التحضير الجيد لبكالوريا 2021

F

01-النهايات

جميع الشعب العلمية للسنة الثالثة ثانوي

3AS

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Meziane Maths

الأستاذ : مزيان محمد

/ Meziane Maths

12/10/2020

LATEX

1 النهايات

قائمة المحتويات

1 السلوك التقاربي لدالة 2
1 نهاية منتهية عند عدد حقيقي 2
2 نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي 2
3 نهاية منتهية عند مالانهاية 3
4 نهاية غير منتهية عند مالانهاية 3

2 المستقيمات المقاربة 4
1 المستقيم المقارب المائل 4
2 البحث عن المستقيم المقارب المائل 4
3 الوضع النسبي لمنحنى و المستقيم المقارب المائل 5

3 العمليات على النهايات 5
1 مبرهنات أولية على النهايات 6
2 نهاية مجموع دالتين 6
3 نهاية جداء دالتين 6
4 نهاية حاصل قسمة دالتين 7

4 نهاية دالة مركبة والنهايات بالمقارنة 9
1 نهاية دالة مركبة 9
2 حساب النهايات بالمقارنة 10

5 إزالة حالة عدم التعيين 11
1 بإستعمال الإختزال 11
2 بإستعمال التحليل 12
3 بإستعمال المرافق 12
4 بإستعمال العدد المشتق 12

6 تمارين محلولة 15

الأستاذ : مزيان محمد

النهايات

1 السلوك التقاربي لدالة

1 نهاية منتهية عند عدد حقيقي

تعريف

f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$ و l عدد حقيقي. القول أن نهاية f عند x_0 هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0. نكتب $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ و نقرأ $f(x)$ يؤول إلى l لما يؤول x إلى x_0.

مثال

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

لدينا : $\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1} x-1=-2$

2 نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

تعريف

f دالة معرفة على $]a,x_0[\cup]x_0,b[$ القول ان نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال $[A,+\infty[$ و $A\in\mathbb{R}$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 ونكتب $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

نتيجة

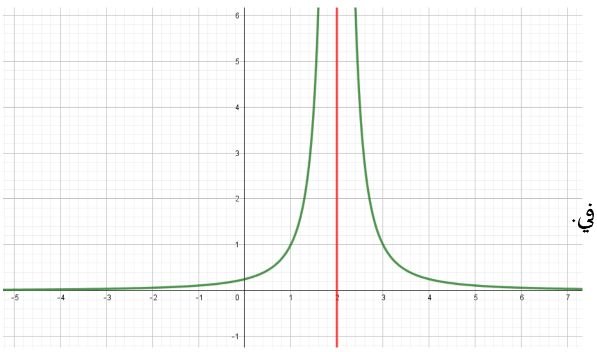
نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x=x_0$ مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة f

مثال 01

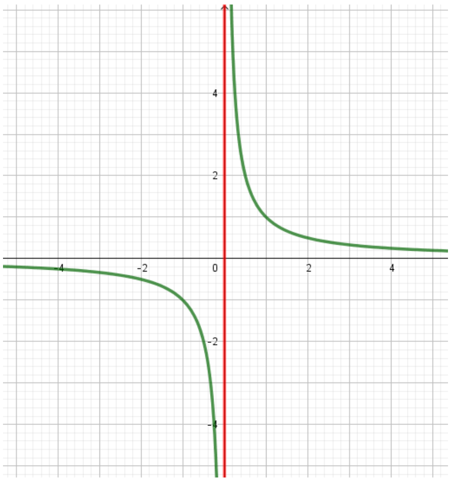
لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ (C_f) التمثيل البياني لدالة f .

يتضح جليا أن $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يقترب x من 2 بالقدر الكافي.

لدينا هكذا $\lim_{x\to 2} f(x)=+\infty$.



مثال 02



لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بِـ $f(x)=\dfrac{1}{x}$.
نعتبر الدالتين $f_1(x)$ و $f_2(x)$ المعرفتين على الترتيب على $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
بـ $f_1(x)=f_2(x)=f(x)$
من الواضح أن $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)=+\infty$
نقول في هذه الحالة أن نهاية f عند 0 من اليسار هي $-\infty$ و أن نهاية f عند 0 من اليمين هي $+\infty$ و نكتب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=+\infty$

3 نهاية منتهية عند مالانهاية

تعريف

f دالة معرفة على $[x_0,+\infty[$ و l عدد حقيقي القول ان نهاية f عند $+\infty$ هي l يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل xكبير بالقدر الكافي ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

