المستوى : 3 ع ت	الموضوع : دراسة الظواهر الكهربائية	الأستاذ : مداسي عبد الحميد

تطور التوتر الكهربائي بين طرفي مكثفة

ثنائي القطب RC

1- تعريف المكثفة :

المكثفة عنصر كهربائي قادر على تخزين شحنة كهربائية ، تتكون من ناقلين كهربائيين ، تدعى كل منها لبوس المكثفة يفصل بينهما مادة عازلة للكهرباء .

الرمز الاصطلاحي للمكثفة :

2- سعة وشحنة مكثفة : العلاقة $q = C\,.u$

سعة مكثفة : مقدار مميز للمكثفة وهي النسبة بين الشحنة الكهربائية Q و التوتر U بين لبوسيها ، رمزها C.وتعطى بالعلاقة التالية : $C = \frac{Q}{U}$

حيث : وحدة الشحنة Q هي الكولون (C) .

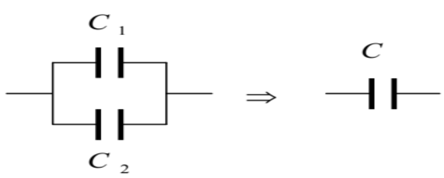
وحدة التوتر U هي الفولط (V) .

وحدة السعة C هي الفاراد (F) .

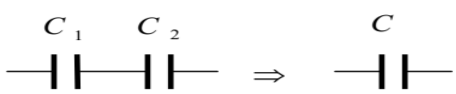
ملاحظة : - السعة C مقدار مميز للمكثفة لا يتغير مهما كانت الدارة التي تربط في المكثفة .

- للفاراد أجزاء هي : - ميكروفاراد (حيث : $1\mu F = 10^{-6}F$).
- نانوفاراد (حيث : $1nF = 10^{-9}F$).
- بيكوفاراد (حيث : $1pF = 10^{-12}F$).

- السعة المكافئة C لمكثفتين موصولتين على التفرع سعتاهما C_1 و C_2 تعطى بالعلاقة التالية: $C = C_1 + C_2$



- السعة المكافئة C لمكثفتين موصولتين على التسلسل سعتاهما C_1 و C_2 تعطى بالعلاقة التالية: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$



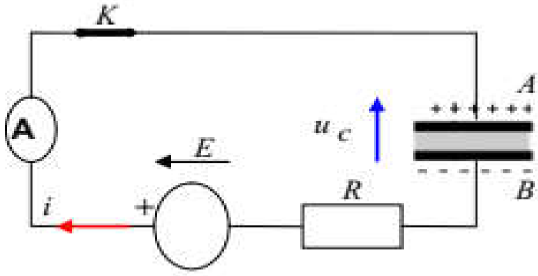
3- شحن وتفريغ مكثفة :

شحن مكثفة : نحقق الدارة المبينة في الشكل المقابل (غلق القاطعة k المكثفة غير مشحونة).

عند غلق القاطعة :

- نلاحظ انحراف إبرة الأمبير متر نحو قيمة عظمى ثم عودتها إلى الصفر (مرور تيار كهربائي لفترة قصيرة) أي أن القطب الموجب للمولد قام بسحب الالكترونات من اللبوس (A) ودفعها نحو اللبوس (B) دون عبورها للعازل .

ملاحظة 1 :



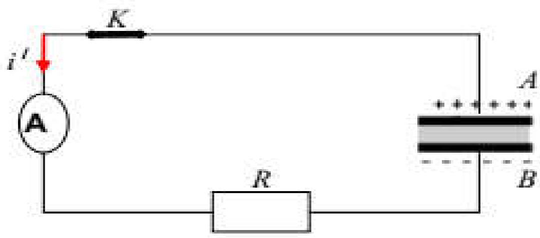
- انعدام شدة التيار يعني أن عملية الشحن قد انتهت وعندها يكون $E_C \approx E$
- إن اكتمال الشحن يعني $q_A = -q_B$ أي: $q_A + q_B = 0$

ملاحظة 2 :

- يمكن فصل المكثفة من الدارة وتبقى مشحونة .

تفريغ مكثفة :

نفصل المكثفة (وهي مشحونة) عن المولد ونربطها مع ناقل أومي كما هو مبين في الشكل المقابل .



- نلاحظ مرور التيار الكهربائي في الدارة عكس الجهة التي مر فيها أثناء شحن المكثفة .

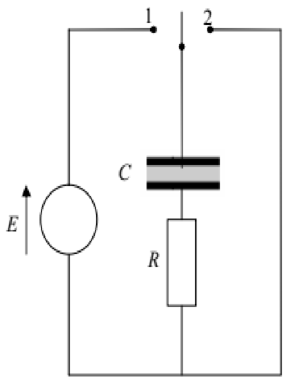
في هذه الحالة تلعب المكثفة دور مولد مؤقت .

- لحظة إفراغ المكثفة ينعدم التيار وعندها يكون التوتر بين طرفي المكثفة معدوم $u_c = 0$.

4- المعادلة التفاضلية لتطور التوتر الكهربائي u_c :

لدراسة تطور التوتر بين طرفي المكثفة u_c وشدة التيار i في حالتي :

- شحن مكثفة .
- تفريغ مكثفة .



