الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Bac 2021

مجلة

سند المجتهد في الرياضيات

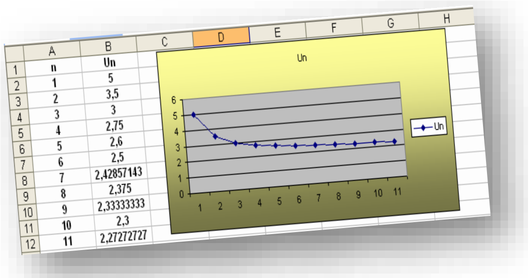
المتتاليات

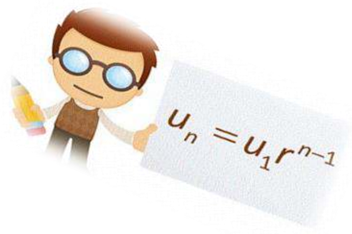
شعبة :

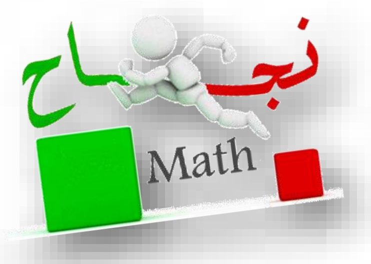
تسيير واقتصاد

التحضير لشهادة البكالوريا

من إعداد الأستاذة : أزرايب جميلة
ثانوية : رشيد رضا العاشوري







الفهرس

المتتاليات العددية :

تعريف :

n_0 عدد طبيعي معطى حيث $(n \geq n_0)$ ، نسمي متتالية عددية كل دالة $(u : n \to u(n))$ حيث $u(n)$ عدد حقيقي . نرمز للعدد $u(n)$ بـ u_n ويسمى الحد العام للمتتالية u ونسمي n دليل الحد u_n . نرمز للمتتالية u بـ $(u_n)_{n \geq n_0}$ و u_{n_0} حدها الأول .

مثال 1 :

الدالة $(u : n \to n^2 + n + 1)$ بما أنها معرفة على كل مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.نعتبر متتالية عددية سنرمز إليها بالرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وحدها العام u_n حيث $u_n = n^2 + n + 1$ وحدها الأول u_0

رتبة الحد	1	2	3	4
رمز الحد	u_0	u_1	u_2	u_3
قيمة الحد	$u_0 = 0^2 + 0 + 1 = 1$	....	....	....

في هذه الحالة دليل الحد ليس نفسه رتبة الحد مثلا الحد العاشر ليس u_{10} بل هو ...... ولحسابه نعوض n بـ ..... ومنه : ....

- كتابة كل من u_{n+1} و u_{n-1} بدلالة n :

....
....
....
....
....
....
....

مثال2 :

الدالة $\left(v : n \to \frac{-n+1}{n}\right)$ بما أنها معرفة على كل مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة $\mathbb{N}^*$.نعتبر متتالية عددية سنرمز إليها بالرمز $(v_n)_{n\geq 1}$ وحدها العام v_n حيث $v_n = \frac{-n+1}{n}$ وحدها الأول v_1

رتبة الحد	1	2	3	4
رمز الحد	v_1	v_2	v_3	v_4
قيمة الحد	$v_1 = \frac{-1+1}{1} = 0$	....	....	....

في هذه الحالة دليل الحد هو نفسه رتبة الحد مثلا الحد العاشر هو .... ولحسابه نعوض n بـ ..... ومنه : ....

- كتابة كل من v_{n+1} و v_{n-1} بدلالة n :

....
....
....
....
....
....
....

طرق توليد متتالية :

بعبارة الحد العام :

يمكن أن نجد قيمة حدود متتالية باستعمال عبارة حدها العام ولإيجاد قيمة الحد u_p يكفي أن نعوض n بـ p

في هذه الحالة يمكن التعبير عن عبارة الحد العام u_n بالدالة f ونضع $u_n = f(n)$.

