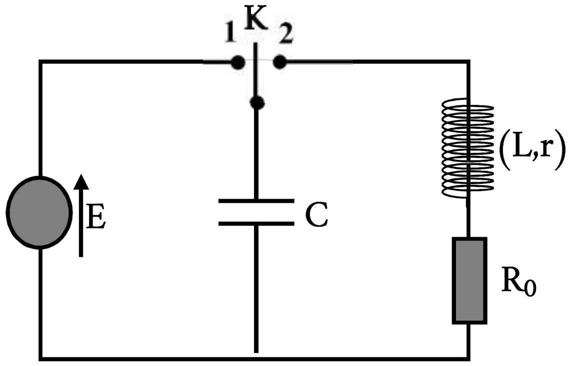
Maameri Houcine
Physics
دروس الدعم والتقوية
Chlef
Tel:06-74-24-42-70

الاهتزازات الكهربائية

الدارة الكهربائية RLC



ـنحقق الدارة الكهربائية الممثلة في (الشكل-1-) بإستعمال العناصر الكهربائية التالية :

ـتشحن المكثفة عند وضع البادلة في الوضع (1).

الوضع (2)

ـتفرغ المكثفة في الناقل الاومي والوشيعة عند وضع البادلة في الوضع (2) عند اللحظة $t=0$.

ـالطاقة المخزنة في المكثفة في هذه اللحظة هي : $E_C=\frac{1}{2}CE^2$

ـتفرغ هذه الطاقة على شكل :

- طاقة مغناطيسية في الوشيعة $E_L=\frac{1}{2}LI_0{}^2$
- طاقة ضائعة بفعل جول في R_0 و r

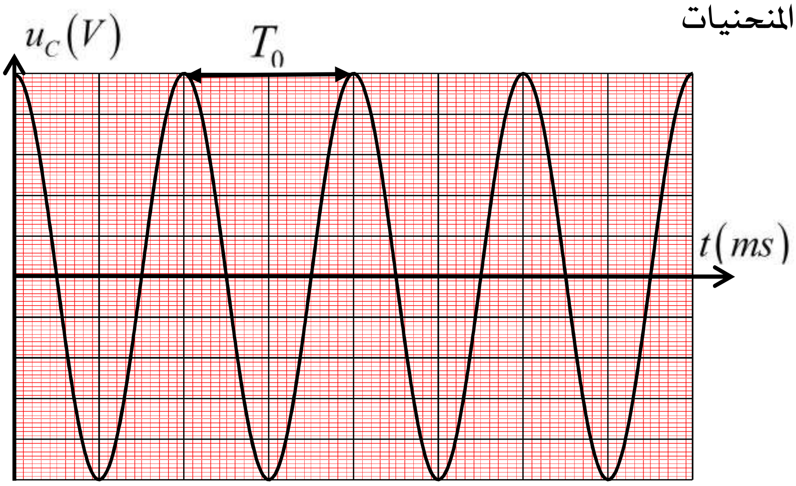
II- الاهتزازات الحرة لجملة كهربائية

1- الجملة الكهربائية المهتزة:

ندعو جملة كهربائية مهتزة كل دارة تحتوي على وشيعة ، مكثفة مشحونة ومقاومة

2- حالة اهتزازات حرة متخامدة:

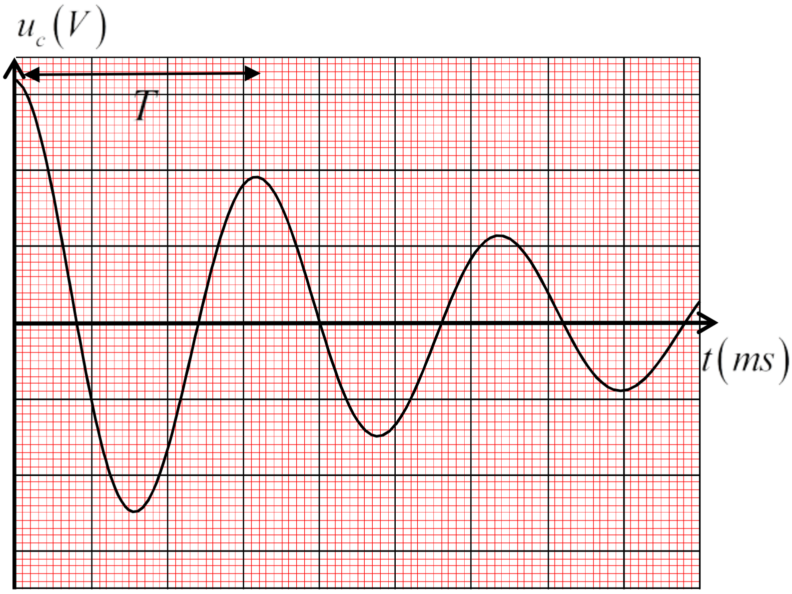
(الدارة RLC) نحقق دارة كهربائية كما بالشكل المقابل: نعتبر مقاومة الدارة $R=R_0+r$ بواسطة الدارة (1) نحقق شحن المكثفة وعند تمام الشحن نحول البادلة إلى الوضع (2) نوصل راسم اهتزاز بين طرفي المكثفة نلاحظ المنحنيات