نتيجة

نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y=l$ مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة f

أمثلة

◄ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ◄ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ◄ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ ◄ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ ◄ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

4 نهاية غير منتهية عند مالانهاية

تعريف

f دالة معرفة على $]x_0,+\infty[$ القول ان نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أن كل مجال $]A,+\infty[$ و $A\in\mathbb{R}$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير قريب بالقدر الكافي من ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

أمثلة

◄ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ ◄ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ ◄ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ ◄ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ◄ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

2 المستقيمات المقاربة

المستقيمات المقاربة

a و b عددان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

✍ إذا كانت النهاية للدالة f عند a هي $\pm\infty$ $\left(\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty\right)$ فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = a$ هو مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f)

✍ إذا كانت النهاية للدالة f عند $\pm\infty$ هي b $\left(\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b\right)$ فإن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = b$ هو مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f)

✍ إذا كانت $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل للمحنى (C_f)

1 المستقيم المقارب المائل

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $(a \neq 0)$. القول ان المستقيم (Δ) هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ يعني $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

ملاحظة

إذاكانت f دالة بحيث $f(x) = (ax + b) + g(x)$ وكانت $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x^2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

لدينا $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و منه فالمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 3$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و $+\infty$.

2 البحث عن المستقيم المقارب المائل

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $(a \neq 0)$. يكون المستقيم (Δ) هو مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (أو عند $-\infty$ على الترتيب)، إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \to +\infty} [\frac{f(x)}{x}] = a \text{ و } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$$

$$\left(\text{على الترتيب } \lim_{x \to -\infty} [\frac{f(x)}{x}] = a \text{ و } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = b \right)$$

3 الوضع النسبي لمنحنى و المستقيم المقارب المائل

الوضع النسبي لمنحنى و المستقيم المقارب المائل

f دالة عددية و (C_f) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$
وليكن في نفس المستوي المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) ذو المعادلة $y=ax+b$
لمعرفة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل نقوم بحساب الفرق $f(x)-(ax+b)$ ثم ندرس إشارته أي

☜ إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ فإن (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب المائل

☜ إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ فإن (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب المائل

☜ إذا كان $f(x)-(ax+b)=0$ فإن (C_f) و المستقيم المقارب المائل يتقاطعان (حذاري فواصل التقاطع يجب أن تكون في D_f).

تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كمايلي : $f(x)=x+1+\dfrac{5}{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني
في مستوي منسوب إلى معلم

1. المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$
لأن : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{1-x}=0$

2. وظعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

3 العمليات على النهايات

نهايات الدوال المرجعية

✍ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ ✍ $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ ✍ $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ ✍ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ ✍ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ ✍ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$

✍ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ✍ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ ✍ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\dfrac{1}{x}=-\infty$ ✍ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ ✍ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

ملاحظات

- يتم حساب نهاية دالة عند الحدود المفتوحة لمجموعة التعريف.
- إذاكانت دالة قابلة للإشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- إذا قبلت دالة f عند عدد حقيقي a فإن هذه النهاية وحيدة.
- يمكن لدالة لا تقبل نهاية عند حد من حدود من مجموعة تعريفها، فمثلا الدالة $x \mapsto sinx$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$

1 مبرهنات أولية على النهايات

f و g دالتان و α يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و L ، L' أعداد حقيقية.

2 نهاية مجموع دالتين

$\lim_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim_{x\to\alpha} [f(x)+g(x)]$
L	L'	$L+L'$
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

3 نهاية جداء دالتين

$\lim_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim_{x\to\alpha} [f(x)\times g(x)]$
L	L'	$L\times L'$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
$L>0$	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
$L<0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	ح ع ت

4 نهاية حاصل قسمة دالتين

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$L'\neq 0$	$\frac{L}{L'}$
L	$\pm\infty$	0
$+\infty$	$L'>0$	$+\infty$
$-\infty$	$L'>0$	$-\infty$
$+\infty$	$L'<0$	$-\infty$
$-\infty$	$L'<0$	$+\infty$
0	0	ح ع ت
$\pm\infty$	$\pm\infty$	ح ع ت

ملاحظة

✍ تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات : " عدم التعيين (ح ع ت)"

✍ توجد أربع حالات عدم التعيين وهي من الشكل : $+\infty-\infty; 0\times\infty; \frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$

خواص

1 النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية جدها الاعلى درجة عند$+\infty$ $(-\infty)$

2 النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

مثال 01

إذا اعتبرنا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x^3+3x^2$

لدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty\end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ولدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty\end{cases}$ في هذه الحالة لا يمكننا استنتاج نهاية f لإزالة حالة عدم التعيين نكتب $f(x)=x^2(2x+3)$

وبما ان $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+3)=-\infty\end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

مثال 02

لتكن f الدالة الناطقة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+1}{x^2-1}$.

