الهندسة الفضائية

1- التمثيلات الوسيطية

أ- التمثيل الوسيطي لمستقيم:

$\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه لمستقيم (D) يشمل نقطة معلومة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية منه، فإن:

$$(D):\begin{cases} x=x_A+at \\ y=y_A+bt & /t\in\mathbb{R} \\ z=z_A+ct \end{cases}$$

ب- التمثيل الوسيطي لمستو:

$\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ شعاعان مستقلان خطيا من مستو (P) يشمل نقطة معلومة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية منه، فإن:

$$(P):\begin{cases} x=x_A+at+a'\lambda \\ y=y_A+bt+b'\lambda & /t,\lambda\in\mathbb{R} \\ z=z_A+ct+c'\lambda \end{cases}$$

2- الجداء السلمي في الفضاء

أ- العبارة التحليلية للجداء السلمي:

$\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ شعاعان من الفضاء ، فإن:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=aa'+bb'+cc'}$$

ب- تعامد شعاعين:

$\vec{u}\perp\vec{v}$ يكافئ $aa'+bb'+cc'=0$

جـ - ملاحظة:

من تعريف الجداء السلمي لدينا:

$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\|}$$

3- المعادلات الديكارتية

أ- المعادلة الديكارتية لمستو:

$\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي لمستو (P) يشمل نقطة معلومة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية منه، فإن:

$\vec{n}\perp\vec{AM}$ أي: $\vec{n}.\vec{AM}=0$ ومنه:

$$\boxed{(P):ax+by+cz+d=0}$$

* يمكن وضع هذه المعادلة مباشرة دون حساب الجداء السلمي حيث a, b, c هي إحداثيات الشعاع الناظمي وللحصول على قيمة d نعوض x, y, z بإحداثيات النقطة A

ب- المعادلة الديكارتية لسطح كرة:

(S) سطح كرة مركزها $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ ونصف قطرها r $(r\in\mathbb{R}_+^*)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من (S) فإن:

$$\boxed{(S):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2}$$

بعد النشروالتبسيط ، تصبح هذه المعادلة من الشكل التالي:

$$\boxed{(S):x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0}$$

جـ - المعادلة الديكارتية لمستو مماس لسطح كرة:

(P) مستوي مماس لسطح كرة (S) مركزها $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ في نقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من (P) فإن: $\vec{A\Omega}\perp\vec{AM}$ أي: $\vec{A\Omega}.\vec{AM}=0$ ومنه:

$$(x_0-x_A)(x-x_A))+(y_0-y_A)(y-y_A))+(z_0-z_A)(z-z_A))=0$$

بعد النشروالتبسيط ، نحصل على معادلة كما في 3-أ أعلاه.

* يمكن وضع هذه المعادلة مباشرة كما في 3-أ أعلاه كذلك، حيث يعتبر $\vec{A\Omega}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

د- ملاحظة:

ينتج المستقيم في الفضاء عن تقاطع مستويين. لذلك ليست له معادلة ديكارتية واحدة وإنما له جملة معادلتين ديكارتيين لهما. انطلاقا من هذه الجملة نحصل على تمثيل وسيطي للمستقيم.

4- المسافات

أ- المسافة بين نقطتين:

$A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتان من الفضاء ، فإن:

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

ب- المسافة بين نقطة ومستو:

$(P):ax+by+cz+d=0$ و $A(x_A;y_A;z_A)$

لدينا:

$$\boxed{d(A;(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

جـ - المسافة بين نقطة ومستقيم:

لا توجد علاقة تسمح مباشرة بحساب المسافة بين نقطة ومستقيم، لكن يمكن أن نستعين ببعض الحالات التالية:

الحالة 1:

H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) فإن:

$$\boxed{d(A;(D))=AH}$$

الحالة 2:

$(P_1)\cap(P_2)=(D)$ و $(P_1)\perp(P_2)$

بعد حساب $d(A;(P_1))$ و $d(A;(P_2))$ وتطبيق مبرهنة فيثاغورس نجد:

$$\boxed{d(A;(D))=\sqrt{[d(A;(P_1))]^2+[d(A;(P_2))]^2}}$$

الحالة 3:

$(D)\cap(P)=\{B\}$ و $(D)\perp(P)$ و $A\in(P)$

$$\boxed{d(A;(D))=AB}$$

5- تذكير:المستوي المحوري-حجم رباعي وجوه

* المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو مستو يشمل منتصفها ويعامد حاملها.
* حجم رباعي وجوه $=\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة في الارتفاع.