نقوم بما يلي :

1- تحقيق التركيب التجريبي المبين في الشكل المقابل .

2- تطبيق قانوني : - قانون جمع التوترات.

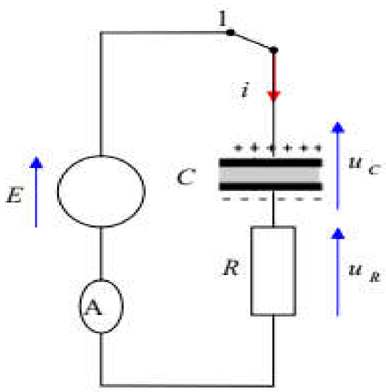
- قانون أوم .

3- توظيف العلاقات التالية :

$$\begin{cases} q = C.u_c \\ i = \frac{dq}{dt} \end{cases} \Longrightarrow \quad i = C\frac{du_c}{dt}$$

الشحن : (البادلة في الوضع 1) :

- **المعادلة التفاضلية لتطور التوتر الكهربائي u_c :**



بتطبيق قانون جمع التوترات :

$u_c + u_R = E$ ومنه $u_c + R.i = E$

ونعلم أن $i = C\frac{du_c}{d}$ إذن $u_c + R.C\frac{du_c}{dt} = E$

وبقسمة طرفي المعادلة على المقدار RC نحصل على المطلوب :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{E}{RC} \ldots\ldots(1)$$

ملاحظة :

يمكننا إتباع نفس الطريق لإجاد :

ـ المعادلة التفاضلية لتطور الشحنة q :

بتطبيق قانون جمع التوترات :

$u_c + u_R = E$ ومنه $u_c + R.i = E$

ونعلم أن $i = \frac{dq}{dt}$ و $u_c = \frac{q}{c}$ إذن $\frac{q}{c} + R\frac{dq}{dt} = E$

وبقسمة طرفي المعادلة على المقدار R نحصل على المطلوب :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$$

ـ المعادلة التفاضلية لتطور التوتر الكهربائي u_R:

بتطبيق قانون جمع التوترات :

$$u_c + u_R = E$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن نجد : $\frac{du_c}{dt} + \frac{du_R}{dt} = 0 \;.....(2)$

نعلم أن : $u_R = R.i = RC\frac{du_c}{dt}$ ومنه $\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{RC}u_R$

بتعويض قيمة $\frac{u_c}{dt}$ في المعادلة (2) نحصل على المطلوب :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0$$

ـ تطور التوتر u_c:

نحصل عليه بحل المعادلة التفاضلية (1) : $u_c = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

ـ تطور شدة التيار i المارة في الدارة :

نحصل عليه بتطبيق العلاقة التالية: $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)\right]$

بالاشتقاق بالنسبة لزمن نجد : $i = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$

ـ تطور التوتر الكهربائي u_R بين طرفي الناقل الأومي :

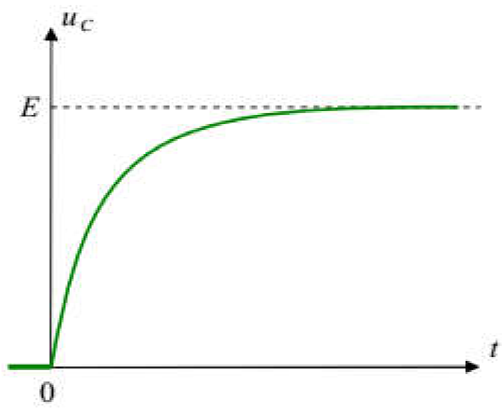
نحصل عليه بتطبيق قانون أوم : $u_R = R.i = R\left(\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

ومنه : $u_R = E.e^{\frac{-1}{RC}t}$

التمثيل البياني (حالة الشحن)

