ملخص المتتاليات العددية - 3 ثانوي علمي
بكالوريا 2021 . الأستاذ بلجودي حمو

المتتالية الحسابية

تكون المتتالية (u_n) حسابية إذا كان : $u_{n+1}=u_n+r$
r هو أساس المتتالية.

عبارة الحد العام

$u_n=u_p+(n-p)r$ حيث u_p هو حد من حدود المتتالية.

حالـــة خاصـة : $u_n=u_0+nr$.

الوسط الحسابي

إذا كانت الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن $a+c=2b$.

المجموع

$$u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\dots+u_n=\frac{n-p+1}{2}(u_p+u_n)$$

المتتالية الهندسية

تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا كان : $v_{n+1}=v_n\times q$
q هو أساس المتتالية (v_n) .

عبارة الحد العام

$v_n=v_p\times q^{n-p}$ حيث v_p هو حد من حدود المتتالية.

$v_n=v_0\times q^n$ حيث v_0 هو الحد الأول لـ (v_n).

لوسط الهندسي

إذا كانت الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فإن $a\times b=c^2$.

المجموع

$$S=v_p+v_{p+1}+v_{p+2}+\dots+v_n=\frac{v_p}{1-q}(1-q^{n-p+1})$$

اتجاه تغير متتالية :

- إذا كان $u_{n+1}-u_n\geq 0$ فإن (u_n) متزايدة.
- إذا كان $u_{n+1}-u_n\leq 0$ فإن (u_n) متناقصة.
- إذا كان $u_{n+1}-u_n=0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة.

✓ **اتجاه تغير متتالية حسابية انطلاقا من أساسها :**

- إذا كان $r\prec 0$ فإن (u_n) متناقصة.
- إذا كان $r\succ 0$ فإن (u_n) متزايدة.
- إذا كان $r=0$ فإن (u_n) ثابتة.

✓ **اتجاه تغير متتالية هندسية انطلاقا من أساسها :**

- إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0>0$ فإن (u_n) متناقصة.
- إذا كان $0<q<1$ وكان $u_0<0$ فإن (u_n) متزايدة.
- إذا كان $q>1$ وكان $u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.
- إذا كان $q>1$ وكان $u<0$ فإن

تقارب متتالية:

- إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ فإن (u_n) متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة

الحد من الأعلى و الأسفل:

- إذا كان $u_n\leq A$ نقول أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد A .
- إذا كان $u_n\geq B$ نقول أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد B .

الاستدلال بالتراجع:

$P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n . n_0 عدد طبيعي .
للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

من إعداد الأستاذ : بلجودي حمو

التمرين-1-

(u_n) متتالية عددية معرفة على N حيث : $u_n = 3n-2$

1. أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{10} .
2. برهن أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
3. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
4. هل المتتالية (u_n) متتالية متقاربة أو متباعدة .
5. بين أن 298 حد من حدود المتتالية محددا رتبته .
7. أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.
8. عين قيمة حتى يكون $S_n = 143$ ثم أحسب: $S_{10} = u_0 + u_2 + ... + u_{10}$.

التمرين-2-

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول هو $u_0 = -2$ وأساسها $r = 3$

1. أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{10} ، u_{20} .
2. . أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) . تحقق من جوابك الأول .

التمرين-3-

(v_n) متتالية عددية معرفة على N حيث : $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

1. أحسب الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 .
2. هل المتتالية (v_n) متتالية متقاربة أو متباعدة .
3. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
4. بين أن $\frac{3}{32}$ حد من حدود المتتالية محددا رتبته .
5. أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

التمرين-4-

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول هو $u_0 = 3$ وأساسها $q = 2$.

1. أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{10} ، u_{20} .
2. . أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) ثم تحقق من جوابك الأول .

التمرين-5-

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 .

1) احسب حدها الثاني u_2 علما أنّ : $u_1 + u_3 = 12$.
2) احسب الحد الرابع u_4 علما أن: $u_3 + u_4 + u_5 = 30$.
3) عين أساس هذه المتتالية وحدها الأول u_1 .
5. اكتب الحد العام u_n بدلالة n ثم عيّن n بحيث يكون : $u_n = 32$.

التمرين-6-

I • (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 ، ضع تخمينا حول اتجاه تغير
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ -2$.
3. أدرس اتجاه تغير (u_n) و استنتج تقاربها و استنتج نهايتها .

II • (v_n) متتالية معرفة على N بالعلاقة : $v_n = u_n + 2$.

1. بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .
2. عبر بدلالة n عن كل من v_n و u_n تحقق من نهاية (u_n) .
3. أحسب بدلالة n المجموع : S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.
4. أحسب بدلالة n المجموع : S'_n حيث : $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين-7-

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = \alpha$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $4u_{n+1} = u_n + 9$

1. عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.
2. نضع: $\alpha = 4$ ، أ-احسب u_1 ، u_2
ب.برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 3$
ج.ادرس اتجاه تغير المتتالية، بين أنها متقاربة.
3-نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي: $v_n = u_n - 3$
أ-بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
ب-اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .
ج-احسب: $S = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ،
$S_2 = v_0 + 4v_1 + ... + 4^n v_n$ $\quad$ $S' = u_0 + u_1 + ... + u_n$
$P_n = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$;

التمرين-8-

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = \frac{11}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

1) أحسب الحدين u_1 و u_2 .
2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .
3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = 4u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .
أ ـ عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية .
ب ـ باستعمال قيمة α المحصل عليها سابقا , أكتب v_n بدلالة n ثم عبر عن u_n بدلالة n .

التمرين-9-

المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) لتكن الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

⇦أرسم $(\triangle)$ التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

⇦ أرسم المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$.

⇦ضع على محور الفواصل u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 . ضع تخمينا حول تقارب المتتالية .

3.أحسب العدد α فاصلة نقطة تقاطع $(\triangle)$ و (D).

نضع $v_n = u_n - \alpha$. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية .

⇦ عين نهاية (u_n) و تحقق من تخمينك حول التقارب .