لدينا حالة عدم التعيين بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ إلا أنه بتطبيق القاعدة 2 نتحصل على $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$

تطبيق 01

أدرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f المعرفة على D_f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

1. $D_f = \mathbb{R}$، $f(x) = -x^3 + 2x - 2$
2. $D_f = \mathbb{R}$، $f(x) = 3x^2 + x - 3$
3. $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$، $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{2 - x}$

الحل

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^3\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^2\right) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x^2\right) = +\infty$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{-x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$.

تطبيق 02

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ بـ $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + x - 2}$.

1. حدد حسب قيم x إشارة $x^2 + x - 2$.
2. أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1.
3. أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

الحل

الدالة f معرفة على : $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 1[\cup]1; +\infty[$.

1. ندرس أولا، حسب قيم x إشارة : $x^2 + x - 2$:

لكثير الحدود $x^2 + x - 2$ جذرين هما -2 و 1 و بتطبيق القاعدة المحددة لإشارة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية نجد:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$		$+$	

2. $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} (2x + 3) = -1$ ، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} \left(x^2 + x - 2\right) = 0^+$ و بما أنه من أجل $x < -2$ ، $x^2 + x - 2 > 0$ فإن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} (2x + 3) = -1$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} \left(x^2 + x - 2\right) = 0^-$ و بما أنه من أجل $-2 < x < 1$ ، $x^2 + x - 2 < 0$ فإن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} (2x + 3) = 5$ ، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \left(x^2 + x - 2\right) = 0^-$ و بما أنه من أجل $-2 < x < 1$ ، $x^2 + x - 2 < 0$ فإن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (2x + 3) = 5$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \left(x^2 + x - 2\right) = 0^+$ و بما أنه من أجل $x > 1$ ، $x^2 + x - 2 > 0$ فإن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$.

③ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$ = $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)$ = $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$

4 نهاية دالة مركبة والنهايات بالمقارنة

1 نهاية دالة مركبة

مبرهنة

c و b،a تمثل أعداد حقيقية أو $\pm\infty$ و f، g وh دوال عددية حيث: $f=g\circ h$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to b} g(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a} g\circ h(x)=c$

تطبيق 01

لتكن f الدالة المعرفة على $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left]1;+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$.

حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث : $u(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ و $v(x)=\sqrt{x}$ $(f=v\circ u)$.

بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\sqrt{2}$. نجد كذلك : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{2}$.

بما أن : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} u(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0} v(x)=0$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)=0$.

بما أن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} u(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=+\infty$.

تطبيق 02

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بِ $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)$ و نريد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}$ و $v(x)=\sin x$ $(f=v\circ u)$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\frac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} v(x)=1$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

2 حساب النهايات بالمقارنة

مبرهنة 1 (الحد من الأسفل)

f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$
إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $f(x)\geq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

مبرهنة 2 (الحد من الأعلى)

f و g دالتان معرفتان على D من $\mathbb{R}$
إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ و $f(x)\leq g(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

مبرهنة 3 (الحصر)

f ، gو h دوال و l عدد حقيقي. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$ ، و $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ من أجل x كبير جدا بالقدر الكافي فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$

ملاحظة

تبقى المبرهنات السابقة صحيحة في حالتي : $x\to-\infty$ و $x\to a$ حيث a عدد حقيقي

تطبيق 01

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+\sin x$
نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1\leq \sin x\leq 1$ و منه فإن :
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $x-1\leq x+\sin x\leq x+1$
بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

تطبيق 02

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{2+\sin x}$.
حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$:
من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1\leq \sin x\leq 1$ و منه $1\leq 2+\sin x\leq 3$ أي $\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{2+\sin x}\leq 1$.
✍ لدينا : $\dfrac{1}{2+\sin x}\geq\dfrac{1}{3}$ ومن أجل x من $]-\infty;0]$ لدينا : $\dfrac{x}{2+\sin x}\leq\dfrac{x}{3}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{3}=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
✍ لدينا : $\dfrac{1}{2+\sin x}\geq\dfrac{1}{3}$ ومن أجل x من $[0;+\infty[$ لدينا $\dfrac{x}{2+\sin x}\geq\dfrac{x}{3}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

تطبيق 03

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \le \sin x \le 1$ و منه فإن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$

تطبيق 04

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = 1 + \dfrac{\cos x}{x^2}$.

حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $-1 \le \cos x \le 1$ و منه فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $-\dfrac{1}{x^2} \le \dfrac{\cos x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $1 - \dfrac{1}{x^2} \le 1 + \dfrac{\cos x}{x^2} \le 1 + \dfrac{1}{x^2}$ أي : $1 - \dfrac{1}{x^2} \le f(x) \le 1 + \dfrac{1}{x^2}$

بما أن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

5 إزالة حالة عدم التعيين

1 بإستعمال الإختزال

إزالة حالة عدم التعيين بالإختزال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2;1\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$.

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2} = \frac{(-2)^3+2(-2)^2+(-2)+2}{(-2)^2+(-2)-2} = \frac{0}{0} = \text{ح.ع.ت}$$

إزالة حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2}\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+x-2} = \lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2+1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to-2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2+1)}{\cancel{(x+2)}(x-1)} = \lim_{x\to-2}\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}.$$

2 بإستعمال التحليل

إزالة حالة عدم التعيين بإستعمال التحليل

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=2x+1-\sqrt{x^2+x-2}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x+1-\sqrt{x^2+x-2}=+\infty-\infty=$ ح.ع.ت

إزالة حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x+1-\sqrt{x^2+x-2}=\lim_{x\to+\infty} 2x+1-\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}=\lim_{x\to+\infty} 2x+1-|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} 2x+1-x\sqrt{(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}=\lim_{x\to+\infty} x\left[2+\frac{1}{x}-\sqrt{(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}\right]=+\infty$$

3 بإستعمال المرافق

إزالة حالة عدم التعيين بإستعمال المرافق

نعتبر الدالة f المعرفة على $[2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}=+\infty-\infty=$ ح.ع.ت

إزالة حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\times\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

4 بإستعمال العدد المشتق

إزالة حالة عدم التعيين بإستعمال العدد المشتق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$.

$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=\frac{0}{0}=$ ح.ع.ت

إزالة حالة عدم التعيين

العدد المشتق : $f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

لدينا : $f(x)=\cos x$ و منه : $f'(x) = -\sin x$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = f'(0) = -\sin 0 = 0$$

حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

- $f(x)$ تتضمن جذرًا $\sqrt{}$

  نستعمل طريقة التحليل :
  وضع الحد الأكبر درجة كعامل مشترك .

  $$\sqrt{ax^2+bx+c} = |x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$$
  $$\sqrt{\alpha x+\beta} = |x|\sqrt{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}}$$

- $f(x)$ تتضمن كثيرات حدود فقط

  تطبيق القاعدة التالية :
  عند اللانهاية : كثير الحدود له نفس نهاية الحد الأكبر درجة.

  $$\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$$

حالة عدم التعيين $+\infty-\infty$

$f(x)$ تتضمن جذرًا $\sqrt{}$

- $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$
  - $\sqrt{a}=|\alpha|$: نستعمل طريقة المرافق
  - $\sqrt{a}\neq|\alpha|$: نضع x كعامل مشترك
- $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$
  - $a\neq\alpha$: نستعمل طريقة المرافق
  - $a=\alpha$: نضع x كعامل مشترك
- $f(x)=\sqrt{ax+b}+\alpha x+\beta$: نضع x كعامل مشترك

حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

$f(x)$ تتضمن كثيرات حدود

نستعمل طريقة الإختزال :

1. نحلّل البسط والمقام.
2. ثم نختزل على $(x-a)$

$$f(x)=\frac{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}$$

$f(x)$ تتضمن جذرًا $\sqrt{\quad}$

نستعمل طريقة المرافق :

1. نضرب : $f(x)\times\frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}}$
2. ثم نختزل على : $(x-a)$

المقام من الشكل $(\alpha x+\beta)$

نستعمل طريقة العدد المشتق :

1. إظهار العبارة : $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$

$$\frac{\cdots\cdots}{\alpha x+\beta}=\frac{1}{\alpha}\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$

$f(x)$ تتضمن $\sin x$ و $\cos x$

نظهر إحدى النهايات الشهيرة التالية :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

تطبيقات

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-3}}{x+2}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ تكافئ : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2-3/x}}{x(1+2/x)}$ تكافئ : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2}}{x}=-\sqrt{2}$

