

ملاحظة:

\* إذا كانت الدالة كثير حدود والمطلوب هو حساب نهايتها عند  $+\infty$  و  $-\infty$  ، فقط نحسب نهاية: **الحد ذو الأكبر أس.**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^3$$

\* إذا كانت الدالة ناطقة و المطلوب هو حساب نهايتها عند  $+\infty$  و  $-\infty$  ، فقط نحسب نهاية: **الحد ذو الأكبر أس في البسط على الحد ذو الأكبر أس في المقام.**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{ax^2 + bx + c} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^3}{ax^2}$$

(4) طرق إزالة حالات عدم التعيين:

أ. العامل المشترك

ب. التحليل والاختزال (المطابقة، القسمة الإقليدية)

ج. المرافق (الجزور التربيعية)

د. العدد المشتق ( ويكون فقط عندما تكون النهاية من الشكل  $(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a})$  .

(5) نهاية دالة مركبة:

$$f(x) = v \circ u(x) \leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} u(x) = b \\ \lim_{b} v(x) = c \end{cases}$$

اذن:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

(6) النهايات باستعمال المقارنة (الحصر والترتيب):

أ. الحصر:

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = l \end{cases}$$

اذن:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$

ب. الترتيب: (الحاد من الأعلى والحاد من الأسفل)

النهايات والتفسيرات الهندسية

**تعريف:** النهاية هي المكان الذي توّول اليه الدالة  $f(x)$  ويتم حسابها عند الأطراف المفتوحة في مجموعة التعريف، نرّمز لها ب:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  أو  $\lim_{x \rightarrow \pm l} f(x)$  حيث  $l \in \mathbb{R}$

(1) قواعد الإشارات:

أ. الجمع:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

ب. الضرب:

- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
- $(-\infty) \times (+\infty) = -\infty$

ج. القسمة:

- $\frac{(+\infty)}{(+\infty)} = +\infty$
- $\frac{(-\infty)}{(-\infty)} = +\infty$
- $\frac{(+\infty)}{(-\infty)} = -\infty$
- $\frac{(-\infty)}{(+\infty)} = -\infty$

(2) حالات عدم التعيين:

|               |                                   |                        |                         |
|---------------|-----------------------------------|------------------------|-------------------------|
| $\frac{0}{0}$ | $\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$ | $0 \times (\pm\infty)$ | $(+\infty) + (-\infty)$ |
|---------------|-----------------------------------|------------------------|-------------------------|

(3) حالات ليست عدم تعيين: (توضع النتيجة مباشرة).

|                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $\frac{\pm l}{\pm 0} = \pm\infty$     | $\frac{\pm l}{\pm\infty} = 0$         |
| $\frac{\pm\infty}{\pm l} = \pm\infty$ | $\frac{\pm\infty}{\pm 0} = \pm\infty$ |
| $\frac{0}{\pm\infty} = 0$             | $\frac{0}{\pm l} = 0$                 |

(A) الحاد من الأعلى:

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty \setminus a} g(x) = +\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty \setminus a} f(x) = +\infty \end{cases}$$

(B) الحاد من الأسفل:

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty \setminus a} g(x) = -\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty \setminus a} f(x) = -\infty \end{cases}$$

(7) المستقيمات المقاربة:

أ. المستقيم المقارب الأفقي:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

التفسير الهندسي (البياني):

\*  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي موازي لمحور الفواصل معادلته  $y = a$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

ب. المستقيم المقارب العمودي (الشاقولي):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

التفسير الهندسي (البياني):

\*  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب عمودي موازي لمحور الترتيب معادلته  $x = a$ .

ج. المستقيم المقارب المائل:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

\*  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته

$y = ax + b$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

## الإستمارية

(1) تعريف:

\*  $f$  دالة مستمرة عند قيمة  $a$  معناه أن  $f(a)$  معرفة و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

\*  $f$  مستمرة على مجال  $I$  حيث  $I = [a; b]$  من  $\mathbb{R}$  معناه أن  $f$  مستمرة عند كل قيمة  $a$  من هذا المجال.

\* كل دالة مستمرة على مجموعة تعريفها، مثلا:

✓ الدالة كثير حدود مستمرة على  $\mathbb{R}$

✓ الدالة الناطقة مستمرة عند كل قيمة من مجموعة

تعريفها، فهي ليست مستمرة عند القيم الممنوعة.  
✓ الدوال المرجعية:

$$x^2; \frac{1}{x}; \sqrt{x}; \sin x; \cos x; \tan x; x^3; e^x; \ln x; |x|$$

مستمرة عند كل قيمة من مجموعة تعريفها.

\* مجموع دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة.

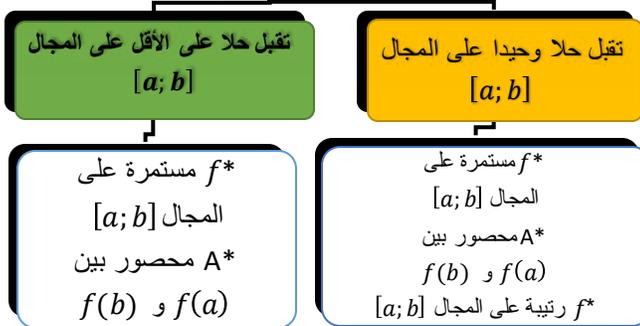
\* جداء دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة.

\* مركب دالتين مستمرتين هو دالة مستمرة.

(2) مبرهنة القيم المتوسطة:

حالة 1:

$$f(x) = A$$



حالة 2:

$$f(x) = 0$$

