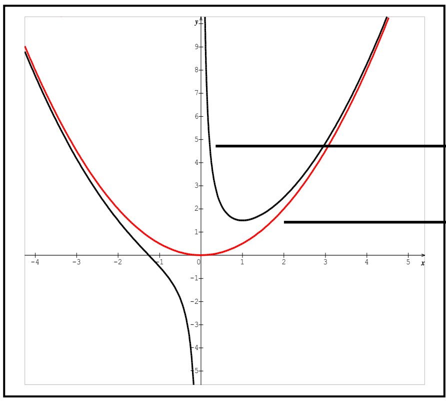
إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ تكون وضعية (C) فوق المستقيم المقارب المائل

3 - ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=ax+b$ $(a\neq0)$ يكون المستقيم (Δ) مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) إذا و فقط إذا تحقق ما يلي: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$

(على الترتيب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=b$)

4 – (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g في معلم . (C_f) و (C_g) **منحنيان متقاربان** إذا وفقط إذا تحقق: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ أو $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=0$

مثال : $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}$

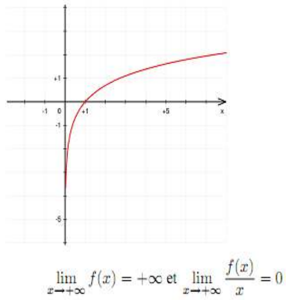
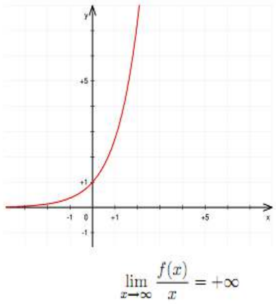
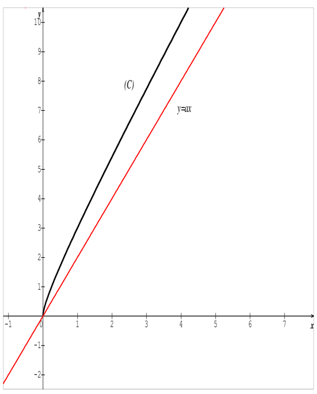


(C) : $y=f(x)$

(Ω): $y=\frac{1}{2}x^2$

(C) و (Ω) متقاربان عند $+\infty$ و عند $-\infty$

5 (إضافة حسنة) - (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم .

النهاية	(تفسير بياني)	التمثيل البياني
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ (على الترتيب $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$)	(C_f) يقبل فرعا مكافئا في اتجاه محور الفواصل عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)	
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ (على الترتيب $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$)	(C_f) يقبل فرعا مكافئا في اتجاه محور التراتيب عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)	
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\infty$ (على الترتيب $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=\infty$)	(C_f) يقبل فرعا مكافئا في اتجاه المستقيم الذي معادلته : $y=ax$ عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)	

8.ملاحظات و طرائق : في هذا الموضوع أهم الكفاءات التي يركز عليها الطالب هي :

1-التحكم في حساب النهايات و تعلم طرائق رفع حالات عدم التعيين

حساب نهاية

إذا كانت موجودة قاعدة إجرائية أو خاصية لحساب هذه النهاية تستعمل مباشرة

(مثال نهاية كثير حدود عند $+\infty$ او $-\infty$ ، ....)

إذا كانت غير موجودة قاعدة إجرائية أو خاصية لحسابها

تستعمل المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات (مجموع دالتين ، ......)

إذا كانت ليست حالة من حالات عدم التعيين ، نحصل على نتيجة النهاية

مثال : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \dfrac{2x+3}{x^2+x-2}$

إذا كانت حالة من حالات عدم التعيين

نفكر في رفعها بخبرة و حسب نوع الحالة

من الطرائق لرفع حالة عدم تعيين :

– إخراج عامل مشترك (العنصر المسيطر،..) مثال : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x-2\sqrt{x}-3\right)$

–التحليل و الاختزال **مثال :** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$

– استعمال العبارة المرافقة **مثال:** $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

– **استعمال تعريف العدد المشتق** : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ أو

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ **مثال** : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x\sqrt{4x+1}-6}{x-2}$ ،

–تبديل المتغير لإبراز أو استعمال نهاية معلومة **مثال:** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ ، $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

–استعمال مبرهنات النهايات بالمقارنة **مثال :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x+\sin x}{x^2}$

2-التفسير البياني و السلوك التقاربي وتعيين المستقيمات المقاربة لمنحني و القدرة على رسم المنحني الممثل لدالة اي ترجمة جداول التغيرات و القراءة البيانية