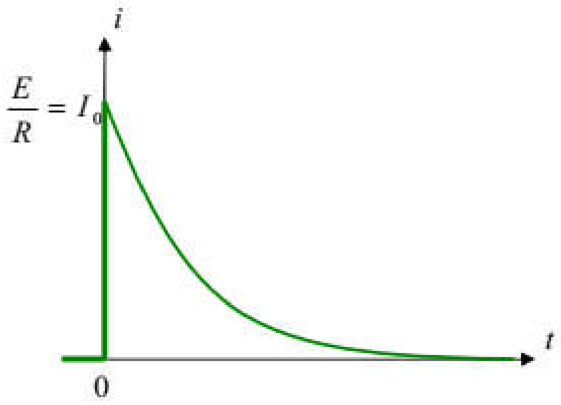
- التمثيل البياني : $u_c = f(t)$

$$u_c = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$



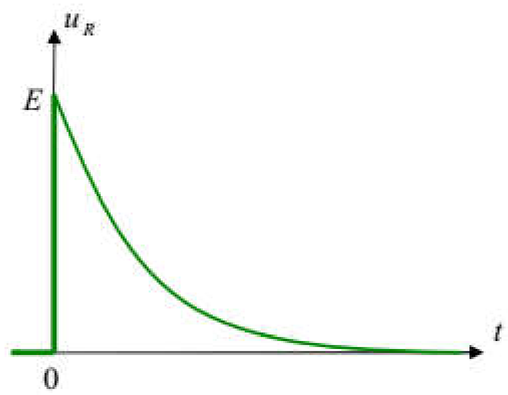
- التمثيل البياني : $i = f(t)$

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

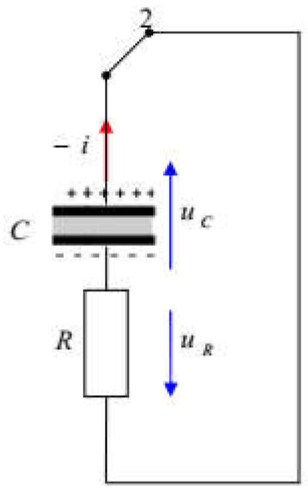


- التمثيل البياني : $u_R = f(t)$

$$u_R = E . e^{\frac{-1}{RC}t}$$



التفريغ : (البادلة في الوضع 2) :



ـ المعادلة التفاضلية لتطور التوتر الكهربائي u_c :

بتطبيق قانون جمع التوترات :

$u_c + u_R = 0$ ومنه $u_c + R.i = 0$

ونعلم أن $i = C\frac{du_c}{d}$ إذن $u_c + R.C\frac{du_c}{dt} = 0$

وبقسمة طرفي المعادلة على المقدار RC نحصل على المطلوب :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = 0 \ldots\ldots(2)$$

ملاحظة :

يمكننا إتباع نفس الطريق لإجاد :

ـ المعادلة التفاضلية لتطور الشحنة q :

بتطبيق قانون جمع التوترات :

$u_c + u_R = 0$ ومنه $u_c + R.i = 0$

ونعلم أن $i = \frac{dq}{dt}$ و $u_c = \frac{q}{c}$ إذن $\frac{q}{c} + R\frac{dq}{dt} = 0$

وبقسمة طرفي المعادلة على المقدار R نحصل على المطلوب :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$$

ـ المعادلة التفاضلية لتطور التوتر الكهربائي u_R :

بتطبيق قانون جمع التوترات :

$$u_c + u_R = 0$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن نجد :(3)..... $\frac{du_c}{dt} + \frac{du_R}{dt} = 0$

نعلم أن : $u_R = R.i = RC\frac{du_c}{dt}$ ومنه $\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{RC}u_R$

بتعويض قيمة $\frac{u_c}{dt}$ في المعادلة (3) نحصل على المطلوب :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0$$

ـ تطور التوتر u_c :

نحصل عليه بحل المعادلة التفاضلية (2) : $u_c = E.e^{-\frac{1}{RC}t}$

ـ تطور شدة التيار i المارة في الدارة :

نحصل عليه بتطبيق العلاقة التالية: $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[E.e^{-\frac{1}{RC}t}\right]$

بالاشتقاق بالنسبة لزمن نجد : $i = -\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$

- تطور التوتر الكهربائي u_R بين طرفي الناقل الأومي :

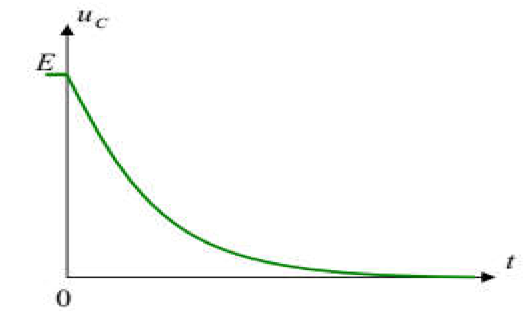
نحصل عليه بتطبيق قانون أوم : $u_R = R.i = R\left(-\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

ومنه : $u_R = -E.e^{\frac{-1}{RC}t}$

التمثيل البياني (حالة تفريغ)

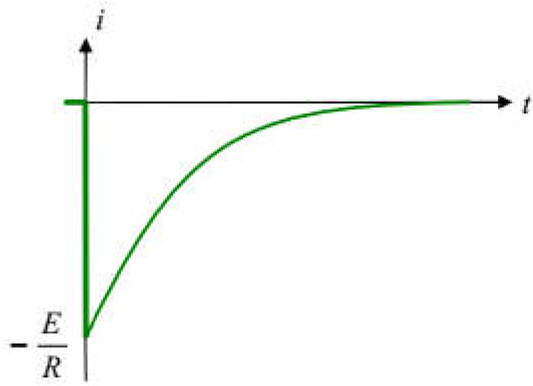
- التمثيل البياني : $u_c = f(t)$

$$u_c = E.e^{-\frac{1}{RC}t}$$



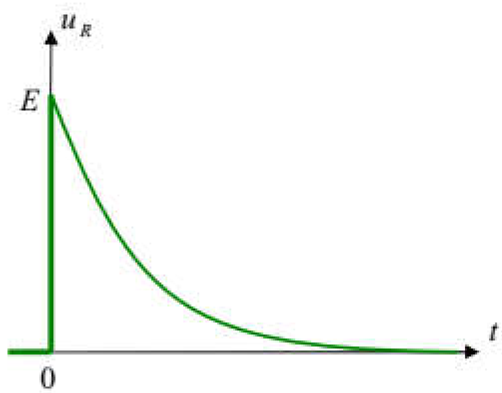
- التمثيل البياني : $i = f(t)$

$$i = -\frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$



- التمثيل البياني : $u_R = f(t)$

$$u_R = -E.e^{\frac{-1}{RC}t}$$



5- ثابت الزمن τ :