(اهتزازات حرة غير متخامدة)

نظام دوري $R=0$

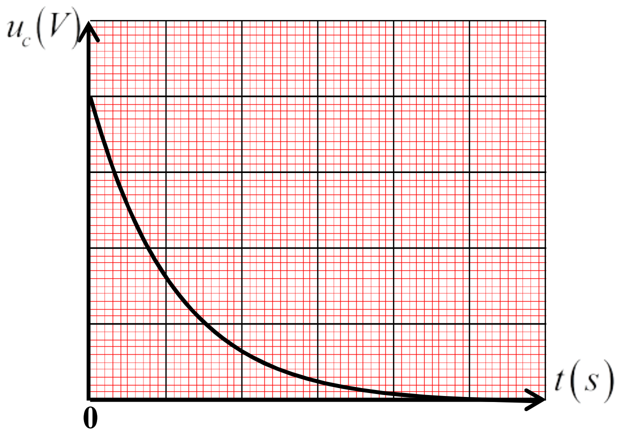
الدور الذاتي $T_0=2\pi\sqrt{LC}$



(اهتزازات حرة متخامدة)

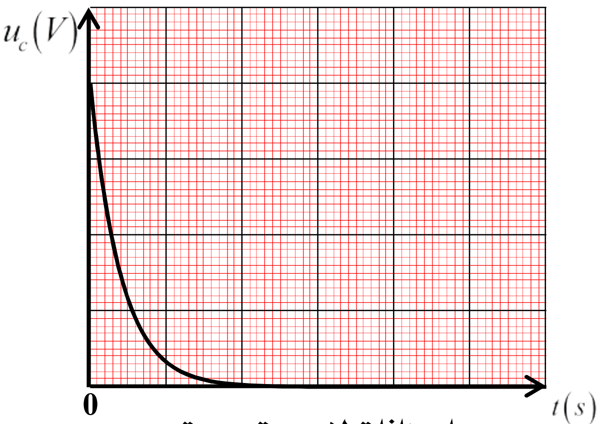
نظام شبه دوري $R < R_C$ و $R \neq 0$

شبه الدور $T_0 \approx T$



اهتزازات لادورية فوق حرجة

$R > R_C$



اهتزازات لادورية حرجة

$R = R_C$

نسمي المقاومة الحرجة للدارة R_C , حيث $R_C = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ (تقبل بدون برهان)

المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$ للدارة الحقيقية RLC

حسب قانون جمع التوترات $u_c + u_B + u_R = 0 \Rightarrow \dfrac{q}{C} + L\dfrac{di}{dt} + ri + Ri = 0$

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + (R+r)i = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} + (R+r)\frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \left(\frac{R+r}{L}\right)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

وبوضع $R = R_0 + r$ تصبح المعادلة

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad ....(1)$$

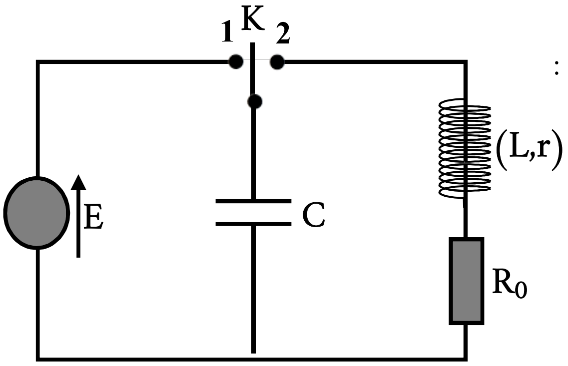
و هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها خارج المنهاج

الاهتزازات الحرة غير المتخامدة (الدارة المثالية LC)

نستعمل وشيعة مقاومتها صغيرة جدا حتى يمكن اهمال الطاقة الضائعة بفعل جول في الدارة امام الطاقة التي تخزنها المكثفة.

