دروس الدعم والتفوق في مادة الرياضيات -الجزائر

دفاترالتكوين في الرياضيات والاستعداد الجيد للتفوق في شهادة البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي شعبة الرياضيات و تقني رياضي و العلوم التجريبية

Bac 2022

الدفتر 02

المحور : الدوال العددية لمتغير حقيقي

النجاح علم و هندسة

الاشتقاقية و تطبيقاتها +الاستمرارية ومبرهنة القيم المتوسطة

1/ ملخص شامل للدرس

2/ تمارين للتمكن من أساسيات الدرس

3/ نحو البكالوريا : نماذج امتحانات وبكالوريات وطنية وأجنبية

إعداد: الأستاذ حليلات عمار مكون ثانوي في مادة الرياضيات

بسم الله الرحمان الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على سيدنا محمد خاتم الأنبياء والمرسلين

المقدمة

بداية نتوجه إلى خالقنا بالحمد والثناء الذي وفقنا إلى تحقيق هذا العمل بكل ما وهبنا من قوة العقل والإرادة.

وبتوفيق من الله وحده ، يسرني أن أضع هذا العمل المتواضع بين أيدي تلاميذنا الأعزاء و زملائنا الأساتذة الكرام ،راجيا أن يجدوا فيه ما يعينهم للاختيار تمارين ونماذج امتحانات وملخصات شاملة للدروس وقسمتها إلى دفاتر، كل دفتر مكون من :

الدفتر

- ملخص شامل ومتجدد للدرس
- تمارين هادفة للتمكن من الدرس
- نحو البكالوريا :نماذج امتحانات وبكالوريات وطنية و أجنبية

ووصيتي :-إعادة الدرس والتمكن من المعارف والكفاءات

- المحاولة ثم المحاولة في التمارين ومراجعة الأستاذ في التصحيح

-**الجزء نحو البكالوريا** هام جدا اجتهد في حل جميع النماذج فهي تجعلك تكتسب كفاءة عالية ومميزة لمعالجة امتحان البكالوريا

-الملخص اجتهدت أن يكون شامل ومرجعي للطالب

-صممت التمارين والتداريب وفقا للمناهج الجديدة لوزارة التربية الوطنية و اختيرت التمارين من الكتاب المدرسي ونماذج بكالوريات وطنية وأجنبية .

ونسعى إلى الوصول بالتلميذ إلى تحقيق الأهداف التالية:

1-اكتساب معارف صحيحة والتدريب على الاستدلال المنطقي والتحرير الرياضي للوصول إلى النتائج المستهدفة

2-اختبار مكتسباته من خلال تمارين هادفة

3-اكتساب كفاءة عالية ومميزة لمعالجة امتحان البكالوريا

رغم كل ما بذل من جهد ـــ لا يخلو هذا العمل من بعض النقائص و الهفوات ، نسعد جدا بكل ملاحظة ونأخذها بعين الاعتبار في الطبعة القادمة.

أهدي هذا العمل المتواضع إلى روح والدي الطاهرة وإلى روح والدتي الطاهرة تغمدهما الله برحمته الواسعة و اسكنهما فسيح جنانه ولأفراد أسرتي وكل إخواني ولأسرة التربية الوطنية بالجزائر الحبيبة التي أعطتنا الكثير ونأمل أن نسدي لها ولو قليلا مما تستحقه جزائرنا العظيمة

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

ملخص هام وشامل لدرس الاشتقاقية

1.تعاريـف :

تعريف (1) : f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على مجال مفتوح يشمل x_0.

نقول أن f تقبل الاشتقاق عند x_0 إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **نهاية محدودة لما يؤول** x إلى x_0. تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند x_0 و نرمز لها بالرمز $f'(x_0)$.

ملاحظات :

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ **تكافئ** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

(تنتج بوضع : $x - x_0 = h$)

2. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ **تكافئ** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

3. تكون الدالة f غير قابلة للاشتقاق من أجل x_0 إذا كانت النسبة $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ لا تقبل نهاية عند x_0 او إذا كانت نهايتها عند x_0 هي $(+\infty)$ او $(-\infty)$

تعريف (2) : f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على مجال من الشكل $[x_0, x_0+a[$

f **تقبل الاشتقاق عند** x_0 **من اليمين** يكافئ $l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1$.

يسمى العدد l_1 بـ العدد **المشتق من اليمين** للدالة f عند x_0 ونرمز له بـ : $f'_d(x_0)$

تعريف (3) : f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة على مجال من الشكل $]x_0-a; x_0]$

f **تقبل الاشتقاق عند** x_0 **من اليسار** يكافئ $l_2 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2$.

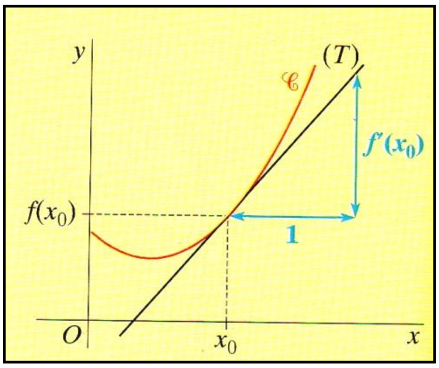
يسمى العدد l_2 بــ العدد **المشتق من اليسار** للدالة f عند x_0 ونرمز له بــ : $f'_g(x_0)$

خاصية : **تكون دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا قبلت هذه الدالة نفس العدد المشتق من اليمين و من اليسار .**

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

2.قابلية الاشتقاق و التفسير البياني :

2-1: التفسير الهندسي للعدد المشتق :



خاصية: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.
إذا قبلت f الاشتقاق عند x_0 فإن (C) يقبل عند النقطة $A(x_0\ ;\ f(x_0))$ مماسا (T) **معامل توجيهه** $f'(x_0)$
معادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

تطبيق 01

ادرس قابلية اشتقاق الدوال التالية عند القيمة a وعيّن العدد المشتق $f'(a)$ ثم اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة a ثم ارسم المماس (T) و المنحني (C_f) في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

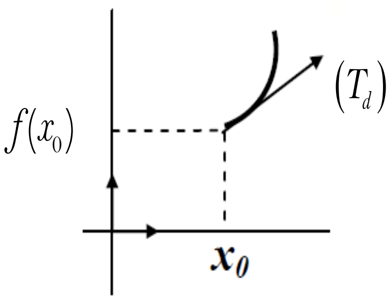
1) $f(x)=1+\sqrt{x+1}$ ، $a=3$ ، 2) $f(x)=3+\dfrac{1}{x+1}$ ، $a=2$

2-2: التفسير الهندسي للعدد المشتق من اليمين و للعدد المشتق من اليسار:

f دالة تقبل الاشتقاق عند x_0 من اليمين و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

* $f'_d(x_0)$: معامل توجيه نصف مماس من اليمين للمنحني (C_f) عند النقطة $A(x_0\ ;\ f(x_0))$

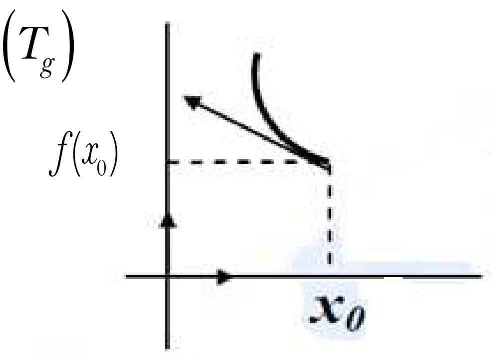
و معرف بالجملة : $(T_d):\begin{cases} y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x\geq x_0 \end{cases}$



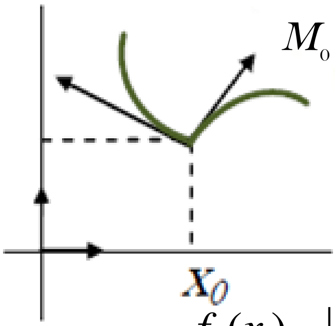
f دالة تقبل الاشتقاق عند x_0 من اليسار و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

* $f'_g(x_0)$: معامل توجيه نصف مماس من اليسار للمنحني (C_f) عند النقطة $A(x_0\ ;\ f(x_0))$

و معرف بالجملة : $(T_g):\begin{cases} y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x\leq x_0 \end{cases}$



اعداد الأستاذ:
حليلات عمار



ملاحظة: إذا كان التمثيل البياني للدالة f يقبل في النقطة $M_0\left(x_0 ، f(x_0)\right)$ نصف مماس من اليمين ونصف مماس من اليسار ، معاملا توجيههما مختلفين فإن النقطة M_0 تدعى نقطة زاوية

أي : $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$

تطبيق 02 f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=|x-2|+\dfrac{1}{x-1}$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0=2$.فسر النتيجة بيانيا و أكتب معادلتي نصفي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-2$.

2/ أ) احسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

ب) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

جـ) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-(x-2)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)+x-2$ ثم فسّر النتيجتين هندسيا

3/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ أ) احسب $f\left(\dfrac{1}{2}\right), f(0)$ ثم ارسم (Δ_1) ، (Δ_2) و المستقيمات المقاربة المنحني C_f ثم المنحني C_f

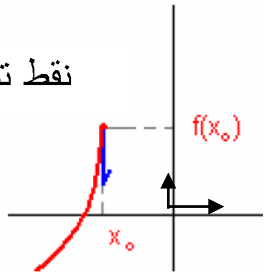
* 2-3 : التفسير الهندسي لـ : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$

إذا كان الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند القيمة x_0 و كانت $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$ فإن

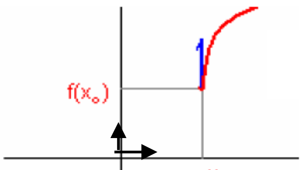
المنحني (C_f) يقبل عندالنقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا (او نصف مماس) موازيا لحامل محور التراتيب.