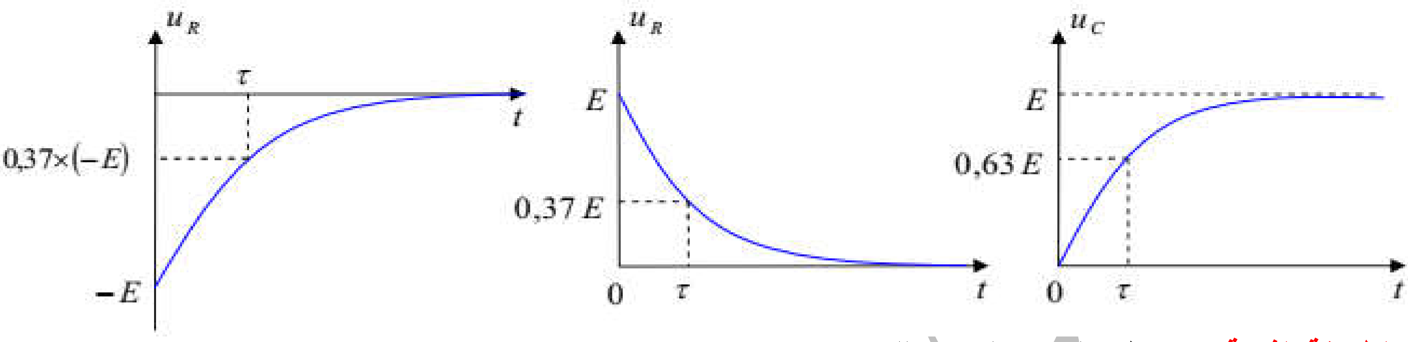
إن الجداء RC متجانس مع الزمن حيث : $[R.C]=\frac{[u]}{[I]}\times\frac{[I][T]}{[u]}=[T]$

يسمى الجداء RC ثابت الزمن لثنائي القطب (RC) يرمز بـ τ ووحدته الثانية .

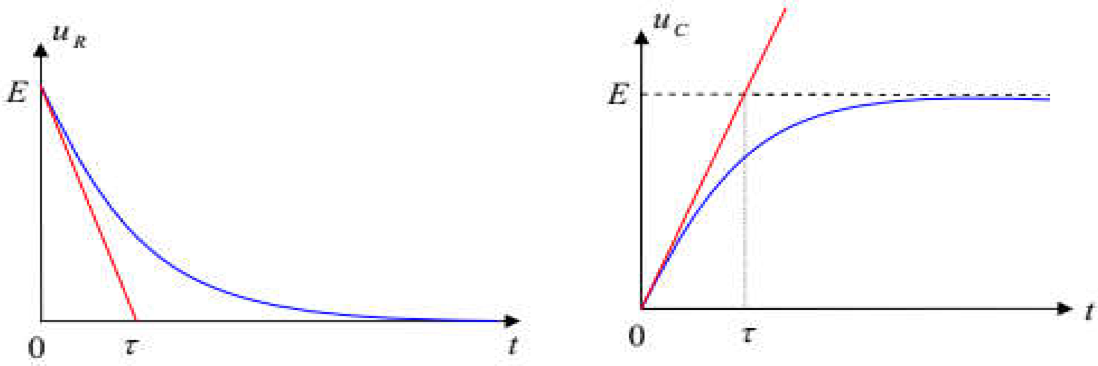
$$\tau = R.C$$

تحديد ثابت الزمن τ بيانيا :

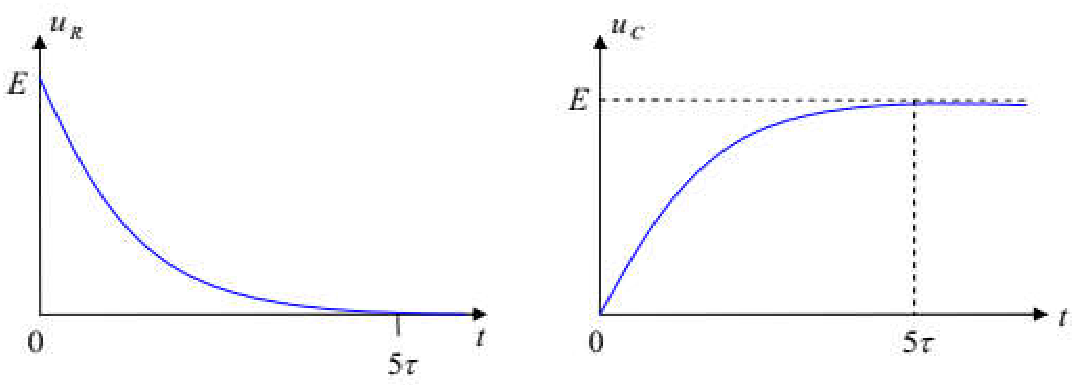
- الطريقة الأولى : هي طريقة 63% (أو 37%)