2. $f(x)=\sqrt{4x^2-3}+2x-2$ من الشكل $(\sqrt{a}=|a|)$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ تكافئ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}+(2x-2)\right)\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}$ تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{-2x\left(\sqrt{1}+1\right)}$ تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x}{-4x}=-2$

3. $f(x)=\sqrt{4x^2-3}+x-2$ من الشكل $\left(\sqrt{a}\neq|a|\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ تكافئ

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}+x-2$ تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}-x\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+x-2$

تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}-x\left[\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right]$ تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}-3x=+\infty$

4. $f(x)=\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{4x^2-2}$ $(+\infty-\infty,\ a=\alpha)$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ تكافئ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{4x^2-2}\right)\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}$$

تكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}$ تكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x}=0$

5. $f(x)=\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{9x^2-2}$ $(+\infty-\infty,\ a\neq\alpha)$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ تكافئ

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{9x^2-2}$ تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}-x\sqrt{4-3/x^2}-x\sqrt{9-2/x^2}$ تكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}-x[2-3]$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

6. $f(x)=\sqrt{2x-3}-3x+2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ تكافئ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x-3}-3x+2$

تكافئ $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}-3x+2$

تكافئ $\lim_{x\to+\infty} x[\sqrt{2}-3]$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

7 $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ ، $(0/0)$

تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1} \frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1} \frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$ تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1} \frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=\frac{1}{4}$

8 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$ تكافئ $\lim_{x\overset{>}{\to}1} (x+1)$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=2$

9 $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

لحساب $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ يجب أن تكون $\lim_{x\overset{>}{\to}1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ تكافئ $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} f(x)=g'(x_0)$

ومنه بوضع $g(x)=\sqrt{x+3}$ نجد $g(1)=2$ ومنه $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ ومنه $g'(1)=\frac{1}{4}$ ومنه $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=\frac{1}{4}$

6 تمارين محلولة

التمرين 01

عين مجموعة تعريف كل دالة فيما يلي ثم احسب النهايات عند أطرافها.

1 $f(x)=\frac{3x^3+x-4}{x-1}$

2 $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

3 $f(x)=\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+4x+3}$

4 $f(x)=\frac{4x^4+2x^3+2x+1}{4x^2-4x-3}$

الحل

1 لدينا : $f(x)=\frac{3x^2+x-4}{x-1}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x-1\neq 0\}$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ أي : $D_f=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} 3x=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} 3x=+\infty$

$\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{3x^2+x-4}{x-1}=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{(x-1)(3x+4)}{x-1}=\lim_{x\overset{<}{\to}1}(3x+4)=7$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (3x+4) = 7$.

2 لدينا : $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2-5x+6 \neq 0\}$

نحل المعادلة : $x^2-5x+6=0$ فنجد : $x=2$ أو $x=3$ ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{2;3\}$ أي : $D_f =]-\infty;2[\cup]2;3[\cup]3;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

لحساب بقية النهايات : نكتب جدول إشارة المقام

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$+$	0	$-$		$+$	

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{x+2}{x-3} = -4$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{x+2}{x-3} = -4$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = -\infty$: لأن $\begin{cases} x^2-4 \longrightarrow 5 \\ x^2-5x+6 \longrightarrow 0^- \end{cases}$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = +\infty$: لأن $\begin{cases} x^2-4 \longrightarrow 5 \\ x^2-5x+6 \longrightarrow 0^+ \end{cases}$

3 لدينا : $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+4x+3}$ $D_f = \{x \in : x^2+4x+3 \neq 0\}$

نحل المعادلة $x^2+4x+3=0$ فنجد $x=-1$ أو $x=-3$ إذن : $D_f = \mathbb{R} - \{-3;-1\}$ أي : $D_f =]-\infty;-3[\cup]-3;-1[\cup]-1;+\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \underset{>}{\overset{<}{\to}} -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+4x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)(x^2-4)}{(x+3)(x+1)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2-4}{x+1} = \dfrac{-5}{2}$

إشارة المقام لحساب النهايات :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$3x^2+4x+3$		$+$	0	$-$		$+$	

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+4x+3} = +\infty$: لأن $\begin{cases} x^3+3x^2-4x-12 \longrightarrow -6 \\ x^2+4x+3 \longrightarrow 0^- \end{cases}$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} \frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+4x+3} = -\infty$$: لأن $\begin{cases} x^3+3x^2-4x-12 \longrightarrow -6 \\ x^2+4x+3 \longrightarrow 0^+ \end{cases}$