المعادلة التفاضلية بدلالة $q(t)$ (الدارة المثالية LC)

بوضع $R = 0$ في المعادلة التفاضلية (1) ونكتب :



$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0 \quad ......(2)$$ هذه المعادلة التفاضلية حلها من الشكل :

$$q(t)=Q_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

حيث :

$Q_0=CE$ (الشحنة العظمى)

$w_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (النبض الذاتي)

البرهان :

$$\frac{dq}{dt}=-Q_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi) \quad , \quad \frac{d^2q}{dt^2}=-\omega_0{}^2Q_0\cos(\omega_0 t+\varphi)\Rightarrow\frac{d^2q}{dt^2}=-\omega_0{}^2q$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية (2) نجد :

$$-\omega_0{}^2q+\frac{1}{LC}q=0\Rightarrow-\omega_0{}^2+\frac{1}{LC}=0\Rightarrow\omega_0{}^2=\frac{1}{LC}\Rightarrow \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

عبارة الدور الذاتي T_0 (للإهتزازات الحرة الغير المتخامدة) : لدينا

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}\Rightarrow T_0=2\pi\sqrt{LC}$$

العبارة اللحظية لشدة $i(t)$

$$i=\frac{dq(t)}{dt}=-Q_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)\Rightarrow i(t)=-I_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$$ حيث $I_0=Q_0\omega_0$

العبارة اللحظية لـ $u_c(t)$

$$u_c(t)=\frac{q(t)}{C}=\frac{CE}{C}\cos(\omega_0 t+\varphi)\Rightarrow u_c(t)=E\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

الشروط الابتدائية :

نعتبر اللحظة $t=0$ وضع البادلة على الوضع (2)

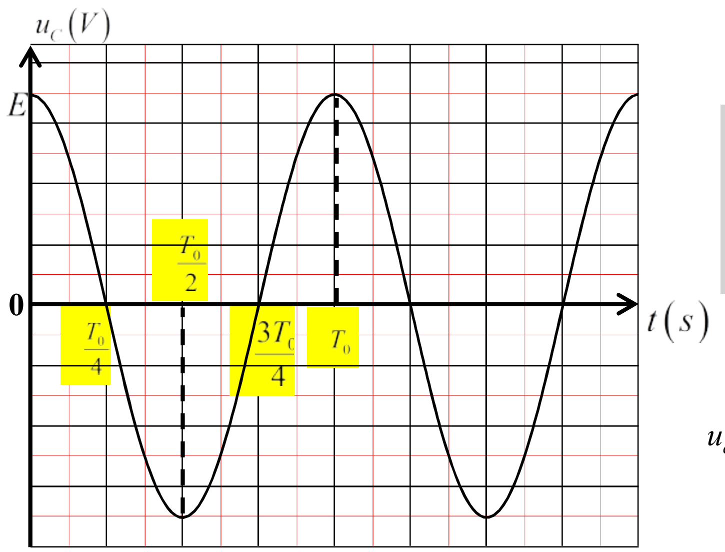
أي لحظة بدأ التفريغ يكون لدينا :

$$E_C=\frac{1}{2}CE^2=\frac{Q_0{}^2}{2C}$$
$$E_L=0$$
$$i=0$$

تمثيل التوتر بين طرفي المكثفة

للتبسيط نعتبر الصفحة الابتدائية $\varphi=0$

$$u_c(t)=E\cos(\omega_0 t)\Rightarrow u_c(t)=E\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

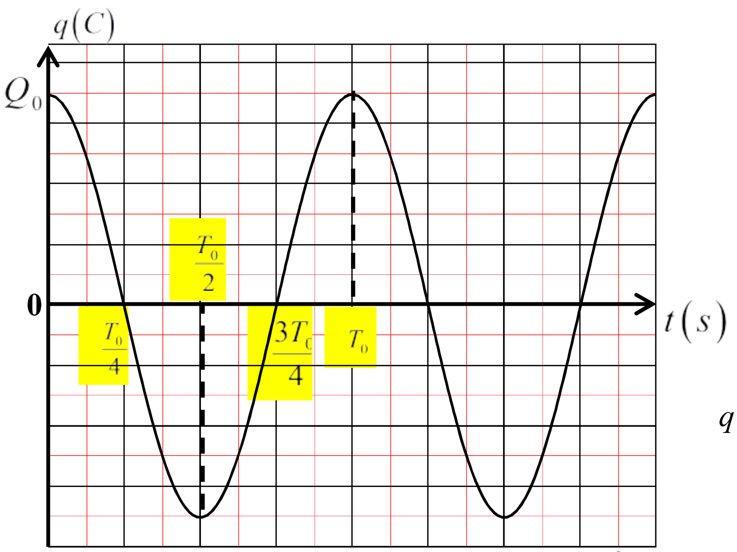


$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$u_C(V)$	E	0	$-E$	0	E

تمثيل الشحنة $q(t)$

للتبسيط نعتبر الصفحة الابتدائية $\varphi=0$

$$q(t)=Q_0\cos(\omega_0 t)\Rightarrow q(t)=Q_0\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