أمثلة :

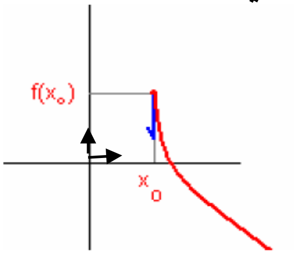
نقط توقف



$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$

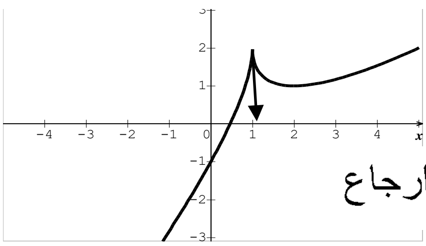


$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$



$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

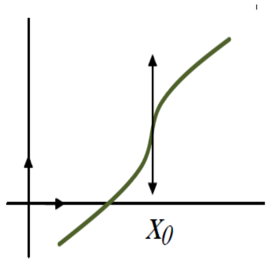


نقطة ارجاع

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$

نقطة انعطاف

(عمودية)



تطبيق 03

f الدالة المعرفــة على $[1;+\infty[$ بــ: $f(x)=a+b\sqrt{x-1}$

وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل لدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1- عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(2;0)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $\frac{1}{2}$

نفرض في ما يلي: $a=-1\ ,b=1$

2-ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0=1$ ثم فسّر النتيجة بيانيا

3- أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4-استنتج انه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى دالة مرجعية ثم ارسم (C) و (C_f)

3.حساب المشتقات :

1-3 . مشتقات دوال مألوفة

$f(x)$	$f'(x)$	مجالات قابلية الاشتقاق
k (حيث k ثابت حقيقي)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

3 −2 . المشتقات والعمليات على الدوال

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ ⟵ (الدالة v لا تنعدم على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

3−3. مشتقة الدالة المركبة $v\circ u$

مبرهنة إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v\circ u$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I:

$$(v\circ u)'(x)=v'[u(x)]\times u'(x)$$

3−4.نتائج :

1 إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$و كانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا:

$$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

2 إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I و لدينا:

$$\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$$

3 إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ ولا تنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I و لـديناـ :

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

4 إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة $\sin u$ و الدالة $\cos u$ يقبلان الاشتقاق على I بحيث :

$$(\sin u)'=u'.\cos u$$
$$(\cos u)'=-u'.\sin u$$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

تطبيق 04

1)احسب الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية مبيّنا المجموعة التي تجري الحسابات عليها

أ) $f(x)=\left(x^2+2x-3\right)^3$ ، ب) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$

جـ) $f(x)=2x+3-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ ، د) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$

تطبيق 05 1) أحسب الدالة المشتقة للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

2) استنتج الدالة المشتقة لكل من الدوال المقترحة التالية :

أ) $g:x\mapsto\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$. ب) $h:x\mapsto\dfrac{x^4+1}{x^2-1}$. ج) $u:x\mapsto\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$. د) $v:x\mapsto\dfrac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$.

4.المشتقات المتتابعة :

تعاريف: f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

إذا قبلت الدالة f' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بالرمز f''. إذا قبلت الدالة f'' هي الأخرى الاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة $(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة للدالة f و نرمز لها بالرمز f'''.

تسمى الدوال f' ، f'' ، f''' ،...، $f^{(n)}$ ،... المشتقات المتتابعة للدالة f.

الكتابة التفاضلية : نصطلح الصياغة التفاضلية التالية: $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ أو $dy=f'(x)dx$.

يستعمل هذا الترميز في العلوم الفيزيائية و بصفة عامة نكتب: $\dfrac{df}{dx}$ بدلا من f'

و $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ بدلا من f'' و هكذا $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ بدلا من $f^{(n)}$.

5.تطبيقات الاشتقاقية :

5-1 اتجاه تغير دالة:

مبرهنة f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

* **إذا كان من أجل كل x من I**، $f'(x)\geq 0$ (المعادلة $f'(x)=0$ تقبل عدد منته من الحلول) ، فإن الدالة f **متزايدة تماما** على I.

* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)\leq 0$ (المعادلة $f'(x)=0$ تقبل عدد منته من الحلول) ، فإن الدالة f **متناقصة تماما** على I.

* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)=0$ فإن الدالة f **ثابتة** على I.

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

5-2القيم الحدية المحلية:

تعاريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

*القول أن $f(x_0)$ **قيمة حدية محلية عظمى للدالة** f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\leq f(x_0)$.

*القول أن $f(x_0)$ **قيمة حدية محلية صغرى للدالة** f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\geq f(x_0)$

مبرهنة: f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f.

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

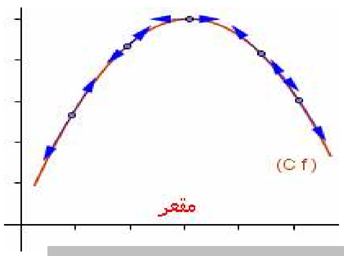
x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

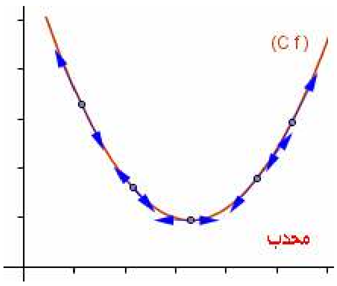
5-3نقط الانعطاف :

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I

– نقول إن المنحني (C_f) **محدب** إذا كان يوجد فوق جميع مماساته.

– نقول إن المنحني (C_f) **مقعر** إذا كان يوجد تحت جميع مماساته.



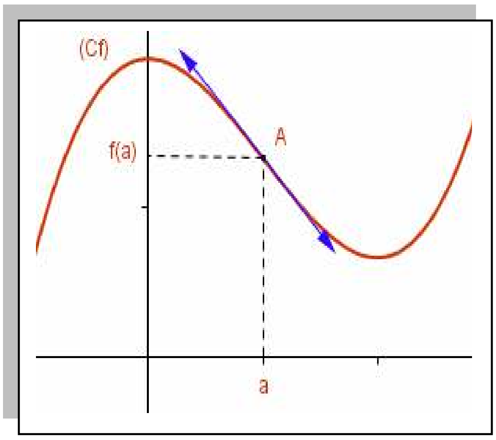


مبرهنة : لتكن f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I–إذا كان f'' موجبة على I فإن (C_f) يكون محدبا على I

إذا كان f'' سالبة على I فإن (C_f) يكون مقعرا على I

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

تعريف نقطة الإنعطاف :

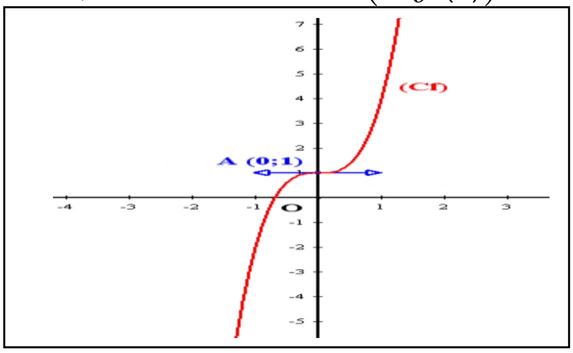


نقطة انعطاف من المنحني (C_f) هي النقطة التي يكون فيها المماس يخترق البيان (وضعية المنحني بالنسبة للمماس تتغير)

مبرهنة : لتكن f قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I. إذا انعدمت الدالة المشتقة الثانية f'' عند a مغيرة إشارتها فإن النقطة $A(a, f(a))$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

حالة خاصة : f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و a عدد حقيقي من I

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند a غير مغيرة إشارتها فإن $A(a, f(a))$ نقطة انعطاف أفقية للمنحني (C_f)

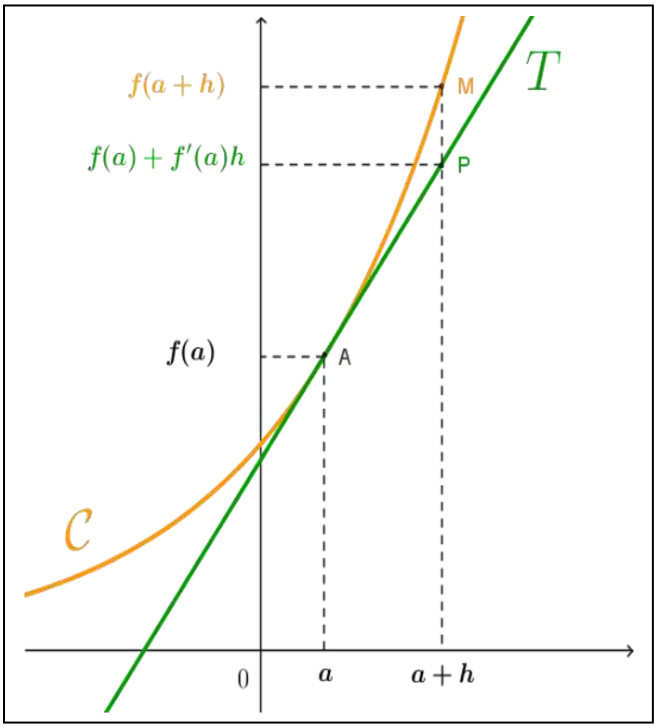


مثال : $f(x) = 3x^3 + 1$

$f'(x) = 9x^2$

f' تنعدم عند 0 و لا تغير إشارتها ومنه : $A(0, f(0))$ نقطة انعطاف أفقية للمنحني (C_f)

5-4 التقريب الخطـــــي :



C_f الرسم البياني للدالة f القابلة للاشتقاق عند القيمة a

التقريب الخطي (التآلفي)المحلي للدالة f عند a معناه.

إيجاد اقرب دالة تآلفيه للدالة f بجوار لـــــــ a

و احسن تقريب خطي (التآلفي) هو التقريب المماسي

ومنه :

في جوار لــ a لدينا :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

ونكتب أحيانا :

$$L(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

بوضع : $h = x - x_0$ ومن أجل $x \to x_0$ يكون $h \to 0$ وعليه من اجل h قريب من 0 يكون :

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

تطبيق 06

1) برّر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل الحالة من الحالات التالية :

أ) $(3+h)^3 \approx 27+27h$. ب) $\frac{1}{\sqrt{1+h}} \approx 1-\frac{h}{2}$. ج) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$. ، د) $\sin x \approx x$.

2) عيّن التقريب التآلفي للدالة f المعرفة بـــ $f(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$ عند النقطة $x_0=2$ ثم استنتج القيمة المقربة لـــ $\frac{-1}{0.998^2}$

ملخص هام وشامل لدرس الاستمرارية ومبرهنة القيم المتوسطة

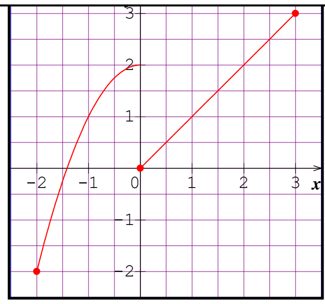
1/تعريف:

f دالة مجموعة تعريفها D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f.

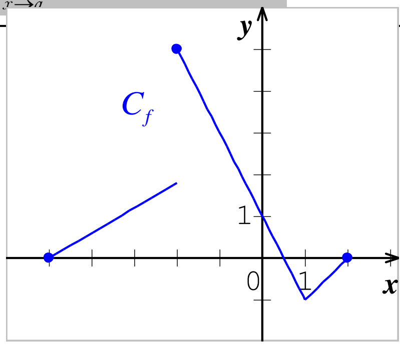
(أي f معرفة على مجال مفتوح يشمل a).

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

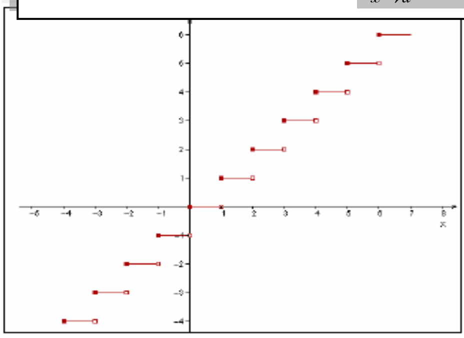
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ تكافئ : $\lim\limits_{x\underset{>}{\to} a} f(x)=\lim\limits_{x\underset{<}{\to} a} f(x)=f(a)$



الدالة غير مستمرة عند 0



الدالة غير مستمرة عند -2
و مستمرة عند 1



دالة الجزء الصحيح
(نموذج الدوال المتدرجة)

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \le x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[\ ]$.