☚ **مثلا :** المتتالية (u_n) المعرفة على ℕ حيث $u_n = -n^2 + 2$ معرفة بحدها العام .

ولدينا : $u_0 = -0^2 + 2 = 2$ ، $u_1 = -1^2 + 2 = 1$ ، $u_2 = -2^2 + 2 = -2$، ......

بنفس الطريقة أحسب u_3 و u_4 والحد العشرون .

....

....

....

....

....

يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال الدالة المرفقة f ونكتب $u_n = f(n)$ حيث $x \in [0;+\infty[$ $f : x \mapsto -x^2 + 2$.

بعلاقة تراجعية :

لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x \in D$ فإن $f(x) \in D$. المتتالية u المعرفة بحدها الأول u_{n_0} والعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية . تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n \geq n_0$ ، الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u.

☚ **مثلا :** نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 1 + 3u_n$.

لدينا : $u_1 = 1 + 3u_0 = 1 + 3\times 1 = 4$ ، $u_2 = 1 + 3u_1 = 1 + 3\times 4 = 13$ ، $u_3 = 1 + 3u_2 = 1 + 3\times 13 = 40$، .....

يمكن التعبير عن العلاقة التراجعية لهذه المتتالية باستعمال الدالة المرفقة f ونكتب $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $f : x \mapsto 1 + 3x$.

اتجاه تغير متتالية عددية :

n_0 عدد طبيعي معطى ، $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية

- تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة تماما ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} - u_n \succ 0$ (أي $u_{n+1} \succ u_n$) من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$.
- تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة تماما ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} - u_n \prec 0$ (أي $u_{n+1} \prec u_n$) من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$.
- تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} - u_n = 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$.

- **طرق لدراسة اتجاه تغير متتالية عددية :**

لدراسة اتجاه تغير متتالية يمكن أن :

- ندرس إشارة $u_{n+1} - u_n$
- نقارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 (شرط أن تكون الحدود موجبة تماما) .
- إذا وجدت دالة f حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f .

☚ **مثال 1 :**

- أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على ℕ كمايلي : $u_n = 3n - 5$ و $v_n = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

☚ **الحل:**

1- <u>دراسة اتجاه تغير المتتالية</u> (u_n):

$$u_{n+1}-u_n=3(n+1)-5-(3n-5)=3n+3-5-3n+5=3\succ 0$$

بما أن $u_{n+1}-u_n\succ 0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

2- <u>دراسة اتجاه تغير المتتالية</u> (v_n):

<u>طريقة 1 :</u>

$$v_{n+1}-v_n=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\times\left(\frac{1}{3}\right)-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left[\frac{1}{3}-1\right]=\underbrace{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}_{+}\underbrace{\left[\frac{-2}{3}\right]}_{-}\prec 0$$

بما أن $v_{n+1}-v_n\prec 0$ فان المتتالية (v_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

<u>طريقة 2 :</u>

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}=\frac{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\times\frac{1}{3}}{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}=\frac{1}{3}\prec 1$$

ومنه : $\frac{v_{n+1}}{v_n}\prec 1$ ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

☚ **مثال 2 :**

- أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_n=\frac{n+1}{3^n}$ و $v_n=\frac{2n-1}{n+3}$.

☚ **الحل :**

<u>1)</u> <u>دراسة اتجاه تغير المتتالية</u> (u_n):

<u>طريقة 1 :</u>

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1+1}{3^{n+1}}-\frac{n+1}{3^n}=\frac{n+2}{3^{n+1}}-\frac{3(n+1)}{3^{n+1}}=\frac{n+2-3(n+1)}{3^{n+1}}=\frac{-2n-1}{3^{n+1}}=\frac{-\overbrace{(2n+1)}^{+}}{\underbrace{3^{n+1}}_{+}}\prec 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

<u>طريقة 2 :</u>

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}-1=\frac{\frac{n+1+1}{3^{n+1}}}{\frac{n+1}{3^n}}-1=\frac{n+2}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{n+1}-1=\frac{n+2}{3(n+1)}-1=\frac{n+2-3(n+1)}{3(n+1)}=\frac{-2n-1}{3(n+1)}=\frac{-\overbrace{(2n+1)}^{+}}{3\underbrace{(n+1)}_{+}}\prec 0$$