- الطريقة الثانية : هي طريقة رسم المماس للبيان عند $t=0$



الطريقة الثالثة : نهاية النظام الانتقالي حيث $t\approx 5\tau$

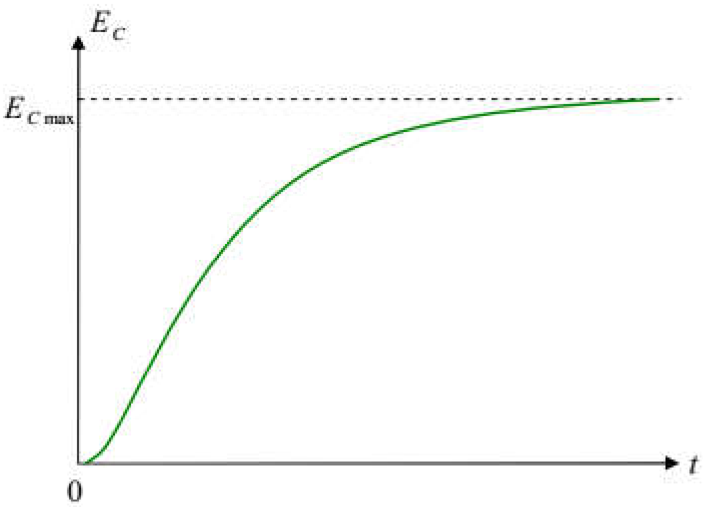


6- الطاقة المخزنة في مكثفة :

عبارة الطاقة المخزنة في المكثفة E_c في كل لحظة t :

$$E_c = \frac{1}{2}C\,u_c^2 = \frac{1}{2}q u_c$$

خلال الشحن :



عبارة الطاقة المخزنة في المكثفة هي : $E_c = \frac{1}{2}Cu_c^2$

بما أن $u_c = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ أثناء الشحن تؤول العبارة السابقة إلى الشكل التالي :

$$E_c = \frac{1}{2}CE^2\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)^2$$

- الطاقة الأعظمية :

$$E_{c\,max} = \frac{1}{2}CE^2$$

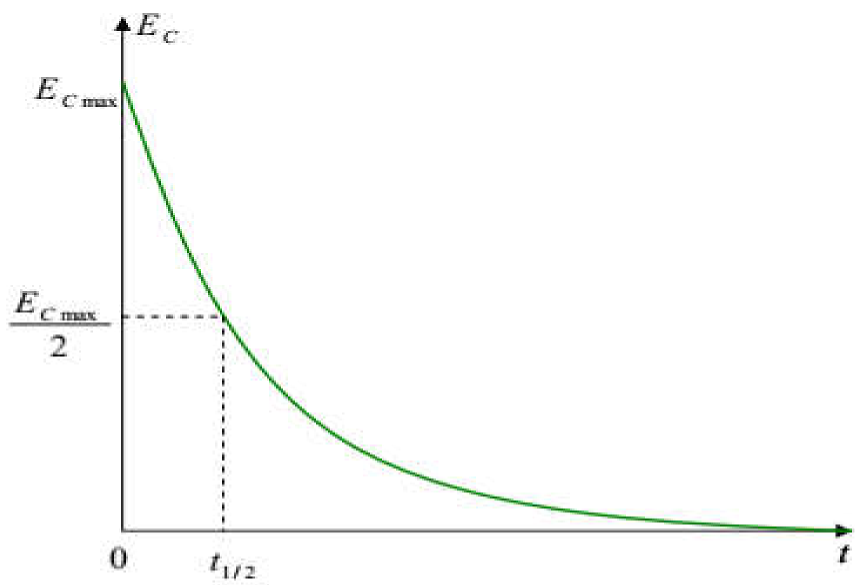
خلال التفريغ :

عبارة الطاقة المخزنة في المكثفة هي : $E_c = \frac{1}{2}Cu_c^2$

بما أن $E_c = E.e^{-\frac{1}{RC}t}$ أثناء التفريغ تؤول العبارة السابقة إلى الشكل التالي :

$$E_c = \frac{1}{2}CE^2.e^{-\frac{2}{RC}t}$$

- زمن تناقص طاقة المكثفة الى نصف $t_{1/2}$ هو $t_{1/2} = \frac{\tau}{2}\ln(2)$



تطور شدة التيار الكهربائي المار في وشيعة

ثنائي القطب RL

1- تعريف ذاتية الوشيعة :

الوشيعة : عنصر كهربائي يتألف من سلك (عادة من نحاس) ملفوف على شكل حلقات معزول بطبقة عازلة .

الذاتية L : مقدار مميز للوشيعة تتعلق قيمته بالشكل الهندسي للوشيعة (طولها l ، نصف قطرها R عدد لفاتها N) .

ملاحظة : تتميز الوشيعة بمقدارين ثابتين : - ذاتيتها L (تقاس بـ : هنري H) .