ملاحظات :

1- f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل : $[a;a+\alpha[$.

تكون الدالة f **مستمرة عند a على اليمين** إذا وفقط إذا كانت : $\lim\limits_{x\underset{>}{\to} a} f(x)=f(a)$

2- f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل : $]a-\alpha;a]$.

تكون الدالة f **مستمرة عند a على اليسار** إذا وفقط إذا كانت : $\lim\limits_{x\underset{<}{\to} a} f(x)=f(a)$

3- تكون دالة f **مستمرة عند a** إذا وفقط إذا كانت **مستمرة عند a على اليمين و على اليسار**

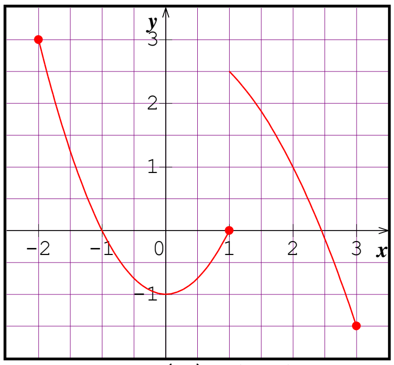
إعداد الأستاذ
حليلات عمار

2/الاستمرارية على مجال:

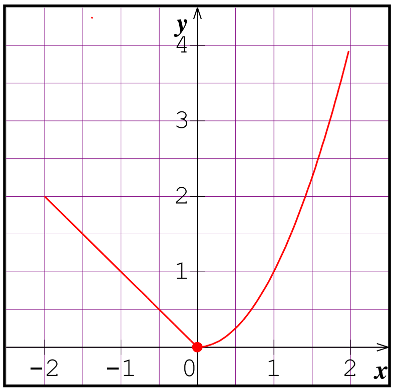
- تكون الدالة f مستمرة على المجال المفتوح I إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند كل قيمة x_0 من المجال I
- تكون الدالة f مستمرة على المجال $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت

– مستمرة على المجال المفتوح $]a,b[$ ومستمرة عند a على اليمين و مستمرة عند b على اليسار

التفسير البياني: تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد).



الشكل (1)



الشكل (2)

الدالة f الممثلة في الشكل(1) **غير مستمرة على المجال** $[-2;3]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.بينما الدالة f **مستمرة على كل من المجالين** $[-2;1]$ **و** $]1;3]$

الدالة f و الممثلة في الشكل(2) **مستمرة على المجال** $[-2;2]$ لأنه باستطاعتنا رسم تمثيلها البياني بدون رفع القلم.

3/العمليات على الاستمرارية :(مبرهنات ونتائج) يبرهن ونقبل بالنسبة للمستوى ما يلي:

1-3 : الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها

– دالة المربع : $x \to x^2$ مستمرة على $\mathbb{R}$

–دالة المقلوب : $x \to \dfrac{1}{x}$ مستمرة على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$

– دالة الجذر التربيعي : $x \to \sqrt{x}$ مستمرة على $[0;+\infty[$

– الدالتان : $x \to \sin x$ و $x \to \cos x$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.

– دالة القيمة المطلقة : $x \to |x|$ مستمرة على $\mathbb{R}$

اعداد الأستاذ:
حليلات عمار

2-3 : f وg دالتان مستمرتان عند x_0 و k عدد حقيقي .الدوال التالية : $f+g$ ، $f\times g$ ، kf مستمرة عند x_0 و إذا كان $g(x_0)\neq 0$ فإن الدالتين : $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ مستمرتان عند x_0

3-3 : استمرارية دالة مركبة

إذا كانت f مستمرة عند x_0 وكانت g مستمرة عند $f(x_0)$ فإن الدالة المركبة gof مستمرة عند x_0

4-3 نتائج :من المبرهنات السابقة نستخلص النتائج التالية :

1. كل دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$
2. الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها
3. الدالتان $x\to\sin(ax+b)$ و $x\to\cos(ax+b)$ مستمرتان على $\mathbb{R}$

*تقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

– أمثلة : 1/ الدالة $x\mapsto 2x^2-3x+4$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

2/الدالة $x\mapsto\frac{3x-2}{x^2-1}$ مستمرة على كل من المجالات $]-\infty;-1[$ ، $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$

3/ الدالة $x\mapsto\frac{2x^2+3x-1}{\sqrt{x-1}}$ مستمرة على $]1;+\infty[$.

4/ الدالة $x\mapsto(x^3+3x^2-x+4)\cos(2x+3)$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

4/الاستمرارية و قابلية الاشتقاق :

مبرهنة : كل دالة تقبل الاشتقاق عند قيمة x_0 فهي مستمرة عند x_0

والعكس غير صحيح مثال : الدالة $x\to|x|$ عند القيمة 0

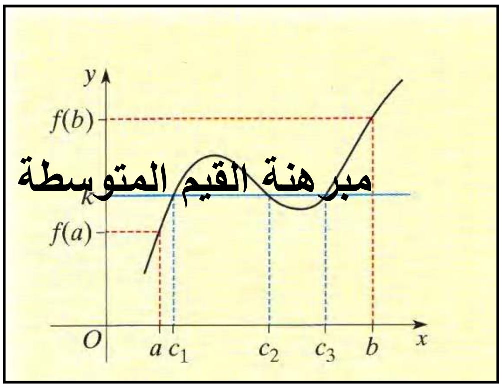
5/مبرهنة القيم المتوسطة

5-1 مبرهنة: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.

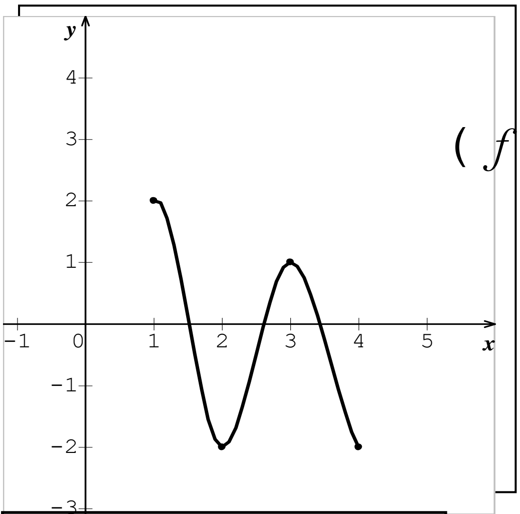
من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ،

يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b

حيث $f(c)=k$. ركز على فهم التفسير البياني لها

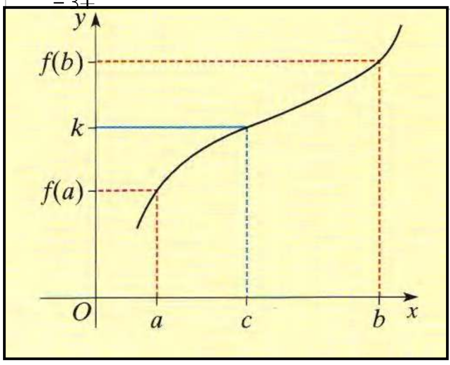


اعداد الأستاذ حليلات عمار



2-5 حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$
و كان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$)
فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b
بحيث $f(c)=0$
أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على $[a;b]$.

6/ الدوال المستمرة و الرتيبة تماما



مبرهنة: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ **تقبل حلا وحيدا** في

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما
على مجال $[a;b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ (العدد 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$)
فإنه يوجد عدد وحيد c محصور بين a و b بحيث $f(c)=0$

. ملاحظات ملاحظة1: إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a;b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين التاليين:

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$	k	$f(b)$

x	a	x_0	b
$f(x)$	$f(a)$	k	$f(b)$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[a;b]$.

ملاحظة2: تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات في حالة دالة f مستمرة و رتيبة تماما على مجال I مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود.

اعداد الأستاذ:
حليلات عمار

اصطلاح: الأسهم المائلة في جدول تغيرات دالة تترجم استمرارية و رتابة الدالة على المجال المعتبر.

ملاحظة3: إذا كان لدينا جدول تغيرات لدالة f مستمرة وقيم انعدامها يمكن استنتاج جدول إشاراتها

ملاحظة4: صورة مجال بواسطة دالة مستمرة هو مجـــال

7/ المعادلة $f(x)=k$

طريقة: **لإثبات وجود حلول معادلة على مجال $[a;b]$ باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نتبع الخطوات التالية:** . نكتب المعادلة على الشكل $f(x)=k$.

- نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a;b]$.
- نتحقق من أن العدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

– بالإضافة إلى ذلك إذا كانت الدالة f **رتيبة تماما** (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على المجال $[a;b]$ نستنتج **وحدانية** الحل على المجال $[a;b]$

ملاحظة: **مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.**

من هذه الخوارزميات : 1– خوارزمية المسح (جدول قيم بخطوة)

2– خوارزمية التنصيف

أمثلة : مثال 1/ برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-2x=-2$ تقبل على الأقل حلا α في المجال $[-2;1]$.ثم **عين حصرا للعدد α سعته** 10^{-1}.

مثال 2/ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بِ $f(x)=-x^3-2x+5$

أ. برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α.

ب. عين حسب قيم x إشارة الدالة f.

مثال 3/ عيّن جدول إشارات الدالة f علما أنها تنعدم عند القيمتين -5 و 6 وجدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$	-3	0	4	$+\infty$
$f(x)$	1 ↘	-2 ↗	-1 ↘	-3 ↗	$+\infty$

إعداد الأستاذ/ حليلات عمار

تمارين للتمكن من الاستمرارية و مبرهنة القيم المتوسطة

التمرين 01

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1} & x\geq 1 \\ f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+1 & x\prec 1 \end{cases}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- بيّن أن الدالة f مستمرة عند القيمة 1 .

2- احسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها واستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب يطلب تعيين معادلته .

3-ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها ، احسب $f\ \sqrt{2}$ ثم ارسم المنحنى (C_f).

4-هل الدالة f مستمرة على $[1;+\infty[$، $]-\infty;1]$، $\mathbb{R}$؟

التمرين 02

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;1[$ كما يلي: $f(x)=x(x+E(x))$

حيث $x\mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح

1) عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-2;-1[$ ، $[-1;0[$ ، $[0;1[$

2) ارسم في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة f.

3) هل الدالة f مستمرة على $[-2;-1[$، $[-2;0[$، $[-2;1[$؟

تعريف : نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n\leq x<n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو [ ]

التمرين 03

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=-x^2+4 & x\prec 0 \\ f(x)=x^2-1 & x\in 0;2 \\ f(x)=-x+5 & x\geq 2 \end{cases}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ارسم في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة f.