ومنه : $\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\prec 0$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n}\prec 1$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

<u>2)</u> <u>دراسة اتجاه تغير المتتالية</u> (v_n):

<u>طريقة 1 :</u>

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2(n+1)-1}{(n+1)+3}-\frac{2n-1}{n+3}=\frac{2n+1}{n+4}-\frac{2n-1}{n+3}=\frac{(2n+1)(n+3)-(2n-1)(n+4)}{(n+4)(n+3)}=\frac{7}{\underbrace{(n+4)}_{+}\underbrace{(n+3)}_{+}}\succ 0$$

ومنه المتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

طريقة 2 :

لتكن f دالة مرفقة بالمتتالية (v_n) من الشكل $v_n = f(n)$ حيث : $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ مع $x \in [0;+\infty[$

دراسة اتجاه تغير الدالة f : من أجل كل $x \in [0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2\times 3-(-1)\times 1}{(x+3)^2}=\frac{7}{(x+3)^2}\succ 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ وبالتالي المتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

تمرين :

أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام u_n في كل حالة من الحالات التالية :

1) $u_n = 4-3n$ ، 2) $u_n=\frac{n}{3}-5$ ، 3) $u_n = 4\times 3^n$ ،

4) $u_n=-5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، 5) $u_n=\frac{2^n}{3}$ ، 6) $u_n=\frac{2^{n+1}}{3^n}$

المتتاليات الحسابية :

تعريف :

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r (r عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n :
$u_{n+1} = u_n + r$ (أو $u_{n+1} - u_n = r$)

مثال 1 :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $u_0 = -5$.

- أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3.

الحل :

$$u_1 = u_0 + r = -5 + 2 = -3$$
$$u_2 = u_1 + r = -3 + 2 = -1$$
$$u_3 = u_2 + r = -1 + 2 = 1$$

مثال2:

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = -3n + 1$

- بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

طريقة :

لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = r$ مع r عدد حقيقي ثابت .

الحل :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -3(n+1) + 1 - (-3n+1) \\ &= -3n - 3 + 1 + 3n - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$.

- تعيين الحد الأول : $u_0 = -3 \times 0 + 1 = 1$

تطبيق :

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = 4n - 3$

- بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

عبارة الحد العام لمتتالية حسابية:

خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p : $u_n = u_p + (n-p)r$

حالات خاصة : إذا كان حدها الأول u_0 : $u_n = u_0 + nr$ ، إذا كان حدها الأول u_1 : $u_n = u_1 + (n-1)r$.

مثال 1 :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ وحدها الأول $u_0 = 2$

- عين عبارة الحد العام للمتتالية (u_n).

الحل :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 + nr$ أي $u_n = 2 + n \times (-5)$ ومنه : $u_n = -5n + 2$.

مثال 2 :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ وحدها الأول $u_1 = 2$

- أكتب u_n بدلالة n.

الحل :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n=u_1+(n-1)r$ أي $u_n=2+(n-1)\times(-5)$ ومنه : $u_n=2-5n+5$

وبالتالي : $u_n=-5n+7$

تطبيق :

. لتكن (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_{10}=37$ و $u_6=25$.

1- عين r أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول .

2- أكتب u_n بدلالة n.

3- بين أن العدد 2020 حد من حدود المتتالية (u_n)معينا رتبته.

حساب مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية :

خاصية : إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن :

$$S=u_0+u_1+...+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$$

$$S=u_1+u_2+...+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$$

بصفة عامة : $S=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left(\text{الحد الاول}+\text{الحد الاخير}\right)$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير ناقص دليل الحد الأول زائد واحد.

مثال : (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$

- عبر عن S_n بدلالة n حيث : $S_n=u_0+u_1+....+u_n$.