مثال 01

اليك جدول تغيرات الدالة f و المطلوب رسم المنحنــي (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس إذا علمت ان :

$$C_f \cap (y=0) = \{(-6;0),(0;0),(4;0),(7;0)\}$$

x	$-\infty$		-4		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5

مثال02

اليك جدول تغيرات الدالة f وليكن المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس إذا علمت ان:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-y_D\right]=0$ و D المستقيم الذي

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)-y_{(D)}$		$+$	0	$-$	

- مستعينا بالنتائج السابقة ارسم بعناية D ، (C_f)

تمارين للتمكن من حساب النهايات و التفسيرات الهندسية

التمرين 01

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+x-2}$

1. حدد حسب قيم x إشارة x^2+x-2.
2. أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1 وفسّر النتائج بيانيا.
3. أدرس نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ثم فسّر النتائج بيانيا.

التمرين 02

في كل حالة من الحالات التالية عيّن اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f ثم احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها وعيّن معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني الممثل للدالة f.

1) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+2}{x^2+4x}$ ، 2) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$ ، 3) $f(x)=\dfrac{-4x+8}{x^2-4x+5}$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$ ، 5) $f(x)=2x+3-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ، 6) $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

التمرين 03

احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x+2}{x^3-3x^2-x+3}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{x-2}{4x+3}}$ ، 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-2\sqrt{x}\right)$ ، 7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$

8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$ ، 9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ ، 10) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

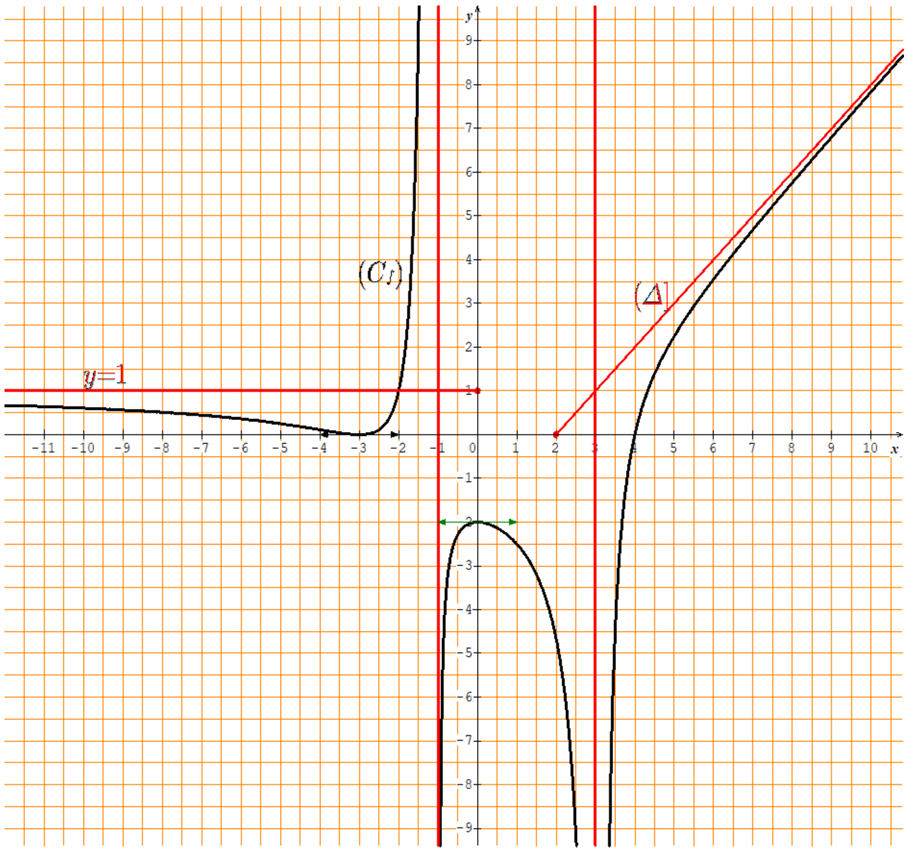
التمرين 04

باستعمال **تعريف العدد المشتق** احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{60}-1}{3x-3}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$ ، 5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{6x-\pi}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$

التمرين 05



الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,3\}$ ، C_f تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل)

بقراءة بيانية :

1) عيّن النهايات عند حدود مجموعة تعريفها
2) شكل جدول تغيراتها
3) حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$
4) عيّن معادلة ديكارتية للمستقيم المقارب المائل
5) ارسم المنحني الممثل للدالة g المعرفة كما يلي: $g(x)=-f(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها

التمرين 06

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ احسب $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

2/ احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

3/ أ) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=\alpha x+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

ب) استنتج أن المنحني C_f يقبل مستقيم مقارب مائل Δ يطلب إعطاء معادلة ديكارتيه له

جـ) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل Δ .