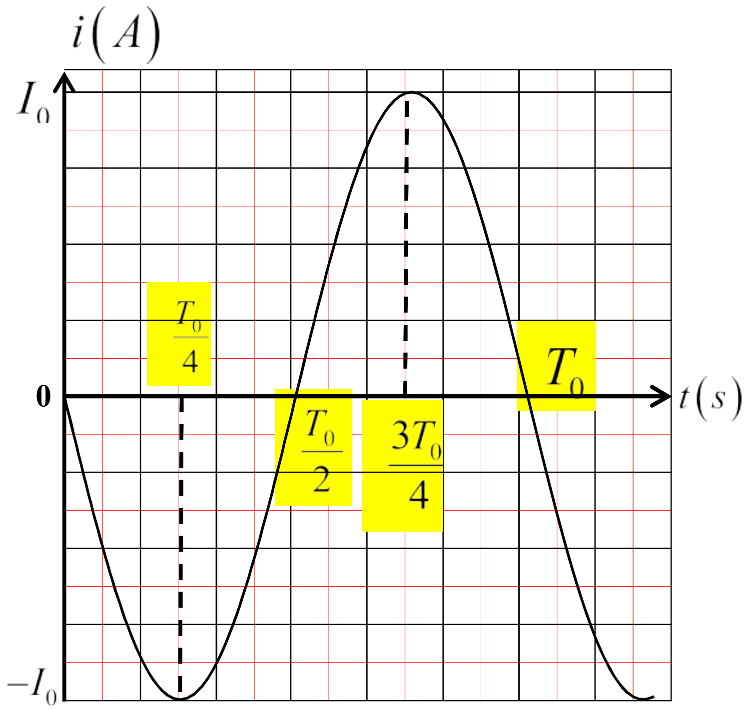


$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$q(C)$	Q_0	0	$-Q_0$	0	Q_0

تمثيل شدة التيار $i(t)$

للتبسيط نعتبر الصفحة الابتدائية $\varphi = 0$

$$i(t) = -I_0 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow i(t) = -I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$



$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$i(A)$	0	$-I_0$	0	I_0	0

الطاقة الكلية في الدارة E_T

بيان ان طاقة الدارة تبقى ثابتة مهما كان الزمن

$$E_T = E_B + E_c = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_c^{\,2}$$

$$E_c = \frac{1}{2}C\left[E^2 cos^2(\omega_0 t)\right]$$

$$E_B = \frac{1}{2}L\left[-Q_0^{\,2}\omega_0^{\,2}\, sin^2(\omega_0 t)\right]^2$$

$$E_T = \frac{1}{2}L\left[Q_0^{\,2}\omega_0^{\,2}\, sin^2(\omega_0 t)\right] + \frac{1}{2}C\left[E^2 cos^2(\omega_0 t)\right]$$

$$E_T = \frac{1}{2}\left[CE^2 sin^2(\omega_0 t)\right] + \frac{1}{2}\left[CE^2 cos^2(\omega_0 t)\right]$$

لان : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_0^{\,2} \times LC = 1$

$E_T = \frac{1}{2}CE^2\left[sin^2(\omega_0 t) + cos^2(\omega_0 t)\right] \Rightarrow E_T = \frac{1}{2}CE^2$ ومنه الطاقة ثابتة مهما كان الزمن