2) هل الدالة f مستمرة على $]-\infty;2]$، $[0;4]$، $\mathbb{R}$؟

3) هل الدالة f مستمرة عند 0 ، 2؟

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين 04

ادرس في كل حالة من الحالات التالية استمرارية الدالة f المعرفة بدستورها

1) $f(x)=2x^3-3x^2-1$ ، 2) $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+3}{x^2-1}$

3) $f(x)=2x+1+\sqrt{x^2-1}$ ، 4) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2+1}$

5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-2}}$ ، 6) $f(x)=(x^2-x)\sin x$

التمرين 05

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4;3]$ بـ: $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1. أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
2. بين أن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-0,54\,;-0,53[$.

التمرين 06

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-x^3-2x+5$

1. برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1\,;2[$
2. باستعمال جدول قيم للدالة f بخطوة $0,1$ (خوارزمية المسح) استنتج حصرا للعدد α سعته 10^{-1}
3. عين حسب قيم x إشارة الدالة f.

التمرين 07

أ) بيّن أن المعادلات التالية تقبل ، على الأقل ، حلا في المجال I.

1) $x^4+x^2+4x-1=0$ $\qquad I=[0;1]$

2) $\cos x=x$ $\qquad I=[0;\pi]$

3) $2\sin x-x=0$ $\qquad I=\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$

ب) بيّن أن المعادلات التالية تقبل حلا وحيدا في المجال I.

1) $x^3-5x^2+3x+4=0$ $\qquad I=[1;2]$ ،

2) $x^3-x^2+2x-1=0$ $\qquad I=\mathbb{R}$

التمرين 08

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي: $f(x)=2x^3-3x^2-1$

1- برر استمرارية الدالة f على $\mathbb{R}$.

2- احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4-أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ثم تحقق أن α من المجال $[1,6\,;1,7]$

5-استنتج ، حسب قيم x إشارة $f(x)$

اعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين 09

1 - ادرس تغيرات الدالة $f:x\to x^{3}-3x+1$ على المجال $-1;1$

2- بيّن أن المعادلة: $E\ :x^{3}-3x+1=0$ تقبل حلا وحيد α في المجال $0;1$

3-**باستعمال**: أ) جدول قيم للدالة f بخطوة $0,1$ (خوارزمية المسح) استنتج حصرا للعدد α سعته $0,1$

ب) خوارزمية التنصيف استنتج حصرا للعدد α سعته $0,125$

4- **باستعمال** آلة حاسبة عيّن قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α

التمرين 10

1-عيّن جدول إشارات الدالة f علما أنها تنعدم عند القيمتين -5 و 6 وجدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$		-3		0		4		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2-عين صورة كل مجال من المجالات التالية بواسطة الدالة f :

$K=[-3;4]$ ، $J=[4;+\infty[$ ، $I=[-5;-3]$

التمرين 11

نعتبر الدالة العددية g المعرفة كما يلي: $g(x)=x^{3}+12x-2$

/1 أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0,1[$.

/2 **باستعمال** جدول قيم للدالة f بخطوة $0,1$ (خوارزمية المسح) استنتج حصرا للعدد α سعته 10^{-1}

/3 نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^{3}+1}{x^{2}+4}$

أ) بيّن أن الدال f مستمرة على $\mathbb{R}$

ب) برهن أن : $f(\alpha)=\dfrac{3-12\alpha}{\alpha^{2}+4}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$

جـ) برهن أن f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(x^{2}+4)^{2}}$

د) استنتج جدول تغيرات الدالة f

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين 12

1/ f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث: $f(a)\succ a$ و $f(b)\prec b$. بيّن أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا ، على الأقل ، في المجال $[a;b]$

2/ f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث: $f(a)\prec ab$ و $f(b)\succ b^2$. بيّن أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $[a;b]$ بحيث يكون : $f(c)=bc$

3/ f دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث $f(0)=0$ و $f(1)=1$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]0;1[$ بحيث $f(c)=\dfrac{1-c}{1+c}$

التمرين 13

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على التوالي على $\mathbb{R}^*$ و $\mathbb{R}$

بـِ: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ و $g(x)=x^2-x+2$.

1− بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0، المعادلة $f(x)=g(x)$ تكافئ المعادلة $x^3-x^2+2x-1=0$.

2− نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=x^3-x^2+2x-1$

أ− أدرس اتجاه تغير الدالة h على $\mathbb{R}$. أحسب $h(0)$ و $h(1)$.

ب−برهن أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا c على $\mathbb{R}$. ماذا يمثل بيانيا العدد c

ج) عيّن حصرا للعدد c سعته 10^{-1}

التمرين 14

n عدد طبيعي غير معدوم.

1−بين أن المعادلة $x^{n+1}-2x^n+\dfrac{2}{n+1}=0$ تقبل حلا محصورا بين $\dfrac{2n}{n+1}$ و 2

2 −هل المعادلة: $x^6-2x^5+\dfrac{1}{3}=0$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$ ؟ إذاكان الجواب نعم عين حصرا لهذا الحل

.

اعداد الأستاذ:
حليلات عمار

تمارين للتمكن من الاشتقاقية و تطبيقاتها

التمرين 01

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\sqrt{(x+2)^2}+\dfrac{1}{x+1}$

نسمي C_f المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0=-2$. فسر النتيجة بيانيا و أكتب معادلتي نصفي المماسين T_d و T_g عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-2$.

2/ أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

ب) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

جـ) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+2)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x+2$ ثم فسّر النتيجتين هندسيا

3/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

4/ أ) عيّن عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ثم عيّن تقاطع المنحنى C_f مع محور الفواصل

ب/ ارسم T_d و T_g و المستقيمات المقاربة المنحنى C_f ثم المنحنى C_f

---

التمرين 02

f الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=a+b\sqrt{x-1}$

وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل لدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1- عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(2;0)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $\dfrac{1}{2}$

نفرض في ما يلي: $a=-1\ ,b=1$

2-ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0=1$ ثم فسّر النتيجة بيانيا

3- ادرس تغيرات الدالة f

4-استنتج انه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى دالة مرجعية ثم ارسم (C_f)

التمرين 03

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2+4} & x\leq 0\\ f(x)=\dfrac{2}{x+1}-x & x\succ 0\end{cases}$$

وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل لدالة f في معلم متعامد ومتجانس

1/ بيّن أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 0 ثم فسّر النتيجة هندسيا

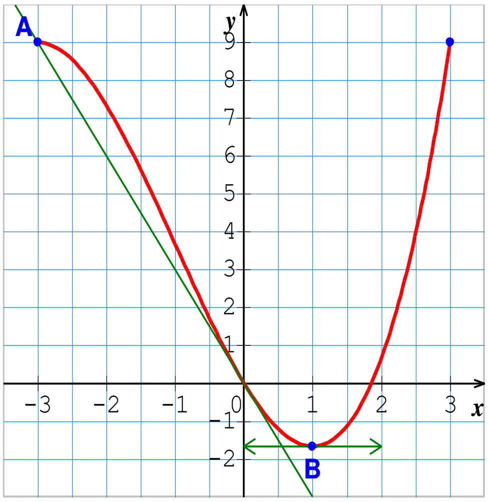
3/ ادرس تغيرات الدالة f على المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

4/ بيّن أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له في جوار $+\infty$ و $-\infty$ ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

5/ رسم بدقة المنحنى (C_f)

التمرين 04

الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة $\mathscr{C}$ f معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$



في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$ المنحنى $\mathscr{C}$ يحقق الشروط التالية :يمر بمبدأ المعلم O ، و يشمل النقطة $A(-3;9)$ ، يقبل في النقطة B التي فاصلتها 1 مماسا أفقيا و يقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O .

1) ما هو معامل توجيه المستقيم (OA)؟

2) نفرض أن f معرفة على $[-3;3]$ بـ:
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية .

أ- بين باستعمال الشروط السابقة أن : $a=\frac{1}{3}$ ، $b=1$ ، $c=-3$ و $d=0$

ب–ادرس اشارة $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكّل جذول تغيراتها

التمرين 05

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـة على $]-\infty;0]\cup[2;+\infty[$ بـ

$$f(x)=1+\sqrt{x^2-2x}$$

وليكن (C) المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس

1/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0=2$ وفسّر النتيجة بيانيا

2 / بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C)

3/ بيّن أن المستقيم (D_1) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C) في جوار $+\infty$ ثم استنتج معادلة المستقيم المقارب المائل (D_2) في جوار $-\infty$

4/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

5/ ارسم المنحنى (C)

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين 06

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$

وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون للمنحني (C_f) مستقيم مقارب معادلة له $y=x-3$ و f تقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها3.

2/ تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي يختلف عن 2 فإن : $f(x)=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

3/ أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

ب) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

جــ) ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

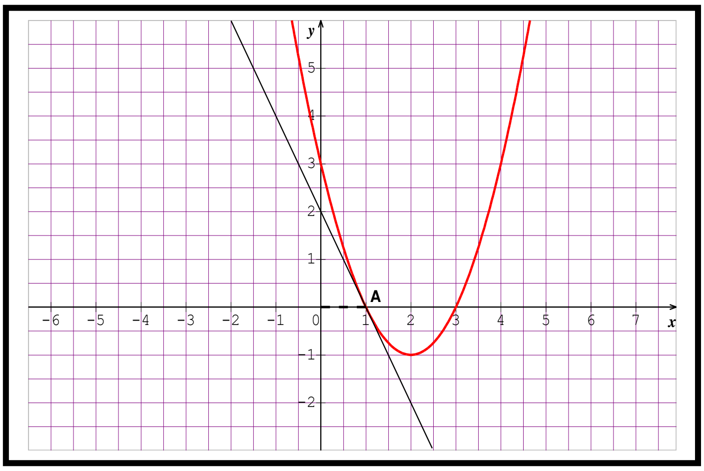
4/ بيّن أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين ω مركز تناظر للمنحني (C_f)

5/ اثبت ان المنحني (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) ، يطلب إعطاء إحداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 ومعادلتي المماسين (D_1) و (D_2)

6/ ارسم بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ثم المنحني (C_f)

7/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=-3x+m$

التمرين 07



المستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a,b,c اعداد حقيقية . (C) تمثيلها البياني في الشكل المقابل .

1. بقراءة بيانية احسب كلا من : $f(1)$ ، $f(2)$ و $f'(1)$

2. باستعمال النتائج السابقة عين a,b,c

3- بيّن أن للمنحنى (C_f) **مماسان** (D_1) **و** (D_2) **يشملان النقطة** $A(2;-2)$ **، يطلب كتابة معادلتيهما**

4- **ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي** m **عدد حلول المعادلة :** $f(x)=m(x-2)-2$

5- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=[f(x)]^2$.

أ)احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$ ، ثم استنتج إشارة $h'(x)$.