4/ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 فإن : $f'(x)=\dfrac{x(x^2+3x+4)}{(x+1)^3}$

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة ثم ارسم Δ و C_f

التمرين 07

اليك جدول تغيرات الدالة f وليكن المنحنـــي (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	0

إذا علمت ان: $f(0)=1$ و $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x^2\right]=0$

وليكن Γ المنحنى الممثل للدالة مربع : $x\to x^2$

المماس T للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها 3 معادلة ديكارتية له : $y=-2x+7$ و

x	0		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

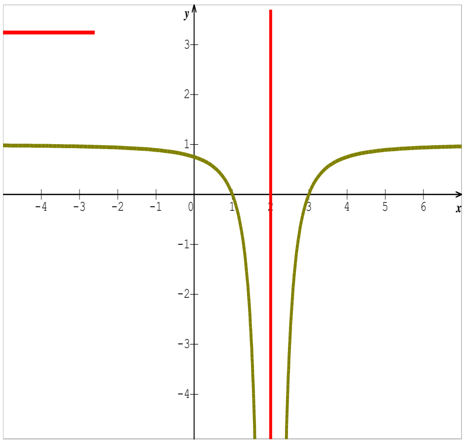
- **مستعينا بالنتائج السابقة ارسم**

بعناية T ، Γ ثم (C_f)

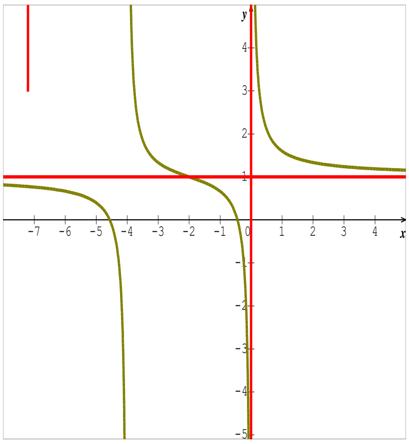
التمرين 08

في كل حالة من الحالات التالية عيّن D_f مجموعة التعريف والنهايات في حدود المجموعة D_f وشكل جدول التغيرات لكل دالة .

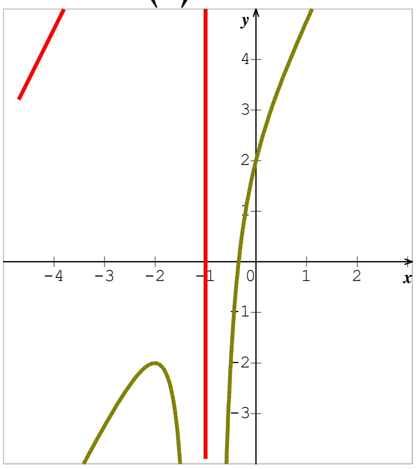
الحالة(1)



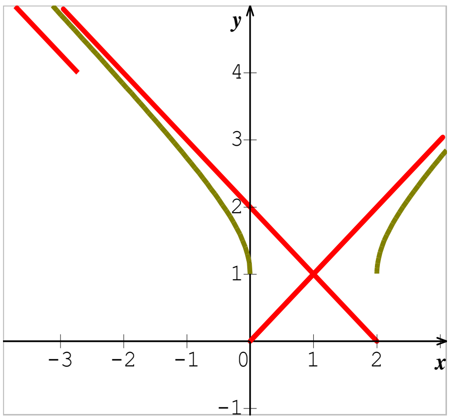
الحالة(2)



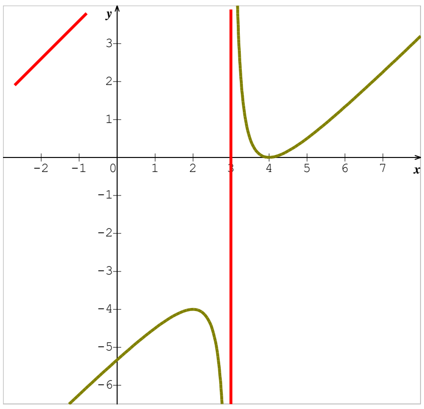
الحالة(3)