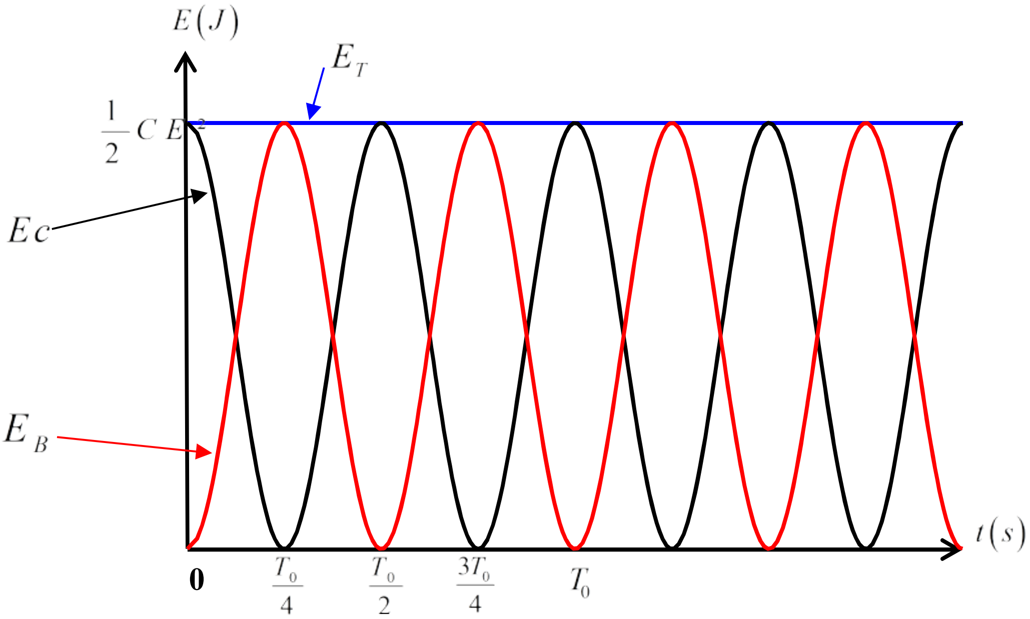
التمثيل البياني للطاقات $E_T, E_B(t), E_c(t)$ (حالة اهتزازات حرة غير متخامدة)

$$E_c = \frac{1}{2}CE^2 cos^2(\omega_0 t) \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}CE^2 cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

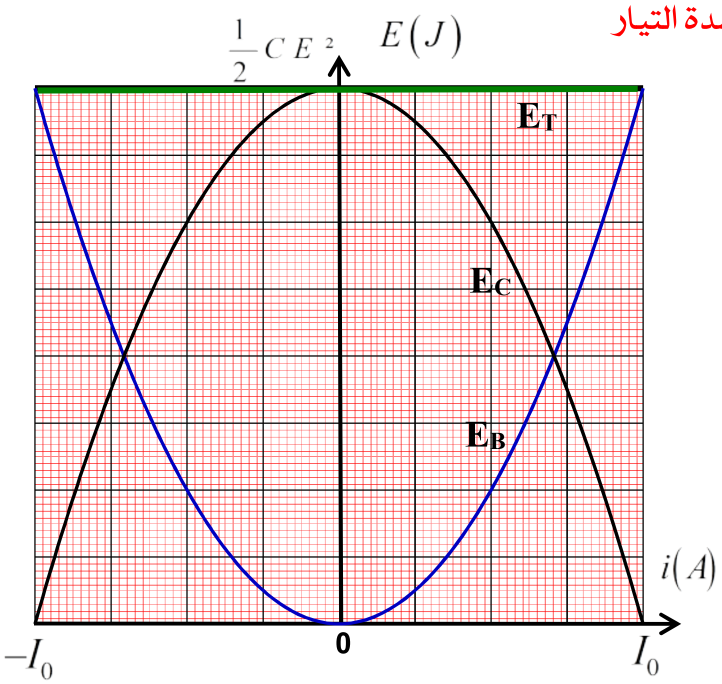
$$E_B = \frac{1}{2}CE^2 sin^2(\omega_0 t) \Rightarrow E_B = \frac{1}{2}CE^2 sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

$$E_T = \frac{1}{2}CE$$

$t(s)$	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$E_C(J)$	$\frac{1}{2}CE^2$	0	$\frac{1}{2}CE^2$	0	$\frac{1}{2}CE^2$
$E_C(J)$	0	$\frac{1}{2}CE^2$	0	$\frac{1}{2}CE^2$	0



مخطط الطاقات بدلالة شدة التيار



اثبات ان زمن دور التفريغ هو نصف الدور الذاتي $T=\frac{T_0}{2}$

لدينا الطاقة المخزنة في المكثفة $E_c(t)=\frac{1}{2}CE^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

لدينا : $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ هنا $\alpha=\frac{2\pi}{T_0}$

$E_c=\frac{1}{2}CE^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ ومنه $E_c(t)=\frac{1}{4}CE^2\left[1+\cos\left(\frac{4\pi}{T_0}t\right)\right]$