ب)شكّل جدول تغيرات الدالة h

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين 08

جدول التغيرات الموالي هو لدالة u معرفة على $D_u=[-2;3]$

x	-2		-1		0		1		2		3
$u'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$u(x)$	2	↗	3	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	2

نعتبر الدوال f ، g ، h و k المعرفة كما يلي : $f=u^2$ ؛ $g=u^3$ ؛ $h=\frac{1}{u}$ ؛ $k=\sqrt{u}$

أ) عيّن مجموعة تعريف لكل دالة من الدوال f ، g ، h و k

ب) عبّر عن كل من $f'(x)$ ، $g'(x)$ ، $h'(x)$ و $k'(x)$ بدلالة $u'(x)$ و $u(x)$.

ج) استنتج جدول تغيرات لكل دالة من الدوال f ، g ، h و k

التمرين 09

احسب الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية مبيّنا المجموعة التي تجري الحسابات عليها

/1 $f(x)=\left(x^2+2x-3\right)^3$ ، /2 $f(x)=\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^4$ ، /3 $f(t)=\tan^3 t$

/3 $f(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n$ ، /3 $f(x)=\cos^3(x)+\sin(x^2+1)$ ، /5 $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$

التمرين 10

باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية :

/1 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ، /2 $\lim_{x\to 3}\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$ ، /3 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ ،

/4 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}$ /5 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$ ، /6 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$ ، /7 $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

التمرين 11

f_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $f_m(x)=\frac{x^2+mx}{x^2-1}$ مع m عدد حقيقي .

أ) من أجل أي قيمة للعدد m حيث f_m لا تقبل قيم حدّية محليّة ؟

ب) من أجل أي قيمة للعدد m حيث f_m تقبل قيمتين حدّيتين محليتين إحداهما صغرى والأخرى عظمى؟

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين 12

1/ برّر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $(1+x)^3 \approx 1+3x$.   ب) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$.

ج) $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$.   د) $\sin x \approx x$.

2/ باختيار دالة مناسبة وباستعمال التقريب التآلفي احسب : أ) $\tan 46°$ ، ب) $\sqrt{3654}$

التمرين 13

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ $f(x)=\cos 2x-4\cos x$

وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد

1/ اثبت أن الدالة f دورية ودورها 2π

2/ بيّن ان الدالة f زوجية واستنتج مجال كافي لدراسة تغيرات الدالة f

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ أوجد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

5/ عيّن نقط الانعطاف للمنحنى (C_f) ثم ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-\pi;\pi]$

التمرين 14

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x$

1/ اثبت أن الدالة f دورية ودورها 2π

2/ برهن أن محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى (C_f)

3/ برر أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=(1-2\cos x).\sin x$

4/ أنجز جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;\pi]$

5/ ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-\pi;\pi]$ و كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_f)

التمرين 15

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ $f(x)=\cos^2 x.\sin 2x$

1/ اثبت أن الدالة f دورية ودورها π

2/ بيّن ان الدالة f فردية واستنتج مجال كافي لدراسة تغيرات الدالة f

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-\pi;\pi]$ و كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_f)

اعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين 16

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـ $f(x)=1+2\cos x+\cos 2x$

1/ اثبت أن الدالة f دورية ودورها 2π

2/ بيّن ان الدالة f زوجية و استنتج مجال كافي لدراسة تغيرات الدالة f

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ أوجد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل

5/ ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-\pi;\pi]$ و كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_f)

6/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول الجملة $\left\{\cos^2 x+\cos x=\dfrac{m}{2};-\pi\le x\le\pi\right\}$

التمرين 17

f هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sin 3x-3\sin x$.

1) قارن بين $f(x)$ وكل من $f(x+2\pi)$ ، $f(-x)$ و $f(\pi-x)$.

ثم برهن إذن أنّه يكفي دراسة الدالة f على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2) برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=-6\sin x\sin 2x$.

3) أدرس تغيّرات الدالة f على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. ثم أرسم منحني الدالة f على $[-2\pi;2\pi]$.

التمرين 18

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos^2 x}$

1/ اثبت أن الدالة f دورية ودورها 2π

2/ ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[-\pi,\pi]$ ثم ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-\pi;\pi]$

التمرين 19

ة المعرفـــة على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos x}$

1/ اثبت أن الدالة f دورية ودورها 2π

2/ بيّن أن الدالة f زوجية و استنتج مجال كافي لدراسة تغيرات الدالة f

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-\pi;\pi]$ و كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_f)

التمرين 20

أ). نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$

اعداد الأستاذ
حليلات عمار

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه. استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$.

ب). نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد.

نعتبر المستقيمين $(D):y=-3x$ و $(D'):y=x$ أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. استنتج جدول تغيرات الدالة f.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+3x\right]$. فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها.

3) بين أن المستقيم (D') مستقيما مقاربا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) و (D'). أرسم (C_f)، (D) و (D').

تمارين خاصة بشعبة رياضيات وتقني رياضي

التمرين 21

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases} f(x)=x+1+\sqrt{x^2-1} & x\prec -1 \\ f(x)=\frac{1}{2}\ 2-x\ \sqrt{x+1} & x\geq -1 \end{cases}$$

وليكن (C) المنحنى البياني الممثل لدالة f في معلم متعامد ومتجانس

1/ بيّن أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة -1 ثم فسّر النتيجة هندسيا .

3/ احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

4/ ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها

5/ رسم بدقة المنحنى (C_f) في المجال $]-\infty;8]$

التمرين 22

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$\begin{cases} f(x)=x+3-\sqrt{x^2+1} & x\prec 0 \\ f(x)=1+\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} & x\geq 0 \end{cases}$$

وليكن (C) المنحنى البياني الممثل لدالة f في معلم متعامد ومتجانس

1/ بيّن أن الدالة f مستمرة عند القيمة 0 .

2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 0 ثم فسّر النتيجة هندسيا .

3/ أ) احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

ب) بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$

4/ ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها ثم رسم بدقة المنحني (C_f)

التمرين 23

f الدالة العددية المعرفـــة بـــ : $f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+2x]$. فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها ثم ارسم المنحني C_f .

3/ نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=-x-\sqrt{x^2+8}$

وليكن C_g منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بين ان C_g و C_f متناظران بالنسبة للمبدأ O

ب) ارسم C_g ثم عين معادلة لـــ (Γ) حيث $(\Gamma)=(C_f)\cup(C_g)$

التمرين 24

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :
$f_n(x)=(x^2-2x)^n$.

1) أدرس تغيرات الدالة f_n (ميّز الحالتين n زوجي ثم فردي) .

2) نسمي $\mathcal{C}_n$ المنحني الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ومتجانس .

أ ــ تحقق من أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحني $\mathcal{C}_n$.

ب ــ برّر أنّ $\mathcal{C}_n$ يمرّ من أربع نقط إحداثياتها مستقلة عن العدد الطبيعي n .

أحسب إحداثيات هذه النقط . أرسم في نفس المعلم المنحنيين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_7$.

نحو البكالوريا :التدريب المبكر لحل نماذج امتحانات وبكالوريات

التدريب 01

بكالوريا شعبة علوم تجريبية دورة 2014

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$.

1) أ)احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

ب)ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}7\langle\alpha\langle 0{,}8$.

ب)استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II)- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ).

3) أ)بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالة f .

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات f. (نأخذ $f(\alpha)\approx-0{,}1$)

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$

5)أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f).

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$. و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$

ب)استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ، ثم أنشئ (C_h)

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التدريب 02

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+3x-16$.

1) ادرس تغيرات الدالة **g**.

2) أ) بيّن انّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in\ ]1;3[$

ثم باستعمال طريقة التنصيف بيّن: $2\prec\alpha\prec2{,}5$

ب) باستعمال طريقة المسح (جدول قيم بخطوة 0.1) أوجد حصرا للعدد α سعته 10^{-1}

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x^2+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

4) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بيّن انّ من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها.

5) بيّن ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

6) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. احسب $f(-2)$

ب) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

7) h دالة معرفة على D_f بـ: $h(x)=\left(f(x)\right)^2$

-ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيرات الدالة h

التدريب 03

لتكن الدالة f في المتغير الحقيقي x و المعرفة على $]-2;0[\cup]0;+\infty[$ بـ :

$f(x)=1+\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ **ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0=-2$ ثم فسّر النتيجة هندسيا**

2) أ)احسب النهايات عند حدود D_f و فسّر النتائج بيانيا

ب)ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3/ عيّن إحداثيات A نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

4/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها $x_0=-1$.

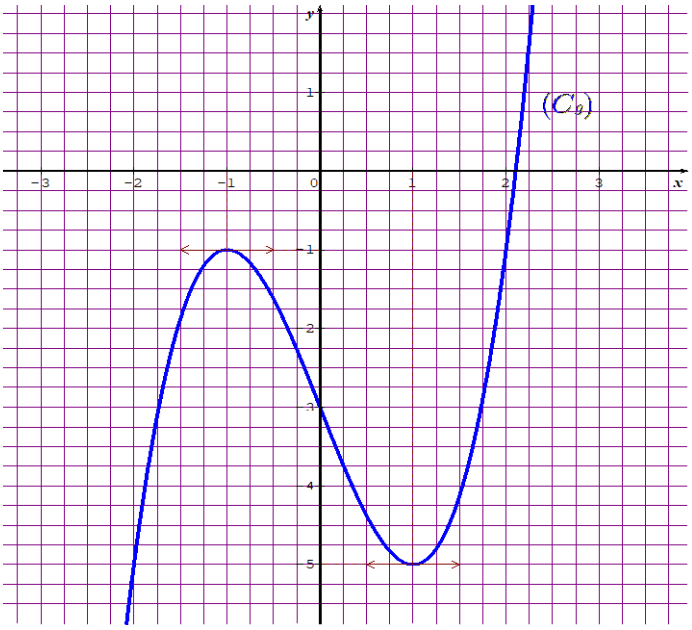
5/ احسب $f(2)$ ثم ارسم بدقة المماس (Δ) و المنحنى (C_f) و بخاصة نصف المماس في النقطة ذات الفاصلة $x=-2$.