4 لدينا : $f(x) = \dfrac{4x^4+2x^3+2x+1}{4x^2-4x-3}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2-4x-3 \neq 0\}$

نحل المعادلة : $4x^2-4x-3=0$ نجد : $x=-\dfrac{1}{2}$ أو $x=\dfrac{3}{2}$ و منه : $D_f = -\left\{\mathbb{R} - \dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$

أي : $D_f = \left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^4}{4x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$ و $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^4}{4x^2} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)(2x^3+1)}{(2x+1)(2x-3)} = \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{2x^3+1}{2x-3} = \frac{\frac{3}{4}}{-4} = \frac{-3}{16}$$

إشارة المقام لحساب النهايات :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-4x-3$		+	0	−		+	

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{3}{2}} \frac{4x^4+2x^3+2x+1}{4x^2-4x-3} = -\infty$$: لأن $\begin{cases} 4x^4+2x^3+2x+1 \longrightarrow 41 \\ 4x^2-4x-3 \longrightarrow 0^- \end{cases}$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} \frac{3}{2}} \frac{4x^4+2x^3+2x+1}{4x^2-4x-3} = +\infty$$: لأن $\begin{cases} 4x^4+2x^3+2x+1 \longrightarrow 41 \\ 4x^2-4x-3 \longrightarrow 0^+ \end{cases}$

التمرين 02

احسب النهايات التالية :

1 $\lim_{x\to4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-4}}$ 2 $\lim_{x\to2} \dfrac{x^2+x-6}{\sqrt{x-2}}$ 3 $\lim_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$ 4 $\lim_{x\to0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

الحل

1 $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-4}}=\lim\limits_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-4}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2x-4}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-4}\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{(x+5-9)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-4}\right)}{[x-(2x-4)]\left(\sqrt{x+5}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2x-4}\right)}{-(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2x-4}}{-\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\frac{2+2}{-(3+3)}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

2 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x^2+x-6)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}.\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)\sqrt{x-2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+3)\sqrt{x-2}=0$

3 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to}\frac{\left[\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}\right]\left[\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right]}{(x-1)\left[\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right]}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-(2x-1)}{(x-1)\left[\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right]}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-(x-1)}{(x-1)\left[\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}\right]}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{2x-1}}=-\frac{1}{2}$

4 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}{\left[\sqrt{x+1}-1\right]\left[\sqrt{x+1}+1\right]}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}{(x+1)-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x+1}+1=2$

التمرين 03

احسب النهايات التالية :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{4x^2+x}}$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+\sqrt{4x^2+x+1}}{-4x-\sqrt{x^2+1}}$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}-x+\sqrt{x}$

5 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}$

6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}}$

الحل

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{4x^2+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-x\sqrt{4+\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left[2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}{x\left[1-\sqrt{4+\frac{1}{x}}\right]}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\sqrt{4+\frac{1}{x}}}=\frac{2-1}{1-2}=-1$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+\sqrt{4x^2+x+1}}{-4x-\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{-4x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-4x-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-4x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-4x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left[-1-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}{x\left[-4+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-4+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{-1-2}{-4+1}=1$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]\left[\sqrt{x^2+1}+x\right]}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\sqrt{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\sqrt{x}.\sqrt{x}+\sqrt{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(-\sqrt{x}+1\right)=-\infty$

5 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right]\left[\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right]}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+1)-(x^2+2)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}=0$

6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)}{\left[-x-\sqrt{x^2+4}\right]\left[-x+\sqrt{x^2+4}\right]}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)}{x^2-(x^2+4)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-5}{4}\left[-x+\sqrt{x^2+4}\right]=-\infty$

التمرين 04

احسب النهايات التالية :

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sin 3x}$ 2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ 3 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x}$ 4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ 5 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

الحل

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}}{3.\frac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{1}{3}$

2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}2\times\dfrac{\sin 2x}{2x}=2$

3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{\sin x}{cosx}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}\times cosx=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2.\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}}\times cosx=2$

4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}cos^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2cos\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{2}$

5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-cosx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-\left(1-2\sin\frac{x^2}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xcos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}=2$

التمرين 05

احسب النهايات التالية :

1 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{cosx}$ 2 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+cos4x}$ 3 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x-cosx}{1-\sin x+cosx}$

الحل

1 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$

بوضع : $x-\frac{\pi}{2}=z$ أي : $x=\frac{\pi}{2}+z$ لما $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$ فإن : $z\longrightarrow 0$ وعليه :