$E_c(t)=\frac{1}{4}CE^2+\frac{1}{4}CE^2\cos\frac{4\pi}{T_0}t$ عند دور تفريغ المكثفة يكون $E_c(t)=\frac{1}{4}CE^2$ ومنه

$$\frac{1}{4}CE^2+\frac{1}{4}CE^2\cos\frac{4\pi}{T_0}t=\frac{1}{4}CE^2\Rightarrow 0=-\frac{1}{4}CE^2\cos\frac{4\pi}{T_0}t$$

$$\cos\frac{4\pi}{T_0}t=0\Rightarrow\frac{4\pi}{T_0}t=2\pi\Rightarrow t=\frac{2\pi T_0}{4\pi}\Rightarrow \boxed{t=\frac{T_0}{2}}$$

اثبات أن الدور الذاتي متجانس مع الزمن باستعمال التحليل البعدي :

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Longleftarrow [T_0]=([L]\cdot[C])^{1/2}$. بما أن :

$$\left.\begin{matrix} u_L = L\dfrac{di}{dt} \Rightarrow [L]=\dfrac{[U]\cdot[T]}{[I]} \\ i = C\dfrac{du_C}{dt} \Rightarrow [C]=\dfrac{[I]\cdot[T]}{[U]} \end{matrix}\right\} \Rightarrow [T_0]=\left(\frac{\cancel{[U]}\cdot[T]}{\cancel{[I]}}\cdot\frac{\cancel{[I]}\cdot[T]}{\cancel{[U]}}\right)^{1/2}$$

ومنه : $[T_0]=\left([T]^2\right)^{1/2}=[T]$ أي الدور الذاتي متجانس مع الزمن

الاهتزازات الحرة المتخامدة

ـ الدراسة الطاقوية للدارة RLC :

إن طاقة الدارة في أي لحظة هي طاقة الوشيعة والمكثفة $E_T = E_B + E_C$

$E_T = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2}L.i^2(t)$ نشتق المعادلة من الطرفين نحصل على

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{C}q\frac{dq}{dt} + L\,i\frac{di}{dt} = \frac{q}{C}i + Li\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \left(\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2}\right)i \ldots(3)$$

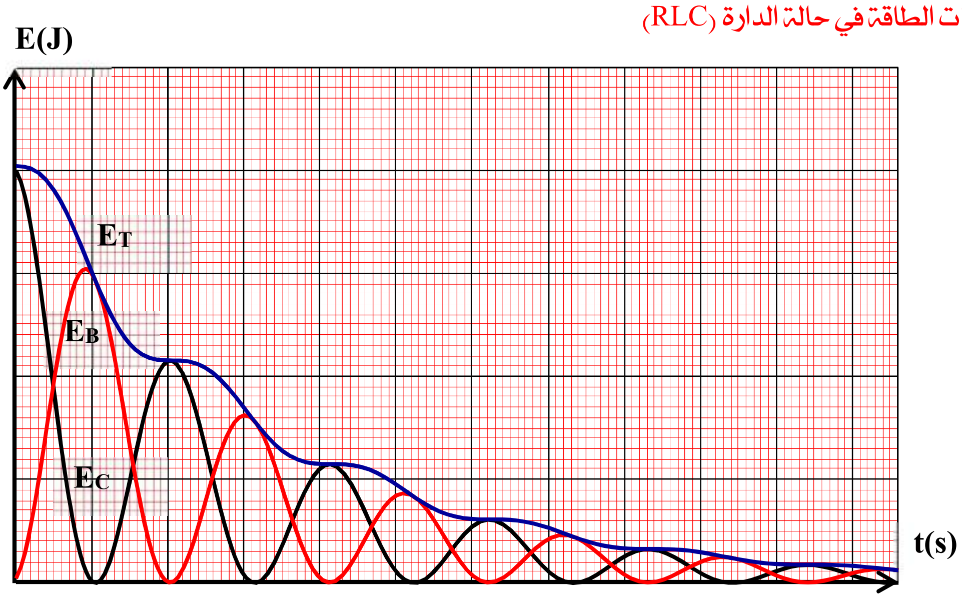
ولدينا $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}i + \frac{1}{LC}q = 0 \Rightarrow -\frac{R}{L}i = \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC}$

$-Ri = L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}$.......4 وبتعويض (4) في (3) نجد : $\frac{dE}{dt} = -R\,i^2$

فإن : $\frac{dE}{dt} = -R\cdot i^2 < 0$ نلاحظ من هذه النتيجة أن طاقة الجملة (R,L,C) غير ثابتة حيث تتناقص لأن جزء منها يفقد بتحويل حراري للوسط الخارجي بفعل جول وهذا ما يسبب تخامد الاهتزازات .