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

6/ نعرف الدالة g في المتغير الحقيقي x حيث : $g(x)=1+\frac{\sqrt{|x|+2}}{|x|}$

– انطلاقا من (C_f) ارسم (C_g)منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق

التدريب 04



I - المنحنى (C_g) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يأتي : $g(x)=ax^3+bx+c$

1–أ)بقراءة بيانية أوجد : $g(0)$ ، $g(1)$ ، $g'(1)$

ب)أوجد الأعداد : $a\ ,b\ ,c$

2–أكتب جدول تغيرات الدالة g

3- بيّن ان المعادلة $x^3-3x-3=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $\left]2\,;\frac{5}{2}\right[$

4- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II- f دالة معرفة على $D=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بالعبارة : $f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}+1$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1–أ)تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f'(x)=\frac{2x.g(x)}{(x^2-1)^2}$

ب)عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2–احسب النهايات عند حدود D ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3–بيّن أن: $f(\alpha)=3\alpha+1$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4–أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f)

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

جــ)ارسم (C_f)

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التدريب 05

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{x^3+ax+b}{2x}$

(γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1/ عين العددين a و b حتى تقبل f قيمة حدية عند -1 قيمتها 2

نفرض فيما يلي : $a=1$ و $b=-2$

2/ أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

ب) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

جـ) احسب : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)\right]$ ثم فسّر النتيجة بيانيا

د) ادرس الوضعية النسبية للمنحني (γ) الممثل للدالة f و القطع المكافئ (P) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$

3/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها

4/ أ) اكتب معادلة المماس (T) في النقطة التي فاصلتها $x_0=1$

ب) بيّن أن المماس (T) يقطع المنحني (γ) في نقطة M_0 يطلب تعيينها

5/ اثبت ان المنحني (γ) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

6/ بيّن أن المنحني (γ) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=1$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $1{,}5$ و $1{,}6$

7/ أ) مستعينا بالنتائج السابقة ارسم القطع المكافئ (P) و المنحني (γ)

ب) نعتبر الدالة h حيث : $h: x\to \dfrac{-x^2|x|-|x|-2}{2x}$

ادرس شفعية الدالة h ثم استنتج رسم المنحني (C_h) انطلاقا من رسم المنحني (γ)

التدريب 06

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بالعبارة : $f(x)=ax+\dfrac{bx+c}{(x-2)^2}$

وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث المنحني (C_f) يقبل في النقطة $A(3;1)$ مماسا معامل توجيهه 4 ويقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x$

2/ أ) بيّن أن الدالة المعرفة في السؤال 1) هي الدالة : $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x+1}{(x-2)^2}$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

ب) احسب $\lim_{x\to 2} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا ثم احسب النهايتين : $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

3/ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 2 فإن : $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-5x+8)}{(x-2)^3}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم اشكّل جدول تغيرات الدالة f

4/ أ)عيّن عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ وبيّن أنه يوجد حل وحيد α في المجال $\left]\frac{5}{2};3\right[$

ب) باستعمال خوارزمية المسح اوجد حصرا للعدد α سعته 0.1

5/ أ) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ)

ب) نقبل ان المستقيم T ذا المعادلة : $y=x+\dfrac{1}{4}$ مماس للمنحني (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 يطلب تعيين x_0

6/ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 2 فإن : $f''(x)=\dfrac{-2x-2}{(x-2)^4}$

ب) بيّن أن المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثييها.

7/ أ)ارسم T ، (Δ) و (C_f) .

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين مختلفين في الإشارة

التدريب 07

بكالوريا شعبة رياضيات دورة 2009

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة على $]-1;+\infty[$ كما يأتي : $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$

C_f منحنى الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدّالة f

2) أ- بين أن المنحنى C_f يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما D معادلته : $y=x$

ب-ادرس الوضعية النسبية للمنحنى C_f و D .

3) أ- بين أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث : $1.3\prec x_0\prec 1.4$.

ب- عين معادلة Δ مماسا للمنحنى C_f في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

4) أرسم Δ و C_f في نفس المعلم .

5) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=|f(x)|$

C_g منحنى الدالة g في المعلم السابق .

– بيّن كيف يمكن إنشاء C_g انطلاقا من C_f ، ثم أرسمه في نفس المعلم السابق .

6-ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x)=m^2$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

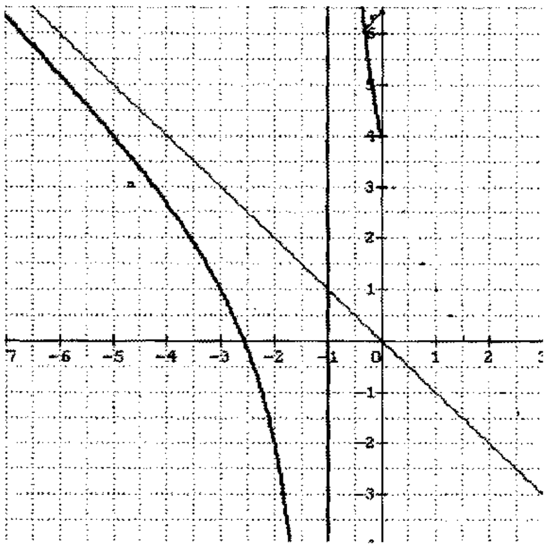
التدريب 08

بكالوريا شعبة علوم تجريبية دورة 2009

I) f دالة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$

(c_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

كما هو مبين في الشكل.



1) أ) أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكّل جدول تغيراتها.

2) g دالة معرفة المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

(c_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد تجانس.

أ) أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب) تحقق من أن (c_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً (Δ)

عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

جـ) أدرس تغيرات g .

II) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3) أرسم (Δ_1)، (Δ_2) و (C_k).

التدريب 09

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+3x-16$.

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) أ) بيّن انّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in\; 1;3$

و باستعمال طريقة التنصيف بيّن أن: $2\prec\alpha\prec 2,5$

ب) باستعمال طريقة المسح (جدول قيم بخطوة 0.1) أوجد حصرا للعدد α سعته 10^{-1}

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-x+\dfrac{x+8}{x^2+1}$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

4) أ) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن انّ من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{xg(-x)}{(x^2+1)^2}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها.

5) بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار كل من $-\infty$ و $+\infty$ يطلب تعيين معادلته، ثم ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

6) أ) بيّن أنّ $f(-\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(-\alpha)$. احسب $f(2)$

ب) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

7) h دالة معرفة على D_f بـ: $h(x)=f(x)^2$

أ-ادرس اتجاه تغير الدالة h ب-شكل جدول تغيرات الدالة h

التدريب 10

I) نعتبر g دالة كثير الحدود المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-x^3-3x^2-3x+5$

أ) ادرس تغيرات g .

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]0;1[$.

ج) أعط حصرا لـ α سعته 10^{-1} ثم عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3-3x+1}{(x+1)^2}$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $2cm$

1) احسب $\lim_{x\to-1^{>}} f(x)$. فسر بيانيا النتيجة.ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) . أ) بين انه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

ب) أثبت أن : $f(\alpha)=-3+\dfrac{9}{(\alpha+1)^2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2})

جـ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

3) أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-2$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث : $0,4 \prec x_1 \prec 0,3$ و $1,6 \prec x_2 \prec 1,5$

5) عين معادلة المماس T للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند النقطة التي ترتيبها 1.

6) أنشئ T ، و المستقيمات المقاربة و (C_f)

اعداد الأستاذ
حليلات عمار

7) h الدالة المعرفة كما يلي : $\begin{cases} h(x)=f(x) & x\geq 0 \\ h(x)=-x-\dfrac{1}{x-1} & x<0 \end{cases}$

أ/ ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق h عند القيمة $x_0=0$ ثم فسر النتيجة بيانيا

ب / ادرس تغيرات الدالة h مستعينا بتغيرات الدالة f

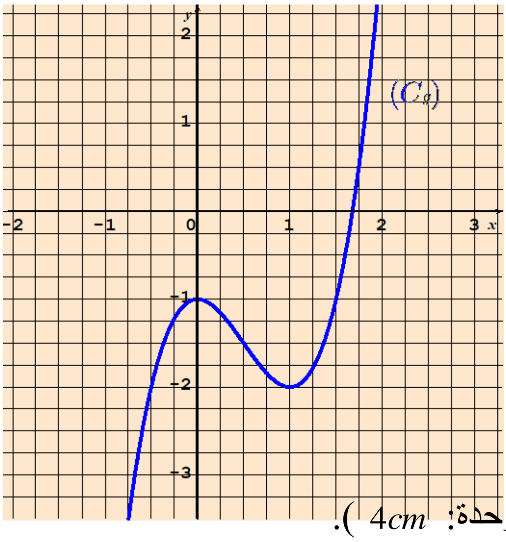
جـ/ بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة : $y=-x$ مقارب مائل للمنحني (C_h) ثم ارسم المنحني (C_h)

التدريب 11

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـِ : $g(x)=2x^3-3x^2-1$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم.

تم رسم (C_g) باستعمال برنامج راسم المنحنيات فكان كالتالي :



1) ضع تخمينا حول عدد جذور و إشارة العبارة $g(x)$.

2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين $1{,}6$ و $1{,}7$.

4) استنتج ، حسب قيم x، إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـِ $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ (الوحدة: $4cm$).

1) احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف و فسّر النتائج بيانيا

2) بين أنه من كل x من مجموعة التعريف فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عين معادلة لـِ (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (Δ). ماذا تلاحظ ؟ ثم ارسم المستقيم (Δ) و المنحني (C_f).

6) لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $k(x)=\dfrac{x^3+1}{1-x}$

أ) اعتمادا على نتائج دراسة الدالة f ادرس تغيرات الدالة k

بيّن أن المنحني (P) الممثل للدالة : $x\rightarrow -x^2-x$ مقارب للمنحني (C_k) الممثل للدالة k ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (P) و (C_k) ثم ارسم (P) و (C_k)

اعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التدريب 12

نعتبر الدالة f المعرفة على D_f بِـ : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$

حيث $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ؛ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

- استنتج المستقيمات المقاربة الموازية لمحور التراتيب.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أكتب معادلة للمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

4) أ) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية c و a , b بحيث من اجل كل عدد حقيقي x من D_f

تكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=a.x+b+\dfrac{cx}{x^2-1}$

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ثم أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

5) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;1[$ ثم تحقق أن : $0,7<\alpha<0,8$

6) أرسم المستقيمات المقاربة و المنحني (C_f).

7)أ) من ملاحظة (C_f) خمن وجود مركز تناظر للمنحني (C_f) ثم أثبت صحة أو عدم صحة تخمينك

ب) لتكن الدالة h المعرفة بــــ : $h(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{|x^2-1|}$ (C_h) تمثيلها البياني

بيّن أن المنحني (C_h) يستنتج بسهولة من رسم (C_f) ثم ارسم (C_h)

التدريب 13

f الدالة المعرفــةعلى $\mathbb{R}-\{1\}$ بـــ : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

1/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث المنحني (γ) تمثيلها البياني يشمل النقطة $D(0;-3)$ وتكون النقطة $E(-1;-2)$ ذروة للمنحني (γ) .