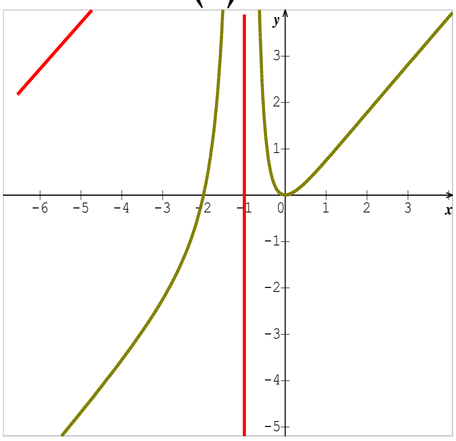
الحالة(4)



الحالة(5)



الحالة(6)



التمرين 09

لتكن f دالة معرفة على $D=[0;+\infty[$ حيث : $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا :

$$x^2 \le x^2+x+1 \le (x+1)^2 \quad \text{و} \quad x \le \sqrt{x^2+x+1} \le x+1$$

2) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا : $1-\dfrac{1}{x+1} \le f(x) \le 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

التمرين 10

باستعمال مبرهنات المقارنة احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\sin x}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x^2+1}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ،

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x+E\ x$ ، 5) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+E\ x$ ، حيث E هي دالة الجزء الصحيح

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin 3x-\cos 2x}{x}$ ، 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$ ، 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$

التمرين 11

احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ ، 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{bx}$ ، 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ،

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$ ، 9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{6\cos x-6\sqrt{3}\sin x}{6x-\pi}$ ، 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{2x}$

التمرين 12 (خاص بشعبة رياضيات و تقني)

I) احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2x\right)$ ، 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}+x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$ ، 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+2}}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3}$ ، 7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

II– عين العددين الحقيقين a و b بحيث يكون : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}-ax-b=0$

التمرين 13

1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ يكـون لدينا : $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$

2) استنتج النهايتين التاليتين : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1}\sqrt{x}$

التمرين 14

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{4x^2+1} - x$

1) أثبت أن : $\sqrt{4x^2+1} \geq 2x$ لكل $x \in \mathbb{R}^+$ ثم استنتج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2) احسب بطريقة أخرى ، $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

التمرين 15

اليك جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

والمطلوب رسم المنحنـــي (C_f) الممثل للدالة f

في معلم متعامد ومتجانس

إذا علمت ان : $1,2 \prec \alpha \prec 1,3$ و

$0,2 \prec f(\alpha) \prec 0,3$

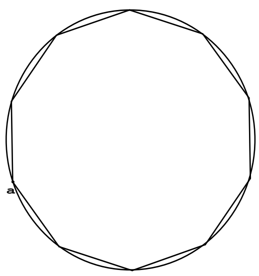
و $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$ و D المستقيم الذي معادلته : $y = x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - y_D$		$+$	0	$-$	

التمرين 16 (تمرين مسابقات)

هل تساءلت يوما لماذا مساحة قرص نصف قطره r هي : πr^2 ؟

إليك برهان من بين البراهين : خذ قرص نصف قطره r مركزه O و ارسم داخله مضلع منتظم مركزه O ذي n رأس بحيث رؤوسه تنتمي الى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r



1- بيّن أن مساحة المضلع تساوي : $\frac{1}{2} r^2 . n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

2- استنتج عندئذ مساحة القرص

نحو البكالوريا :التدريب المبكر لحل نماذج امتحانات وبكالوريات

التدريب 01

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بالعبارة : $f(x)=\dfrac{-x^2+4x}{x^2-4x+3}$

و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- بيّن أن اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f هي : $D_f=\mathbb{R}-\{1,3\}$

2-أ) احسب النهايات عند حدود D_f و فسّر النتائج بيانيا

ب) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي d

3-أ)بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f و أن : $f'(x)=\dfrac{-6x+12}{(x^2-4x+3)^2}$

ب)ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

4- أ) احسب إحداثيات نقط تقاطع المنحنى C_f مع حامل محور الفواصل

ب) أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $x=2$ محور تناظر للمنحنى C_f

5-اكتب معادلة المماس T للمنحنى C_f في النقطة ذات الفاصلة $x_0=4$.

6-ارسم المماس T و المستقيمات المقاربة ثم المنحنى C_f

7- g الدالة المعرفة بـــــ : $g(x)=|f(x)|$

- بيّن أن المنحنى (Γ) الممثل للدالة g يستنتج بسهولة من رسم المنحنى C_f -ارسم (Γ).