✓عبارة الطاقة المحولة بفعل جول : $E_J = Ri^2t$.

مخططات الطاقة في حالة الدارة (RLC)

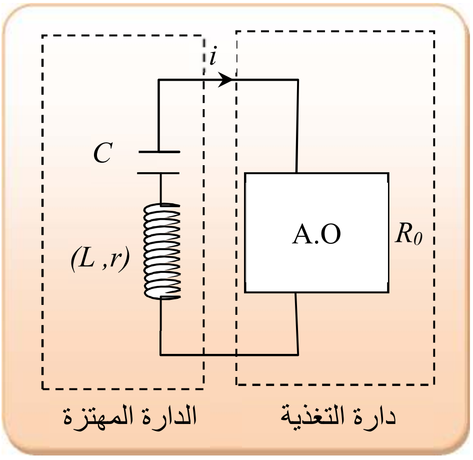


3ـ تغذية الإهتزازات الكهربائية المتخامدة:

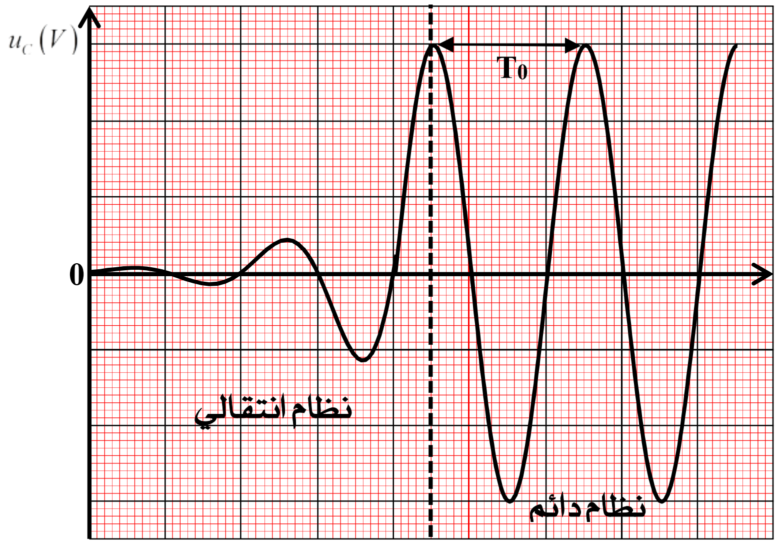
إن المسؤول عن تخامد الاهتزازات هو المقاومة ولذلك يمكن تغذية الدارة بتوصيلها بجهاز (مضخم تطبيقي A.O) يعوض الطاقة الضائعة بفعل المقاومة حيث يلعب هذا الجهاز دور مقاومة سالبة

حيث يكون قانون التوترات كالتالي: $u_C + L\frac{di}{dt} + r.i = R_0.i$

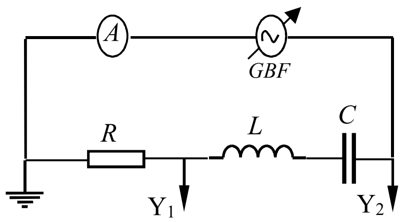
من اجل $R_0 = r$ يكون : $u_C + L\frac{di}{dt} = 0$ ، $\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{L.C}.u_C = 0}$



فيتحول بذلك النظام من اهتزازي متخامد إلى نظام اهتزازي مغذى غير متخامد.



الاهتزازات القسرية الكهربائية (حالة دارة RLC) :



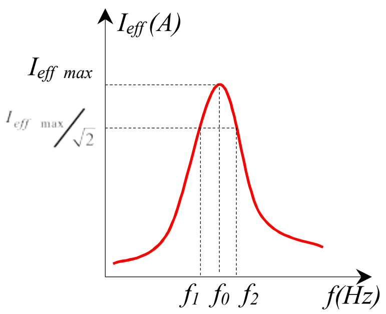
تحدث الاهتزازات القسرية الكهربائية عندما نفرض على الدارة RLC توترا كهربائيا متناوبا تواتره f و ذلك باستعمال مولد تواترات منخفضة متغير التواتر GBF المحرض) فيرغم الدارة (المجاوب) على الاهتزاز بهذا التواتر.