الحل :

$$S_n=u_0+u_1+....+u_n=\frac{n-0+1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}\right)=\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}n+3\right)=\frac{n+1}{2}\left(\frac{n+6}{2}\right)=\frac{(n+1)(n+6)}{4}$$

الوسط الحسابي :

خاصية : تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a+c=2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a وc.

مثال : (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_1=2$ و$u_3=8$

- أحسب u_2.

الحل :

لدينا $u_1+u_3=2u_2$ ومنه $2u_2=8+2$ أي $2u_2=10$ وبالتالي $u_2=5$.

تمرين 1:

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r=5$ وحدها الأول $u_0=-3$.

1- أحسب u_1 .

2- أكتب u_nبدلالة n.

3- أحسب الحد ذو الرتبة 2021.

4- أحسب المجموع S حيث : $S=u_0+u_1+...+u_{2020}$.

5- أحسب المجموع S' حيث : $S'=u_1+u_2+...+u_{2020}$.

6- أكتب بدلالة n كل من المجموعين S_n و S'_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ و $S'_n=u_1+u_2+....+u_{n-1}$.

☚ **الحل :**

1- حساب الحد u_1 : $u_1 = u_0 + r = -3 + 5 = 2$.

2- كتابة u_n بدلالة n : $u_n = u_0 + nr = -3 + n \times 5 = 5n - 3$

3- الحد ذو الرتبة 2021 هو u_{2020}

ومنه $u_{2020} = 5 \times 2020 - 3 = 10097$.

4- حساب المجموع S :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{2020} = \frac{2020 - 0 + 1}{2}\left(u_0 + u_{2020}\right) = \frac{2021}{2}\left(-3 + 10097\right) = 10199987$$

5- حساب المجموع S' :

$$S' = u_1 + u_2 + \ldots + u_{2020} = \frac{2020 - 1 + 1}{2}\left(u_1 + u_{2020}\right) = \frac{2020}{2}\left(2 + 10097\right) = 10199990$$

6- كتابة S_n بدلالة n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n - 0 + 1}{2}\left(u_0 + u_n\right) = \frac{n+1}{2}\left(-3 + 5n - 3\right) = \frac{(n+1)(5n-6)}{2}$$

- كتابة S'_n بدلالة n :

$$S'_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = \frac{n - 1 - 1 + 1}{2}\left(u_1 + u_{n-1}\right) = \frac{n-1}{2}\left(2 + 5(n-1) - 3\right) = \frac{n-1}{2}\left(2 + 5n - 5 - 3\right) = \frac{(n-1)(5n-6)}{2}$$

☚ **تمرين 2:**

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 5$ وحدها الأول $u_1 = 2$.

1- أحسب u_2 و u_3 .

2- أكتب u_n بدلالة n .

3- أحسب الحد ذو الرتبة 2020.

4- أحسب المجموع S حيث : $S = 7 + 12 + \ldots + 10097$.

☚ **تمرين 3:**

لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r حيث : $u_2 - u_0 = 4$ و $u_1 + u_3 = 16$.

1) أحسب الحد u_2 ، ثم الحد u_0 واستنتج الأساس r للمتتالية (u_n).

2) أ- بين أن الحد العام للمتتالية معرف بـ : $u_n = 4 + 2n$.

ب – حدد مع التبرير اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) بين أن العدد 2020 حد من حدود المتتالية (u_n) ، محددا رتبته .

4) أحسب المجموع S المعرف بـ : $S = u_0 + u_1 + \ldots. + u_{1008}$.

المتتاليات الهندسية :

تعريف :

نقول أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q (q عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=u_n\times q$ (أو $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$)

مثال 1: لتكن $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $u_0=-4$.

-أحسب الحدين u_1 ، u_2.

الحل :

$u_1=u_0\times q=-4\times 2=-8$ و $u_2=u_1\times q=-8\times 2=-16$

مثال 2 :

لتكن $\left(u_n\right)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=2\times 3^n$

- بين أن $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

طريقة :

لإثبات أن $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n\times q$ مع q عدد حقيقي ثابت .