التدريب 02

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

نسمـي C_f المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

ب) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

2/ أ) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

ب) استنتج أن المنحنى C_f يقبل مستقيم مقارب مائل Δ يطلب إعطاء معادلة ديكارتيه له

جـ) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل Δ .

3/ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن : $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f

4/ بيّن أن النقطة $\omega(1;1)$ مركز تناظر للمنحنى C_f

5/ ارسم المستقيمات المقاربة ثم المنحنى C_f

6/ الدالة العددية h معرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{x^2-|x|+1}{|x|-1}$

أ) بيّن أن الدالة h زوجية

ب) اشرح كيف يتم إنشاء المنحنى C_h الممثل للدالة h انطلاقا من C_f ثم ارسم C_h

7/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^2-(1+m)(x-1)=0$

التدريب 03

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=-x+1+\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$

و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا ثم احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى C_f عند $+\infty$ و $-\infty$

جـ) ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

$$\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$$

2- الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=-x^3+6x^2-13x+8$

أ) بيّن ان g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

ب) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$

3- أ)بيّن أنه مهما يكن العدد الحقيقي x من D_f فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-2)^3}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها

4- بيّن أن التمثيل البياني C_f يقبل مماسا T موازيا للمستقيم (Δ)، ويطلب تعيين معادلة له.

5- أنشئ T ، (Δ) و C_f

6- الدالة العددية h معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي: $h(x)=f(-x)$

أ) اشرح كيف يتم إنشاء المنحنى C_h الممثل للدالة h انطلاقا من C_f

ب) ارسم C_h

7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=-x+m$

التدريب 04

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-1$ بـ

$$f(x)=\frac{-x^2-2x+7}{(x-1)^2}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها و فسّر النتائج بيانيا

2-أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f'(x)=\frac{4x-12}{(x-1)^3}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3-أ)ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي (D)

ب) احسب إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات .

4- أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f''(x)=\frac{-8x+32}{(x-1)^4}$

ب) بيّن أن المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثييها.

5-أ) اكتب معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة ذات الفاصلة $x_0=2$

ب) بيّن ان المماس T يقطع المنحني C_f في نقطة B يطلب تعيينها

6- أنشئ T و C_f

7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=-4x+m$.

التدريب 05

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2}$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أ) احسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا ثم احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2/ أ) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=x+\alpha+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

ب) استنتج أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له ثم حدّد وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى Δ .

3/ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 فإن: $f'(x)=\frac{x(x^2+3x-4)}{(x+1)^3}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

4/ ارسم Δ و المنحني C_f

5/ استعمل C_f ، عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$3x^2+(x-m)x^2+(10-2m)x+5-m=0$$

6/ g الدالة المعرفة بـــــ : $$g(x)=\frac{|x|^3+3x^2+10|x|+5}{(|x|+1)^2}$$

أ) بيّن أن الدالة g زوجية

ب) بيّن أن المنحني (Γ) الممثل للدالة g يستنتج بسهولة من رسم المنحني C_f ثم ارسم (Γ)

التدريب 06

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+3x-4$

1/احسب $g(1)$ وماذا تستنتج ؟

2/عيّن إشارة $g(x)$

الجزء الثانـي :نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x^2+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بيّن انّ من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ ،

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2) أ)بيّن ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .

3) أ)عيّن نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات

ب) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

الجزء الثالث :

h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\frac{x^3-3x^2+3x+1}{x^2-2x+2}$

أ-بيّن أن : $h(x)=f(x-1)+2$

ب-اشرح كيفية يتم رسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f)

جـ--استنتج معادلة للمستقيم Δ' المقارب المائل للمنحنى (C_h)

د- ارسم المستقيم Δ' والمنحنى C_h

التدريب 07

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$

نسمـي C_f المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

ب) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2/ أ) نسمي Γ المنحنى الممثل لدالة المربع ، احسب $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$ وفسّر النتيجة بيانيا

ب)ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمنحني Γ

2/ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0 فإن : $f'(x)=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3/ احسب $f(-1)$ و $f(-2)$ ثم ارسم Γ و (C_f) في نفس المعلم

4/ أ)اشرح كيف يتم رسم المنحنيين الممثلين للدالتين g و h انطلاقا من المنحنى C_f حيث :

$$g(x)=x^2+\frac{2}{|x|} \quad ، \quad h(x)=x|x|+\frac{2}{x}$$

ب) ارسم المنحنيين C_g و C_h

التدريب 08

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــالعبارة : $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x+2}$

a و b عددان حقيقيان . (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) عين العددين a و b بحيث المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A\left(0;\frac{7}{2}\right)$ مماسا يوازي محور الفواصل . ثم بين أن : $f(x)$ تكتب على الشكل : $f(x)=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$

2) أ) بين ان المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) يطلب إعطاء معادلته

ب)ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.