- مقاومتها r (تقاس بـ: الأوم Ω) .

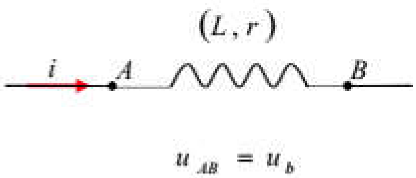
- الرمز الاصطلاحي للوشيعة :

أو :

- إذا كانت الوشيعة صرفة (مقاومتها الداخلية مهملة $r = 0$) فيرمز لها بالشكل التالي :

2- التوتر بين طرفي الوشيعة : $u_b = ri + L\frac{di}{dt}$

تعطى عبارة التوتر بين طرفي الوشيعة بالشكل التالي :



$$u_{AB} = ri + L\frac{di}{dt}$$

- في حالة شدة التيار المار في الوشيعة ثابتة i : $\frac{di}{dt} = 0$ في هذه الحالة تتصرف الوشيعة كناقل أومي ويكون التوتر بين طرفيها : $u_{AB} = ri$.

- إذا كانت شدة التيار i متغيرة والوشيعة صرفة $r = 0$: يكون التوتر بين طرفيها : $u_{AB} = L\frac{di}{dt}$

ملاحظة : يمكن أن نرمز للتوتر بين طرفي الوشيعة بـ u_L .

3- المعادلة التفاضلية لتطور شدة التيار في ثنائي القطب RL :

- خلال ظهور التيار (تطبيق التيار):

لدراسة تطور شدة التيار في ثنائي القطب RL في *حالة تطبيق التيار* **نقوم بما يلي :**

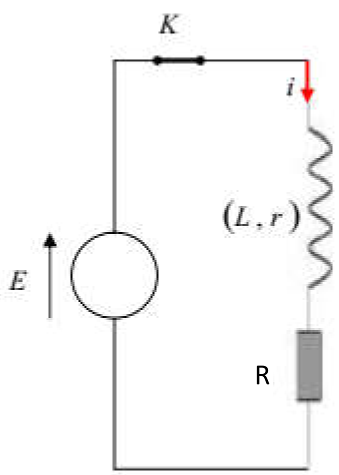
1- تحقيق التركيب التجريبي المبين في الشكل المقابل .

2- تطبيق قانوني : - قانون جمع التوترات.

- قانون أوم .

3- توظيف العلاقة التالية :

$$u_b = ri + L\frac{di}{dt}$$



1- المعادلة التفاضلية لتطور شدة التيار i :

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_R + u_b = E$

نعلم أن: $u_b = ri + L\frac{di}{dt}$ و $u_R = R.i$

أي : $R.i + r.i + L\frac{di}{dt} = E$ إذن : $(R+r)i + L\frac{di}{dt} = E$

بقسمة طرفي المعادلة على L نجد : $\frac{di}{dt} + \frac{(R+r)}{L}i = \frac{E}{L} \ldots\ldots (1)$ وهي المعادلة التفاضلية لتطور شدة التيار في ثنائي القطب RL .

ملاحظة:

يمكننا أيضا استنتاج المعادلة التفاضلية لتطور التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي :

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_R + u_b = E$

$$(R+r)i + L\frac{di}{dt} = E$$

نعلم أن: $u_R = R.i$ ومنه $i = \frac{u_R}{R}$ إذن $\frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$

$(R+r)\frac{u_R}{R} + L\frac{1}{R}\frac{du_R}{dt} = E$ بضرب طرفي المعادلة في $\frac{R}{L}$ تصبح المعادلة :

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{(R+r)}{L}u_R = \frac{E.R}{L}$$

2- تطور شدة التيار i :

نحصل على عبارة تطور شدة التيار المار بالدارة بحل المعادلة التفاضلية (1) :

$$i = \frac{E}{(R+r)}\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)$$

بوضع $I_0 = \frac{E}{R+r}$

إذن : $i = I_0\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)$

3- تطور التوتر u_b بين طرفي الوشيعة :

بتطبيق قانون جمع التوترات: $u_R + u_b = E$ إذن : $u_b = E - u_R = E - R.i$

$$u_b = E - R\left(I_0\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)\right) = E - R.I_0 + R.I_0.e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$$

- نعلم أن $E = I_0(R+r)$ ومنه $E = I_0.R + I_0.r$

$$u_b = I_0.R + I_0.r - R.I_0 + R.I_0.e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$$

إذن :

$$u_b = I_0.r + R.I_0.e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$$

4- تطور التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي :

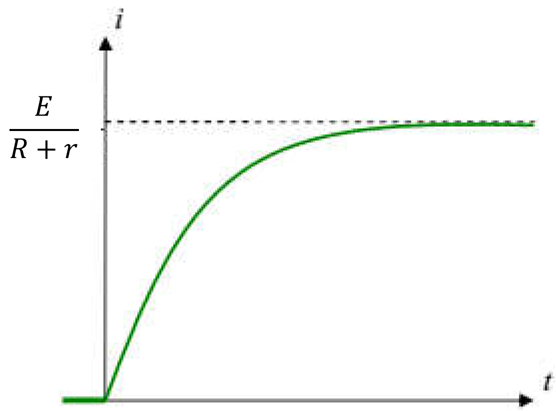
$$u_R = R.i = R.\frac{E}{(R+r)}\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)$$ بوضع $I_0 = \frac{E}{R+r}$

$$u_R = R.I_0.\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)$$

التمثيل البياني (حالة تطبيق التيار)