الحل :

$u_{n+1}=2\times 3^{n+1}=2\times 3^n\times 3=u_n\times 3$

ومنه $\left(u_n\right)$ هندسية أساسها $q=3$.

حساب الحد الأول : $u_0=2\times 3^0=2$.

تطبيق :

لتكن $\left(u_n\right)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=-5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- بين أن $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

عبارة الحد العام لمتتالية هندسية :

خاصية :

إذا كانت $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p : $u_n=u_p\times q^{n-p}$

حالات خاصة : إذا كان حدها الأول u_0 : $u_n=u_0\times q^n$ ، إذا كان حدها الأول u_1 : $u_n=u_1\times q^{n-1}$.

مثال 1 :

لتكن $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=7$ وحدها الأول $u_0=2$

- عين عبارة الحد العام للمتتالية $\left(u_n\right)$.

الحل :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=u_0\times q^n$ أي $u_n=2\times 7^n$.

مثال 2 :

لتكن $\left(u_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_1=-3$

- أكتب u_n بدلالة n.

الحل : لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

لدينا : $u_n=u_1\times q^{n-1}$ أي $u_n=-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ومنه : $u_n=-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ وبالتالي : $u_n=-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

تطبيق :

. لتكن (u_n) متتالية هندسية معرفة على ℕ حيث : $u_8=-768$ و $u_{15}=-98304$.

1/ عين q أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول .

2/ أكتب u_n بدلالة n.

3/ أحسب الحد الحادي العاشر .

تمرين :

بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و 3630 نسمة سنة 2007 .

نفرض أن α نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدينة ثابتة .

1- عين α نسبة تزايد سكان المدينة.

2- كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات .

الحل :

نرمز بـ u_n مثلا إلى عدد سكان المدينة سنة $2005+n$ وبذلك يكون $u_0=3000$

و $2007=2005+2$ أي $u_2=3630$

1- بما أن نسبة التزايد α ثابتة فان العلاقة بين عدد السكان خلال السنة $2005+n$ وعدد السكان خلال السنة الموالية وهي :

$u_{n+1}=u_n+\alpha u_n$ أي $u_{n+1}=(1+\alpha)u_n$ وبالتالي (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=1+\alpha$.

لدينا : $u_2=u_0\times q^2$ ومنه $q^2=\frac{u_2}{u_0}$ أي : $q^2=1.21$ وبالتالي $q=1.1$ أي $\alpha+1=1.1$ ومنه $\alpha=0.1=10\%$

2- لدينا : $2030=2005+25$ ولدينا $u_{25}=u_0\times q^{25}$ ومنه $u_{25}=3000\times(1.1)^{25}$ أي $u_{25}\approx 32504.12$.

حساب مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية:

خاصية : إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن :

$$S=u_0+u_1+...+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S=u_1+u_2+...+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n}}{1-q}$$

بصفة عامة : $S=$ الحد الاول $\times\ \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$

عدد الحدود $=$دليل الحد الأخير ناقص دليل الحد الأول زائد واحد.

إذا كان $q=1$ فإن (الحدود متساوية والمتتالية الهندسية ثابتة)

$S=$ (عدد الحدود) $\times$ الحد الاول

مثال : (u_n) متتالية هندسية حدها الاول $u_0=5$ وأساسها $q=\frac{1}{2}$.

- عبر عن S_n بدلالة n حيث : $S_n=u_0+u_1+....+u_n$.

الحل :

$$S_n=u_0+u_1+....+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}=5\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{2}}=5\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}=2\times5\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=10\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

تطبيق 1:

(u_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول $u_0=-3$.

1) أحسب u_1 .

2) أحسب المجموع S حيث : $S=u_0+u_1+...+u_{19}$.

3) أحسب المجموع S' حيث : $S'=u_1+u_2+...+u_{19}$.

4) أكتب بدلالة n كل من المجموعين S_n و S'_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ و $S'_n=u_1+u_2+....+u_{n-1}$.