5) نسمي ω نقطة تقاطع المنحني (C_f) و (Δ) ، برهن أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f)

6) أ) عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω .

ب) بيّن انه من اجل كل عدد حقيقي x فإن : $y_T-f(x)=\frac{5(x+1)^3}{x^2+2x+2}$

جـ) عيّن عندئذ وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) وماذا تستنتج ؟

7) ارسم (T) و (Δ) ثم (C_f)

التدريب 09

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــالعبارة : $f(x)=\frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

a و b عددان حقيقيان . (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ)عين العددين a و b بحيث المنحنى (C_f) يشمل النقطة $A(0;3)$ ويقبل عندها مماسا معامل توجيهه 4

ب) بين أن : $f(x)$ تكتب على الشكل : $f(x)=3+\frac{4x}{x^2+1}$

2) أ)احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا

ب)ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) احسب $f(-x)+f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

4) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=3$

5) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن : $f''(x)=\frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

ب) بيّن أن المنحني C_f يقبل ثلاث نقط انعطاف يطلب تعيينها

6) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

7) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\frac{4|x|}{x^2+1}-3$

أ) ادرس شفعية الدالة h

ب) اشرح كيفية يتم رسم المنحني (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحني (C_f)

التدريب 10

بكالوريا شعبة تقني رياضي دورة 2010

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

1- بيّن أن الدالة f فردية

2- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

3- ادرس تغيرات الدالة f

4- أ) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

5- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

6- بيّن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$ ، ثم استنتج معادلة (D') المستقيم المقارب الألخر .

7-ارسم (D)و (D') و (C_f) في المعلم السابق.

8- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

أ-بيّن أن الدالة g زوجية .

ب-انطلاقا من (C_f) ارسم (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق .

الهدية

- تأمل في هذه المعادلة :

رغبة + إرادة + ممارسة + جهد منظم = متـعـة ونجاح بحول الله.

- أود أن أورد أمامك نص رسالة بعث بها بديع الزمان الهمذاني، الذي كان من أئمة عصره في الكتابة، إلى ابن أخت له كان ينفق عليه من ماله ليتعلم. كتب إليه:

" أنت ولدي ما دمت والدفتر أليفك والمحبرة حليفك، فإذا قصّرت، ولا أخالك، فغيري خالك، والسلام ".

- إذا كنتَ في قومٍ فصاحِب خِيارَهم *** ولا تصحبِ الأردى فتردى مع الرَّدِي

عن المرءِ لا تَسَلْ وسَلْ عن قرينهِ *** فكلُّ قريـنٍ بالمقارَن يقتدِي

قال علماؤنا :الآت العلم أربع :شيخ فتاح و عقل رجاح وكتب صحاح ومداومة وإلحاح

اقــــــرأ وتـــــأمل

يحكى ان الملك بطلميوس الأول سأل أقليدس ما إذا كانت هنالك أية كيفية لدراسة الهندسة (الرياضيات) أقصر من تلك الواردة في كتاب الأصول ...فكان الجواب

أنه **لا توجد طريقة ملكية** نحو الهندسة (الرياضيات) . إن الموقف لم يتغير طبعا : إذا أردت أن تكتسب مهارة تجعلك تتصرف بكياسة امام المسائل الهندسية فلا مفر من أن تنفق وقتا غير يسير في دراسة مبادئ الهندسة (الرياضيات) وأن تعرف كيف توصل الفحول في هذا الميدان إلى حل بعض المسائل النموذجية . تحاول في الوقت نفسه تقليد هؤلاء الفحول لحل مسائل قريبة من المسائل التي تطرقو إليها . وبقدر ما تكون محاولاتك كثيرة – كلاعب وليس كمتفرج – بقدر ماتكتسب ملكة تولد لديك حدسا يكون لك بمثابة دليل يقودك نحو حل المسائل الهندسية (رياضية) . ان معالم الطريق الذي يقود الى الحل غامضة ، غير الواضحة ، في الوهلة الأولى ، وقد يحتاج اكتشافها الى بذل مجهود كبير : تذكر ان الأفكار الجيدة تاتي متاخرة ، بل هي اخر ما يأتي!

I believe that good thing come to those who work

A comfort zone is a beautiful place, but nothing ever grows there.