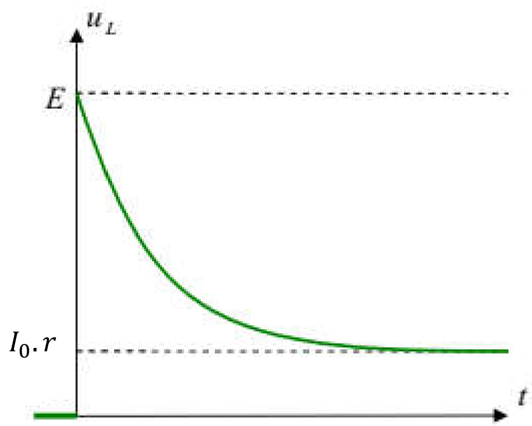
- التمثيل البياني : $i=f(t)$

$$i = \frac{E}{(R+r)}\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)$$



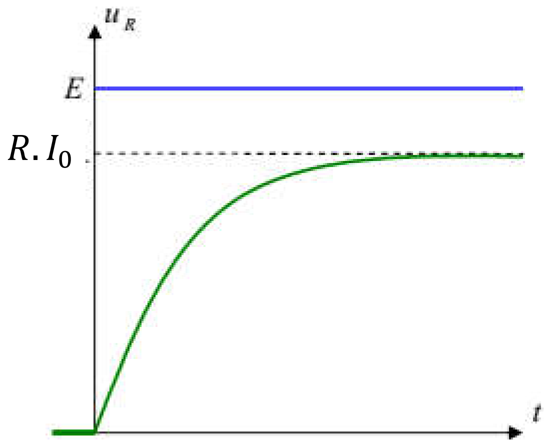
- التمثيل البياني: $u_b = f(t)$

$$u_b = I_0.r + R.I_0.e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$$



- التمثيل البياني : $u_R = f(t)$

$$u_R = R.I_0.\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)$$



- خلال انقطاع التيار :

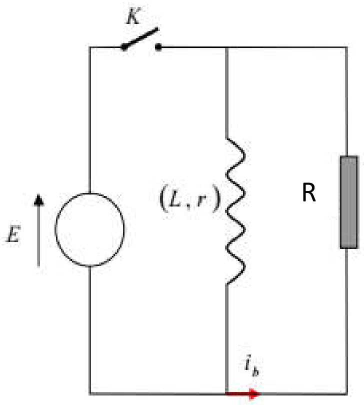
لدراسة تطور شدة التيار في ثنائي القطب RL في حالة قطع التيار **نقوم بما يلي :**

1- تحقيق التركيب التجريبي المبين في الشكل المقابل .

2- تطبيق قانوني : - قانون جمع التوترات.

- قانون أوم .

3- توظيف العلاقة التالية :



$$u_b = ri + L\frac{di}{dt}$$

1- المعادلة التفاضلية لتطور شدة التيار i :

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_R + u_b = 0$

نعلم أن: $u_b = ri + L\frac{di}{dt}$ و $u_R = R.i$

أي : $R.i + r.i + L\frac{di}{dt} = 0$ إذن : $(R+r)i + L\frac{di}{dt} = 0$

بقسمة طرفي المعادلة على L نجد : $\frac{di}{dt} + \frac{(R+r)}{L}i = 0 \ldots.(2)$ و هي المعادلة التفاضلية لتطور شدة التيار في ثنائي القطب RL .

ملاحظة:

يمكننا أيضا استنتاج المعادلة التفاضلية لتطور التوتر u_R بين طرفي الناقل الأمي :

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_R + u_b = 0$

$$(R+r)i + L\frac{di}{dt} = 0$$

نعلم أن: $u_R = R.i$ ومنه $i = \frac{u_R}{R}$ إذن $\frac{di}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}$

$(R+r)\frac{u_R}{R}+L\frac{1}{R}\frac{du_R}{dt}=0$ بضرب طرفي المعادلة في $\frac{R}{L}$ تصبح المعادلة :

$$\frac{du_R}{dt}+\frac{(R+r)}{L}u_R=0$$

2- تطور شدة التيار i :

نحصل على عبارة تطور شدة التيار المار بالدارة بحل المعادلة التفاضلية (1) :

$$i=\frac{E}{(R+r)}e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$$

بوضع $I_0=\frac{E}{R+r}$

إذن : $i=I_0e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$

3- تطور التوتر u_b بين طرفي الوشيعة :

بتطبيق قانون جمع التوترات: $u_R+u_b=0$ إذن : $u_b=-u_R=-R.i$

$$u_b=-R\left(I_0e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)=-R.I_0.e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$$

إذن :

$$u_b=-R.I_0.e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$$

4- تطور التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي :

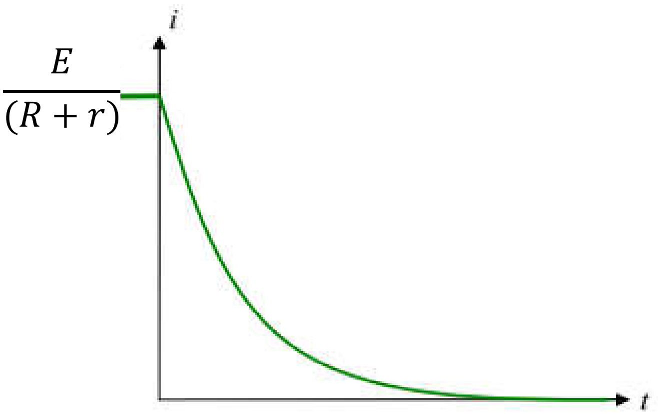
$u_R=R.i=R.\frac{E}{(R+r)}\left(e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)$ بوضع $I_0=\frac{E}{R+r}$

$$u_R=R.I_0.e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$$

التمثيل البياني (حالة انقطاع التيار)

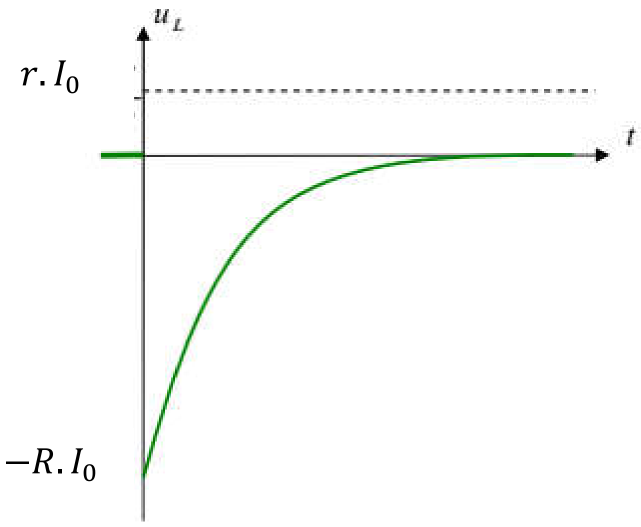
- التمثيل البياني : $i=f(t)$

$$i=\frac{E}{(R+r)}e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$$



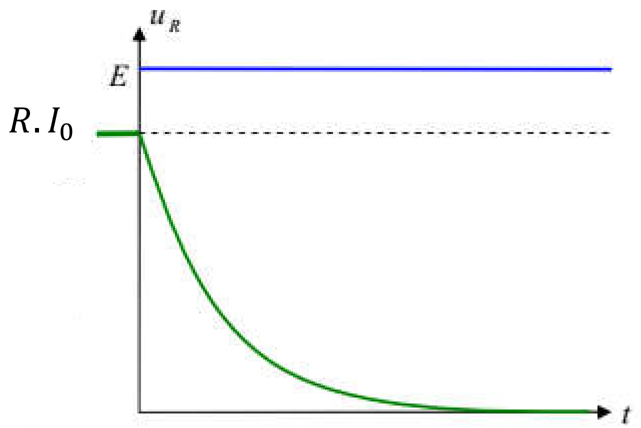
- التمثيل البياني: $u_b = f(t)$

$$u_b = -R.I_0.e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$$



- التمثيل البياني : $u_R = f(t)$

$$u_R = R.I_0.e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$$



4- ثابت الزمن τ :

إن المقدار $\frac{L}{R+r}$ متجانس مع الزمن حيث : $[T] = \frac{[u][T]}{[I]} \times \frac{[I]}{[u]} = \left[\frac{L}{R+r}\right]$

يسمى المقدار $\frac{L}{R+r}$ ثابت الزمن لثنائي القطب (RL) يرمز بـ τ ووحدته الثانية .

تحديد ثابت الزمن τ بيانيا :

- يحدد ثابت الزمن τ بيانيا بنفس الطريقة التي استعملت في ثنائي القطب RC .

5- الطاقة المخزنة في وشيعة :

عبارة الطاقة المخزنة في الوشيعة تعطى بالعلاقة التالية :

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2$$

- عند تطبيق التيار :

لدينا : $i = I_0\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)$

تصبح : $E_L = \frac{1}{2}L\left(I_0\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)\right)^2$

ومنه : $E_L = \frac{1}{2}L.{I_0}^2\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)^2$

- الطاقة الأعظمية : $E_{L\,max} = \frac{1}{2}L.I_0^2$

ومنه : $E_L = E_{L\,max}\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)^2$

عند انقطاع التيار :

لدينا : $i = I_0 e^{-\frac{(R+r)}{L}t}$

تصبح : $E_L = \frac{1}{2}L\left(I_0 e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)^2$

ومنه : $E_L = \frac{1}{2}L.{I_0}^2\left(e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)^2$

- الطاقة الأعظمية : $E_{L\,max} = \frac{1}{2}L.I_0^2$

ومنه : $E_L = E_{L\,max}e^{-2\frac{(R+r)}{L}t}$