الحل :

1) حساب الحد u_1 : $u_1=u_0\times q=-3\times 4=-12$.

2) حساب المجموع S :

$$S=u_0+u_1+...+u_{19}=u_0\times\frac{1-q^{19-0+1}}{1-q}=-3\times\frac{1-4^{20}}{1-4}=-3\times\frac{1-4^{20}}{-3}=1-4^{20}$$

حساب المجموع S' :

$$S'=u_1+u_2+...+u_{19}=u_1\times\frac{1-q^{19-1+1}}{1-q}=-12\times\frac{1-4^{19}}{1-4}=-12\times\frac{1-4^{19}}{-3}=4\left(1-4^{19}\right)$$

كتابة S_n بدلالة n :

$$S_n=u_0+u_1+...+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}=-3\times\frac{1-4^{n+1}}{1-4}=-3\times\frac{1-4^{n+1}}{-3}=1-4^{n+1}$$

- كتابة S'_n بدلالة n :

$$S'_n=u_1+u_2+...+u_{19}=u_1\times\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q}=-12\times\frac{1-4^{n}}{1-4}=-12\times\frac{1-4^{n}}{-3}=4\left(1-4^{n}\right)$$

الوسط الهندسي:

خاصية : تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $a\times c=b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

مثال :

لتكن (u_n) متتالية هندسية ، حدودها موجبة تماما حيث : $u_3\times u_5=2916$

- أحسب الحد u_4 .

الحل :

لدينا : $u_4^2=u_3\times u_5$ ومنه $u_4^2=2916$ ومنه $u_4=54$ أو $u_4=-54$ ولان الحدود موجبة فان $u_4=54$.

تمرين :بكالوريا علوم تجريبية 2009 .

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases}u_1+2u_2+u_3=32\\ u_1\times u_2\times u_3=216\end{cases}$$

1) أ- أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1 .

ب- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ - أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n=728$

2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_1=2$ و $v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n$

أ- أحسب v_2 و v_3 .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$

- بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ - أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

المتتاليات المحدودة :

تعاريف :

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

1. القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \le A$.
2. القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \ge B$.
3. القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني وجود عددان حقيقيان A و B حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $B \le u_n \le A$.

مثال 1 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ : $u_n = 2+\frac{3}{n}$.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{3}{n} \le 3$ ومنه $2+\frac{3}{n} \le 2+3$ أي $u_n \le 5$ وبالتالي (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 5.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{3}{n} \succ 0$ ومنه $2+\frac{3}{n} \succ 2+0$ أي $u_n \succ 2$ وبالتالي (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $2 \prec u_n \le 5$ وبالتالي (u_n) محدودة .

مثال 2 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+4}$.

- أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـ 2 .

الحل:

لدينا :

$$u_n - 2 = \frac{2n^2+1}{n^2+4} - 2 = \frac{2n^2+1-2\left(n^2+4\right)}{n^2+4} = \frac{2n^2+1-2n^2-8}{n^2+4} = \frac{-7}{n^2+4} \prec 0$$

أي : $u_n - 2 \prec 0$ ومنه $u_n \prec 2$ وبالتالي المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 .

تطبيق 1:

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = \frac{8n}{n^2+4}$.

- برهن أن المتتالية (u_n) محدودة بالعددين 0 و 2 .

الاستدلال بالتراجع :

مبدأ الاستدلال بالتراجع :

$p(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي .

للبرهان على صحة الخاصية $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي n_0 يكفي أن :

1- التأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $p(n_0)$.

2- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر أو يساوي n_0 أي $p(n)$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $p(n+1)$.

مثال1:

لنثبت صحة الخاصية التالية: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

المرحلة الأولى : من أجل $n=1$ لدينا : $1=\frac{1\times 2}{2}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

المرحلة الثانية : نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n حيث $n\geq 1$: أي $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

ونبرهن على صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي : $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

لدينا :

$$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ومنه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

مثال 2:

برهن بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد n^3-n مضاعف للعدد 3.