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos3x}{cosx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos3\left(\frac{\pi}{2}+z\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\left(\frac{3\pi}{2}+3z\right)}{-\sin z}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{cos\frac{3\pi}{2}cos3z-\sin\frac{3\pi}{2}\sin 3z}{-\sin z}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin 3z}{-\sin z}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{3.\frac{\sin 3z}{3z}}{\frac{-\sin z}{z}}=-3$$

2 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+cos4x}$

بوضع : $x-\frac{\pi}{4}=z$ أي : $x=\frac{\pi}{4}+z$ لما $x\longrightarrow\frac{\pi}{4}$ فإن : $z\longrightarrow 0$ وعليه

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2x}{1+\cos4x}=\lim_{z\to0}\frac{1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+z\right)}{1+\cos4\left(\frac{\pi}{4}+z\right)}=\lim_{z\to0}\frac{1-2\left[\sin\frac{\pi}{4}\cos z+\cos\frac{\pi}{4}\sin z\right]^2}{1+\cos(\pi+4z)}=\lim_{z\to0}\frac{1-2\left(\frac{\sqrt2}{2}\cos z+\frac{\sqrt2}{2}\sin z\right)^2}{1-\cos4z}$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{1-2\times\frac12(\cos z+\sin z)^2}{1-\cos4z}$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{1-\left(\cos^2z+\sin^2z+2\sin z\cos z\right)}{1-\cos4z}$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{1-(1+2\sin z\cos z)}{1-\cos4z}$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{-2\sin z.\cos z}{1-\cos4z}=\lim_{z\to0}\frac{-2\sin z.\cos z}{1-\left(1-2\sin^22z\right)}$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{-2\sin z.\cos z}{2\sin^22z}=\lim_{z\to0}\frac{-\sin z.\cos z}{(2\sin z.\cos z)^2}$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{-\sin z.\cos z}{4\sin^2z.\cos^2z}=\lim_{z\to0}\frac{-1}{4\sin z.\cos z}$$

و عليه :

$$\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2x}{1+\cos4x}=\lim_{z\overset{<}{\to}0}\frac{-1}{4\sin z.\cos z}=+\infty$$ و $$\lim_{x\overset{>}{\to}\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2x}{1+\cos4x}=\lim_{z\overset{>}{\to}0}\frac{-1}{4\sin z.\cos z}=-\infty$$

3 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}$

بوضع $x-\frac{\pi}{2}=z$ نجد : $x=\frac{\pi}{2}+z$ لما $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$ فإن : $z\longrightarrow 0$ وعليه :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos z+\sin z}{1-\cos z-\sin z}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sin\left(1-2\sin^2\frac{z}{2}\right)+2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{1-\left(1-2\sin^2\frac{z}{2}\right)-2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}=\lim_{z\to0}\frac{2\sin^2\frac{z}{2}+2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{2\sin^2\frac{z}{2}-2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}=\lim_{z\to0}\frac{2\sin\frac{z}{2}\left[\sin\frac{z}{2}+\cos\frac{z}{2}\right]}{2\sin\frac{z}{2}\left[\sin\frac{z}{2}-\cos\frac{z}{2}\right]}$$
$$=\lim_{z\to0}\frac{\sin\frac{z}{2}+\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}-\cos\frac{z}{2}}=\frac{1}{-1}=-1$$

التمرين 06

تعتبر الدالة f : $f(x)=\frac{x^2+x-4}{x+1}$ (C_f) تمثيلها البياني .

1 عين مجموعة تعريف الدالة ثم أحسب النهايات عند أطرافها.

2 بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\mathrm{a}x+\mathrm{b}+\frac{\mathrm{c}}{x+1}$ حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

3 عين معادلات المستقيمات المقاربة.

4 نفرض (Δ) المستقيم المقارب المائل.

* ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) .

الحل

1 مجموعة التعريف : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ ؛ $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

- النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}-1}\frac{x^2+x-4}{x+1}=+\infty : \text{لأن} \begin{cases} x^2+x-4\longrightarrow -4 \\ x+1\longrightarrow 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{x^2+x-4}{x+1}=-\infty : \text{لأن} \begin{cases} x^2+x-4\longrightarrow -4 \\ x+1\longrightarrow 0^+ \end{cases}$$

2 تبيان أنه يمكن كتابة على الشكل : $f(x)=\mathrm{a}x+\mathrm{b}+\frac{\mathrm{c}}{x+1}$