2/ بيّن أن الدالة المعرفة في السؤال 1) هي الدالة : $x\longrightarrow\dfrac{x^2+3}{x-1}$

–ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (γ)

3/ بيّن أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين ω مركز تناظر للمنحني (γ)

4/ اثبت ان المنحني (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) يعامدان المستقيم الذي معادلة له $x-3y+20=0$ ، يطلب إعطاء إحداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 ومعادلتي المماسين (D_1) و (D_2)

اعداد الأستاذ
حليلات عمار

5/ ارسم المستقيمات المقاربة و المماسين (D_1) و (D_2) ثم (γ) في معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

6/ أ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=-3x+2m+1$

ب) لتكن الدالة h المعرفة بـــ: $h(x)=\dfrac{x^2+3}{|x-1|}$ (γ') تمثيلها البياني

بيّن أن المنحني (γ') يستنتج بسهولة من رسم (γ) ثم ارسم (γ')

7/ g دالة معرفة على D_f بـ: $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

أ-باستعمال مشتقة دالة مركبة ادرس اتجاه تغير الدالة g

ب-شكل جدول تغيرات الدالة g

التدريب 14

بكالوريا شعبة تقني رياضي دورة 2017

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3+6x+12$

1)ادرس اتجاه تغير الدالة g.

2)بيّن انّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in\left]-1,48;-1,47\right[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-6}{x^2+2}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بيّن انّ من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$ ،

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2) أ)بيّن ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .

3) بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

اعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التدريب 15

I) $P\ x$ كثير حدود حيث : $P(x)=x^3+3x^2+3x+2$

1/ احسب $P(-2)$ و استنتج تحليلا لكثير الحدود $P(x)$

2/ ادرس إشارة $P(x)$ حسب قيم x

II) f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بــــ: $f(x)=2x+3-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

نسمـــي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا ثم احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2- أ) بيّن أنه مهما يكن العدد الحقيقي x من D_f فإن : $f'(x)=\dfrac{2P(x)}{(x+1)^3}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول التغيرات

3-أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له.

ب)عيّن وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (D).

4-أ) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left]\dfrac{-3}{8};\dfrac{-1}{4}\right[$.

ب) استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x

5- اكتب معادلة للمماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6)ارسم المماس (Δ) و المستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f)

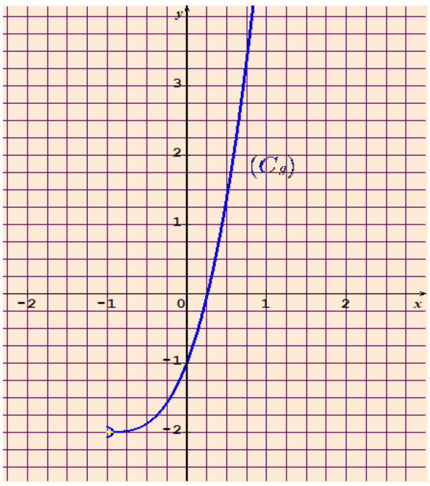
7) k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $k(x)=2|x|+3-\dfrac{1}{(|x|+1)^2}$

أ-ادرس قابلية اشتقاق الدالة k عند القيمة 0 وفسّر النتيجة بيانيا وماذا تسمى النقطة $A(0;2)$

ب-انطلاقا من (C_f) ارسم (C_k) منحنى الدالة k في نفس المعلم السابق .

التدريب 16

بكالوريا شعبة علوم تجريبية دورة 2008



المنحنى C_g المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية $]-1;+\infty[$ كما يأتي : $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$

1- أ) بقراءة بيانية :شكل جدول تغيرات الدالة g وحدّد $g(0)$ و إشارة $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

2- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

جـ) احسب : $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وفسّر النتيجة بيانيا. ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3- نأخذ $\alpha\simeq 0.26$. أ) عيّن مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}.

ب) ارسم المنحنى (Γ).

4*-أ) اكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=x+a+\dfrac{b}{(x+1)^2}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان

ب) عيّن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقق : $F(1)=2$

التدريب 17

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=x^3-x^2+3x+1$$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g.

2) بيّن انّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in\ ]-0,3;-0,2[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=ax+\dfrac{b}{x^2+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ)عيّن العددين a و b حتى يقبل المنحنى (C_f) مماسا عند النقطة $(0;-2)$ مماسا معامل توجيهه 1

ب) تحقق أن الدالة f المعرفة في السؤال السابق هي : $f(x)=\dfrac{x^3+x-2}{x^2+1}$

2) أ) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

ب) بيّن انّ من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$ ،

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها. واحسب $f(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$

3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار كل من $-\infty$ و $+\infty$ يطلب تعيين معادلته ،ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4) بيّن ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم المقارب المائل يطلب تعيين معادلته

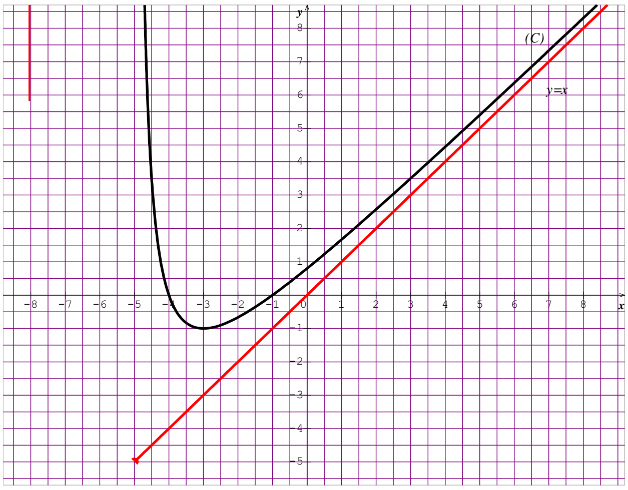
إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

5) بيّن أن للمنحني (C_f) نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما

6) عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$ ثم ارسم المستقيم (Δ) والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

7)ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $mx^2+m+2=0$

التدريب 18



I . f دالة معرفة على $I=-5;+\infty$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^2+5x+4}{x+5}$$

، C_f تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما هو مبين في الشكل .

1) أ– احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـــ I

ب– بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها .

2) g الدالة العددية المعرفة على المجال $-\infty;-5$ بالعبارة : $g(x)=\frac{}{-x-5}$

C_g تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

أ– احسب نهاية g عند حدود مجموعة تعريفها .

ب– تحقق من أن C_g يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

جـــ – ادرس تغيرات g

II k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\ -5$ كما يلي : $k(x)=\frac{x^2+5x+4}{|x+5|}$

1) اكتب $k(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

2) من نتائج الجزء الأول شكل جدول تغيرات الدالة k

3)ارسم C_k المنحني الممثل للدالة k في معلم متعامد ومتجانس

التدريب 19

f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ كما يأتي : $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

نرمز بـــ (C_f) إلى منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ بيّن أن الدالة f فردية

2/أ– بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y=\frac{1}{2}x-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

ب–بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ فإن : $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\leq 1$

– استنتج وضعية (C_f) بالنسبة لـــ(Δ) على المجال $[1;+\infty[$.

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

2. احسب : $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ثم فسّر هندسيا هذه النتيجة .

3.لتكن الدالة g المعرفة على $[1;+\infty[$ بـــ : $g(x)=x^2\sqrt{x^2-1}-2$

أ- احسب $g\left(\sqrt{2}\right)$ ، ثم بين أن g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

ب- استنتج مما سبق إشارة g على المجال $[1;+\infty[$.

4. أ- احسب $f'(x)$ وبين أن $g(x)$ و $f'(x)$ لهما نفس الإشارة على $[1;+\infty[$

ب. ادرس تغيرات f على المجال $[1;+\infty[$ ثم سجل جدول تغيراتها على $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

5. بيّن أن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ') عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

6..ارسم المستقيمات المقاربة ثم أنشئ المنحنى $\left(C_f\right)$

7. h الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ بالعبارة : $h(x)=\frac{-1}{2}|x|+\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}$

C_h منحنى الدالة g في المعلم السابق .

- بيّن كيف يمكن إنشاء C_h انطلاقا من C_f ، ثم أرسمه في نفس المعلم السابق .

التدريب 20

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـ $\mathbb{R}^*-\{2\}$ بـــ: $f(x)=\frac{x^2-2x-1}{x^2-2x}$

وليكن $\left(C_f\right)$ المنحنى البياني الممثل لدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1- احسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها و فسّر النتائج بيانيا

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3-ادرس وضعية المنحني $\left(C_f\right)$ بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي (D)

4-أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $x=1$: محور تناظر للمنحني $\left(C_f\right)$

5-بيّن أن للمنحني $\left(C_f\right)$ مماسان (D_1) و (D_2) يشملان النقطة $A\left(1;\frac{13}{9}\right)$ ، يطلب كتابة معادلتيهما

6- ارسم بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ثم المنحنى C_f

7- نعتبر عائلة المستقيمات المعرفة بـــ: $(\Delta_m): y=mx+\frac{13}{9}-m$

أ- تحقق أن النقطة A تنتمي إلى جميع المستقيمات (Δ_m)

ب- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx-m+\frac{13}{9}$

اعداد الأستاذ
حليلات عمار

تداريب خاصة بشعبة رياضيات وتقني رياضي

التدريب 01

f الدالة العددية على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f .

2/ احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

3/ بيّن ان النقطة $A\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

4/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين T_1 و T_2 ميلهما $\dfrac{5}{2}$ ثم حدد معادلتيهما.

5/ بيّن أن المنحني C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $\dfrac{1}{2}\prec\alpha\prec\dfrac{5}{6}$

6/ ارسم (C_f) ثم استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

7/ هل توجد مماسات للمنحني (C_f) توازي المستقيمين المقاربين ؟

8/ ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$ حيث m وسيط حقيقي

9/ g الدالة المعرفة بـــــ : $g(x)=f(\sin x)$

–بيّن أن الدالة g دورية ودورها 2π ثم ادرس تغيرات الدالة g على مجال سعته دور ثم ارسم المنحني (C_g) الممثل للدالة g وفي المجال $[-2\pi;2\pi]$

التدريب 02

f الدالة العددية المعرفـة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+\sqrt{|x^2-1|}$

وليكن (C_f) المنحني البياني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس

1/ اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

2/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمتين (-1) و (1) وفسّر النتيجة بيانيا

3/ احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$ وفسّر النتائج بيانيا

4/ g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـة على $]-1;1[$ كما يلي : $g(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g و احسب $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;1[$.

5/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

6/ ارسم المنحني (C_f)

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التدريب 03

f الدالـة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــة بـ: $f(x)=\dfrac{4x^2-11x+7}{2(x-2)}$

وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)

2/ برهن أن النقطة A تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحني (C_f)

3/ احسب إحداثيات نقط تقاطع المنحني مع المحورين الإحداثيين ثم ارسم المنحني (C_f)

4/ بيّن ان المنحني (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم الذي معادلته : $2y-3x+5=0$

5/ احسب إحداثيات نقطتي التماس B و C لهذين المماسين مع المنحني ثم تحقق من أن النقطتين B و C متناظرتين بالنسبة إلى النقطة A. وعيّن معادلتي المماسين .

6/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=\dfrac{3}{2}x+m$

7/ (f_m) الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f_m(x)=\dfrac{4x^2+(m-8)x-m+4}{2(x-2)}$

نسمــي (C_m) المنحنى الممثل للدالة f_m في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ - بين انه توجد نقطة ثابتة تنتمي إلى جميع المنحنيات (C_m)

ب - ما هو المنحنى (C_m) الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيين $\left(\dfrac{7}{4};0\right)$

التدريب 04

f الدالة العددية المعرفة على المجموعة : $]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$$

وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{f(x)+3}{x+4}$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ و فسّر النتائج بيانيا .