المرحلة الأولى : من أجل $n=0$: $0^3-0=0=3\times 0$ صحيحة .

المرحلة الثانية : نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي : n^3-n مضاعف للعدد 3وبالتالي : $n^3-n=3k$ مع k عدد طبيعي.

ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي : $(n+1)^3-(n+1)$ مضاعف للعدد 3.

لدينا :

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1$$

$$=\underbrace{n^3-n}_{3k}+3n^2+3n$$

$$=3(k+n^2+n)$$

ومنه $(n+1)^3-(n+1)$ مضاعف للعدد 3 أي الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n n^3-n مضاعف للعدد 3 .

☚ **تمرين :**

(u_n) متتالية حدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$.

2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

☚ **الحل :**

1- من أجل $n = 0$: $u_0 = 4 \geq -2$ صحيحة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n \geq -2$ ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} \geq -2$

لدينا $u_n \geq -2$ ومنه $\frac{1}{2}u_n \geq -1$ ومنه $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq -1 - 1$ وبالتالي $u_{n+1} \geq -2$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$.

2- إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 1$$

لدينا : $u_n \geq -2$ ومنه $\frac{-1}{2}u_n \leq 1$ أي $\frac{-1}{2}u_n - 1 \leq 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على □ .

☚ **تمرين :**

المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 2$.

2- أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

المتتاليات المتقاربة :

نهاية متتالية :

نقول أن العدد الحقيقي l نهاية للمتتالية (u_n) يعني أن كل مجال مفتوح مركزه l يشمل كل حدود هذه المتتالية من رتبة معينة ونكتب :
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=l$ أو $\lim(u_n)=l$ وفي هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة .

ملاحظة :

-1 إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها وحيدة .

-2 إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غير موجودة) .

المتتاليات من الشكل $u_n=f(n)$

يمثل α عددا حقيقيا ، $+\infty$ أو $-\infty$. (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام $u_n=f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

مثال 1 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ : $u_n=\dfrac{1}{n}$

- هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$

ومنه المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 0 .

مثال 2 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n=\dfrac{n^2+1}{n}$

- هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$

ومنه المتتالية (u_n) متباعدة .

نهاية متتالية هندسية :

مبرهنة :

1) إذا كان $-1\prec q\prec 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$.

2) إذا كان $q=1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=1$.

3) إذا كان $q\succ 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$.

4) إذا كان $q\leq -1$ فإن النهاية غير موجودة.

أمثلة :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n=+\infty$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n=0$.

الرتابة والتقارب :

مبرهنة :

1/ إذا كانت متتالية متزايدة ومحدود من الأعلى فان هذه المتتالية متقاربة .

2/ إذا كانت متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فان هذه المتتالية متقاربة .

تطبيق 1 : جزء من دورة 2011 الموضوع (2)

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث : $u_0=\dfrac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{2}{5}u_n+\dfrac{1}{5}$.

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\succ\dfrac{1}{3}$.

3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

الحل :

1) حساب الحدود :

$u_1=\dfrac{2}{5}u_0+\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{5}$ ، $u_2=\dfrac{2}{5}u_1+\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{9}{25}$.

2) البرهان بالتراجع :

من أجل $n=0$: $u_0=\dfrac{1}{2}\succ\dfrac{1}{3}$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n\succ\dfrac{1}{3}$ ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}\succ\dfrac{1}{3}$

لدينا : $u_n\succ\dfrac{1}{3}$ ومنه $\dfrac{2}{5}u_n\succ\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{3}$ ومنه $\dfrac{2}{5}u_n+\dfrac{1}{5}\succ\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}$ وبالتالي $u_{n+1}\succ\dfrac{1}{3}$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ\dfrac{1}{3}$.