الدراسة الكمية :

نوصل الدارة بأمبيرمتر لقياس شدة التيار و كذلك يستعمل مدخلي راسم اهتزاز مهبطي Y_1 لقياس التوتر بين طرفي الناقل الأومي و Y_2 لقياس التوتر بين طرفي الدارة نجعل تواتر GBF أقل من التواتر الذاتي للدارة f_0 ثم نغير من قيمته تدريجيا حتى يتجاوز التواتر الذاتي للدارة ونتابع شدة التيار $i(t)$ فنحصل على المنحنى المقابل :

خصائص التجاوب :

أ- الشريط النافذ (حزمة المرور) :



نسمي الشريط النافذ لتواترات المجاوب (الرنان) مجال التواترات الموافق لـ : $\dfrac{I_{eff.max}}{\sqrt{2}} \leq I_{eff} \leq I_{eff.max}$

ب- عرض الشريط النافذ :

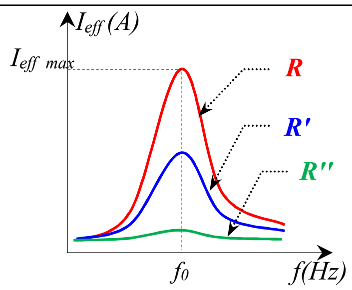
نسمي المقدار $\Delta f = f_2 - f_1$ بعرض الشريط النافذ حيث تكون استجابة المهتز (الرنان) مقبولة في هذا المجال .

ج- معامل الجودة :

هو مقدار يعبر عن حالة التجاوب فكلما كان أكبر كانت استجابة المجاوب للمحرض أفضل و أكثر حدة و نكتب : $Q = \dfrac{f_0}{\Delta f}$

بحيث : $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ و هو التواتر الذاتي للدارة RLC (تواتر التجاوب) .

تأثير المقاومة على التجاوب :



- ✓ من أجل R الصغيرة يكون التخامد ضعيفا والتجاوب حادا.
- ✓ من أجل R' المتوسطة يكون التخامد متوسطا والتجاوب غير واضح.
- ✓ من أجل R'' الكبيرة يكون التخامد كبيرا ولا يوجد تجاوب.

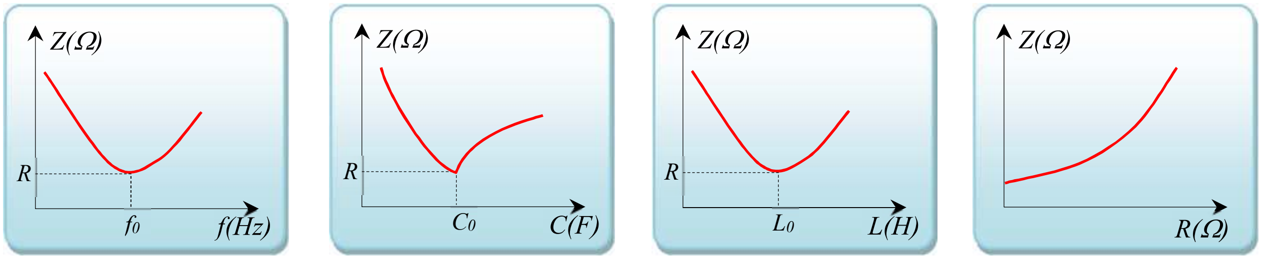
ممانعة الدارة :

هي العرقلة التي تبديها الدارة للتيار الكهربائي المار فيها ، يرمز لها بالرمز Z و تعطى بالعلاقة : $Z = \dfrac{u(t)}{i(t)} = \dfrac{U_0}{I_0} = \dfrac{U_{eff}}{I_{eff}}$

تأثير R , L , C على الممانعة Z :

نعيد الدارة السابقة و نغير كل مرة أحد العناصر f , R , L , C و نحسب ممانعة الدارة Z .

نلاحظ أن هذه التغيرات تكون وفق المنحنيات التالية :



الملاحظات :

- تزداد ممانعة الدارة بزيادة المقاومة .
- تتناقص قيمة الممانعة بزيادة الذاتية إلى أن تصل إلى قيمة حدية صغرى (Z = R) ثم تزداد بعد ذلك .
- تتناقص قيمة الممانعة بزيادة السعة إلى أن تصل إلى قيمة حدية صغرى (Z = R) ثم تزداد بعد ذلك .
- تتناقص قيمة الممانعة بزيادة التواتر إلى أن تصل إلى قيمة حدية صغرى (Z = R) يكون عندها $f = f_0$ ثم يزداد بعد ذلك .

نتيجة :

عند حدوث التجاوب الكهربائي يتحقق ما يلي :

تصبح الشدة أعظمية $i = I_{max}$ و تصبح الممانعة أصغرية $Z = R$