2/ احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا

3/ أثبت أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

4/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. ثم ارسم المنحني (C_f) .

5/ h الدالة المعرفة على المجموعة : $]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x+1-\sqrt{x^2+4x}$

وليكن (C_h) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بيّن أن المنحنيين (C_f) و (C_h) متناظرين بالنسبة للنقطة $\omega(-2;-1)$

ب) نسمي (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي التي تحقق :

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

$y^2-2(x+1)y-2x+1=0$ –أثبت أن : $(\Gamma)=(C_f)\cup(C_h)$ و ارسم (Γ)

6/ نعتبر الشعاعين $\vec{u}=\vec{i}$ و $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$

–أثبت أن الثلاثية $(\omega;\vec{u};\vec{v})$: معلما للمستوي ثم اكتب معادلة لـ (Γ) بالنسبة للمعلم $(\omega;\vec{u};\vec{v})$.

التدريب 05

F دالة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

$F(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي $F'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

نقبل أنّ الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$.

1) G الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=F(x)+F(-x)$

أ ــ برّر أنّ G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أحسب $G'(x)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$.

ب ــ أحسب $G(0)$ و استنتج أن الدالة F فردية .

2) H الدلة المعرّفة على المجال $I=]0;+\infty[$ بـ : $H(x)=F(x)+F\left(\dfrac{1}{x}\right)$

أ ــ برّر أنّ H تقبل الاشتقاق على I و أحسب $H'(x)$ من أجل $x\in I$.

ب ــ برهن أنّه من أجل كل $x\in I$، $H(x)=2F(1)$.

ج ــ استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=2F(1)$. ماذا ينتج عن المنحنى $\mathscr{C}$ ؟

د ــ 3) T الدالة المعرّفة على $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ بـ : $T(x)=F(\tan x)-x$

أ ــ أحسب $T'(x)$. ماذا ينتج عن الدالة T ؟ ب ــ أحسب $F(1)$.

4) أنجز جدول تغيّرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

5) أرسم المنحنى $\mathscr{C}$ ، مستقيماته المقاربة ومماساته عند النقط ذات الفواصل -1 ، 0 و 1

التدريب 06

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$

حيث : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-x}} \\ f(1)=0 \end{cases}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- بيّن أن f مستمرة على المجال $[1;+\infty[$

2-ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 1 و فسر النتيجة هندسيا .

3- (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب: $y=x+\dfrac{1}{2}$ و $y=-x-\dfrac{1}{2}$

- بيّن ان (D) و (D') مقاربان للمنحنى (C_f)

اعداد الأستاذ
حليلات عمار

4- ادرس تغيرات الدالة f

5- ارسم المنحنى $\left(C_f\right)$

التدريب 07

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}}$

$\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1- بيّن أن f دالة زوجية

2-أ) احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن : $f'(x)=\dfrac{x\ \ x^2-3}{\sqrt{x^2+1}^{\,3}}$

3- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$.ثم استنتج معادلة المستقيم (Δ') المقارب الأخر للمنحنى $\left(C_f\right)$ في جوار $-\infty$

4- بيّن أن : $f''\ x\ =\dfrac{3\ \ 3x^2-1}{\sqrt{x^2+1}^{\,3}}$ ثم أستنتج أن المنحنى $\left(C_f\right)$يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين فاصلتيهما

5- ارسم المنحنى $\left(C_f\right)$

التدريب 08

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$

يرمز $\mathcal{C}$ إلى المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) أدرس تغيّرات الدالة f . استنتج معادلة لكل مستقيم مقارب للمنحنى $\mathcal{C}$.

2) أكتب معادلة لمماس المنحنى $\mathcal{C}$ عند نقطة ذات الفاصلة 5 .

3) أثبت أن المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى $\mathcal{C}$. أرسم المنحني $\mathcal{C}$.

4)بقراءة بيانية : أ) عيّن قيم x التي يكون من اجلها : $0\prec f(x)\prec 1$

ب) حدد إشارة $f(x)$ حسب قيم x

5) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـــــ : $g(x)=\dfrac{\left|x^2-2x-15\right|}{x^2-2x-3}$

– بيّن أن المنحنى $\left(C_g\right)$ الممثل للدالة g يستنتج بسهولة من رسم المنحنى $\mathcal{C}$ –ارسم $\left(C_g\right)$

6) نعتبر الدالة f_m المعرّفة بــ : $f_m(x)=\dfrac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$ حيث m وسيط حقيقي .

أ– تحقق أن : $f_m(x)=1-\dfrac{12}{x^2-mx-3}$

ب– أدرس تغيرات الدالة f_m واستنتج المستقيمين القاربين لمنحنها $\mathcal{C}_m$.

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

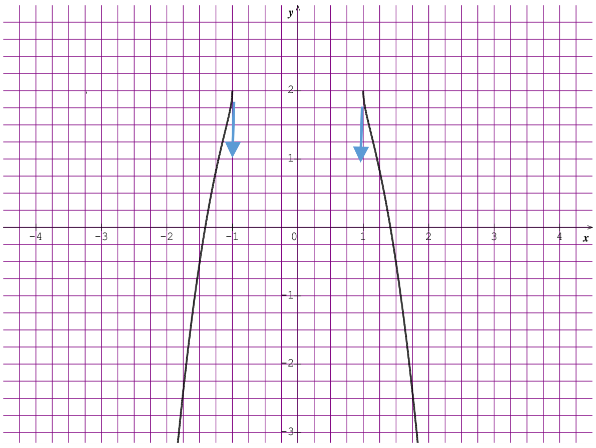
جـ بين أنّه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات $\mathscr{C}_m$.

د . ما هو المنحني الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيتين $(1;4)$ ؟

التدريب 09

• g دالة معرفة على $D =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ بـ : $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2-1}$

، C_g تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس كما هو مبين في الشكل



1- احسب : $g\left(\sqrt{2}\right)$ و $g\left(-\sqrt{2}\right)$

2- بقراءة بيانية أ) : عيّن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

ب) هل الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

جـ) هل الدالة g قابلة للاشتقاق عند 1 على اليمين ؟ برر

د) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II- f دالة معرفة على $D =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1$$

، C_f تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 1 من اليمين وعند القيمة -1 من اليسار و فسّر النتائج بيانيا

2- احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

4- شكّل جدول تغيرات الدالة f

5- بيّن أن النقطة $I\left(0;1\right)$ مركز تناظر للمنحني C_f .

6- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x+3$ مقارب للمنحني $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$. ثم استنتج معادلة المستقيم (Δ') المقارب الأخر للمنحني $\left(C_f\right)$ في جوار $-\infty$

7- أنشئ (Δ) و (Δ') ثم C_f

ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة : $f(x) = -x+m+1$

التدريب 10

أ - g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

C_g المنحني الممثل للدالة g في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) ادرس تغيرات الدالة g 2) استنتج إشارة $g(x)$

3) أثبت أنه لكل عدد حقيقي x : $g(-x) + g(x) = -1$. أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

4) ارسم المنحني C_g

ب. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-\frac{x}{2}+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$

C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1)احسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا

2)أ)بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=-x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني C_f

ب)ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم (Δ)

3)ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4)بيّن أن المنحني C_f يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين -1 و -0.5

5)أثبت أن المنحنى C_f يقبل مماسا T معامل توجيهه $-\frac{1}{2}$ يطلب تعيين معادلته

6)ارسم بدقة المستقيمين المقاربين و المماس T و المنحنى C_f

7) أ) ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx+1$ حيث m وسيط حقيقي

ب) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $k(x)=f(-|x|)$

أ–بيّن أن الدالة k زوجية .

ب–انطلاقا من (C_f) ارسم (C_k)منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق .

التدريب 11

f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـــ : $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

1) بين أن الدالة f فردية

2) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف و استنتج المستقيمات المقاربة الموازية لحامل محور التراتيب

3) أ)بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحي (C) عند $+\infty$.

ب) استنتج النهايتين: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

جـ) حدّد وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ)

4) باستعمال نتيجة السؤال 1) استنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً (Δ') عند$-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

5)ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها

6) ارسم (Δ)و(Δ')ثم المنحنى (C_f)

اعداد الأستاذ
حليلات عمار

7) أ)ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $m^2\sqrt{x^2-4}=x$

ب) ليكن (C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $g(x)=-f(|x|)$

- انطلاقا من المنحنـــي (C_f) استنتج رسم المنحنى (C_g).

التدريب 12

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) **1**/ ادرس تغيرات الدالة f ثم عين المستقيمات المقاربة للمنحني C_f

2/ اكتب معادلة للمماس (D) للمنحنى C_f عند نقطة تقاطعة مع محور الترتيب

3/ احسب $f(-x)+f(x)$ وماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C_f

5/ بيّن أن المنحنى C_f يقطع المستقيم الذي معادلته $y=x$ في نقطة فاصلتها x_0 حيث : $1\prec x_0\prec 2$

4/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى C_f والمستقيم (D). ماذا تستنتج ؟

5/ ارسم المنحني C_f .

II) / لتكن الدالة h المعرفة بـــــ : $h(x)=1+\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ (γ') تمثيلها البياني

1/ ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة $x_0=0$

2/ بين أن الدالة h زوجية .

3/استنتج رسم المنحنى (C_h) انطلاقا من رسم C_f

III الدالة g العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ : $g(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

وليكن (C_g) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-2x]$ ثم فسر النتيجتين بيانيا

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها

3/ ارسم المنحنى (C_g)

اعداد الأستاذ/
حليلات عمار

الهدية

فأحرص على ما ينفعك واستغل إمكاناتك الكامنة وطوّر قدراتك بالشكل الذي يفيدك حالا ومستقبلاً -إن أشقى الأشقياء, واتعس التعساء هو الذي حرم نفسه من كافه الخيارات المتوفرة له للنجاح في هذه الحياة,

-ان الثروة الذاتية التي حباك الله بها في شخصيتك , وعقلك, وفكرك , وطاقتك ومواهبك الخاصة هي خير رصيد يمكن استغلاله والإفادة منه لتحقيق أعلى مستويات النجاح التي تريدها في حياتك.

ومن لم يذق مرّ التعلّم ساعة *** تجرع ذل الجهل طول حياته

ومن فاته التعليم وقت شبابه *** فكبّر عليه أربعاً لوفاته

"The secret of success is determened by your daily agendat".

Hard work is what successful people do!"

Knowing Is Not Enough; We Must Apply. Wishing Is Not Enough; We Must Do." – Johann Wolfgang Von Goethe

"Your mind is a powerful thing. When you fill it with positive thoughts, your life will start to change.

إعداد الأستاذ
حليلات عمار