إذن :

$$f(x)=\frac{(\mathrm{a}x+\mathrm{b})(x+1)+\mathrm{c}}{x+1}=\frac{\mathrm{a}x^2+\mathrm{a}x+\mathrm{b}x+\mathrm{b}+\mathrm{c}}{x+1}=\frac{\mathrm{a}x^2+(\mathrm{a}+\mathrm{b})x+\mathrm{b}+\mathrm{c}}{x+1}$$

ومنه : $\begin{cases}\mathrm{a}=1\\ \mathrm{a}+\mathrm{b}=1\\ \mathrm{b}+\mathrm{c}=-4\end{cases}$ أي : $\begin{cases}\mathrm{a}=1\\ \mathrm{b}=0\\ \mathrm{c}=-4\end{cases}$ إذن : $f(x)=x-\frac{4}{x+1}$

3 تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=+\infty$ فإن : $x=-1$ معادلة مستقيم مقارب.

و بما أن : $f(x)=x-\frac{4}{x+1}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x+1}=0$ فإن : $y=x$ معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

4 دراسة الوضع النسبي لـ (Δ) و (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ و منه : $f(x)-\mathrm{y}=\frac{-4}{x+1}$ ومنه : و بالتالي الوضع النسبي :

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$	
$f(x)-y$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

إذن (C_f) لا يقطع (Δ) .

لما $x \in]-\infty;-1[$: (C_f) يقع فوق (Δ) .

لما $x \in]1;+\infty[$: (C_f) يقع تحت (Δ) .

التمرين 07

لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x-1-\frac{1}{x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.

1. بين أن المستقيم $(\Delta): y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.
2. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

الحل

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}=0$. و منه المستقيم $(\Delta): y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.
2. لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-(ax+b)\right]$.
$\left[f(x)-(x-1)\right]=-\frac{1}{x}$ و منه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\left[f(x)-(x-1)\right]<0$.
إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب المائل (Δ).

x	0 $\quad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$-$
الوضعية	(C_f)تحت (Δ)

التمرين 08

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=2x+\sqrt{x^2+1}$

1. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]$ ثم $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$.

3 عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

الحل

1 حساب النهايات : $D_f=]-\infty;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}2x+\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}2x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}2x+\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}2x+|x|.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}2x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}x\left[2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2x+\sqrt{x^2+1}=+\infty$$

2 حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]$ ثم $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-3x=\lim_{x\to+\infty}2x+\sqrt{x^2+1}-3x=\lim_{x\to+\infty}-x+\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x-\sqrt{x^2+1}\right)}{-x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-(x^2+1)}{-x-\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}2x+\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}=0$$

3 تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=0$ فإن : $y=3x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$ فإن : $y=x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

التمرين 09

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\frac{4+\sin x}{x^2}$.

1 عين عددان حقيقيان a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $a\le 4+\sin x\le b$

2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون : $v(x)\le f(x)\le u(x)$ حيث u و v دالتان يطلب تعيينهما.

3 استنتج النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

4 أحسب $\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

الحل

1 تعيين a و b :
لدينا : $-1 \le \sin x \le 1$ ومنه : $3 \le 4+\sin x \le 5$

2 تبيان أن : $v(x) \le f(x) \le u(x)$
لدينا : $3 \le 4+\sin x \le 5$ وعليه : $\frac{5}{x^2} \le \frac{4+\sin x}{x^2} \le \frac{3}{x^2}$ ومنه : $\frac{3}{x^2} \le f(x) \le \frac{5}{x^2}$

3 استنتاج النهايات :
• بما أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

• بما أن : $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ فإن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

4 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4+\sin x}{x^2} = +\infty$

التمرين 10

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = \frac{(\alpha-1)x+1}{(\alpha^2-1)x-3}$ حيث α عدد حقيقي .

* احسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

الحل

* حساب النهايات :
$\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to-\infty} f(x)$

✍ إذا كان $\alpha - 1 = 0$ أي $\alpha = 1$: $f(x) = -\frac{1}{3}$

وعليه : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$

✍ إذا كان : $\alpha^2 - 1 = 0$ و $\alpha - 1 \ne 0$ أي $\alpha + 1 = 0$ ومنه : $\alpha = -1$.

$f(x) = \frac{-2x+1}{-3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}x = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$

✍ إذا كان : $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\alpha-1)x}{(\alpha^2-1)x} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-1} = \frac{1}{\alpha+1}$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\alpha-1)x}{(\alpha^2-1)x} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-1} = \frac{1}{\alpha+1}$