3) تبيين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}-u_n=\left(\frac{2}{5}-1\right)u_n+\frac{1}{5}=\frac{-3}{5}u_n+\frac{1}{5}$$

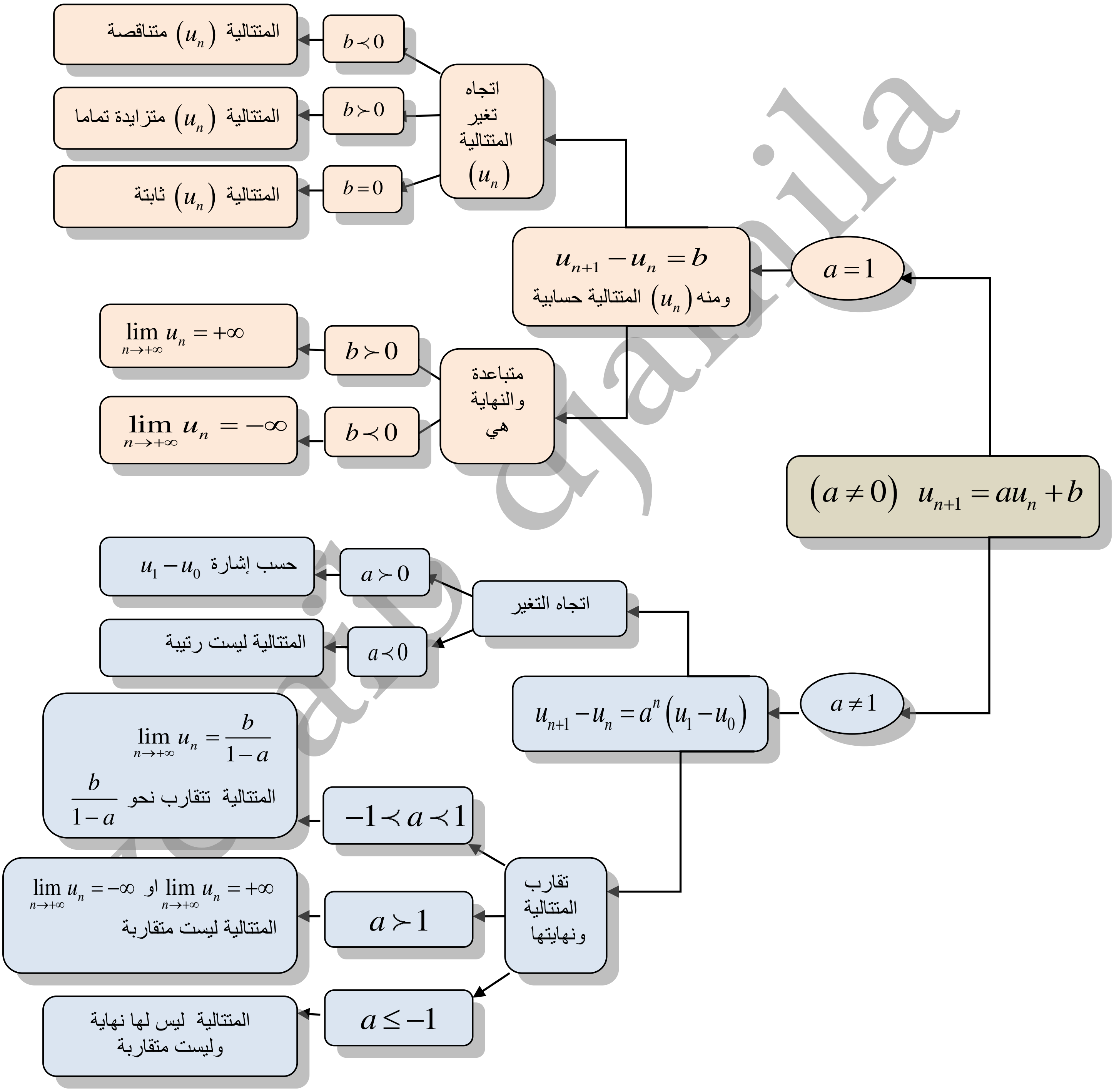
ولدينا $u_n\succ\dfrac{1}{3}$ أي $\dfrac{-3}{5}u_n\prec\dfrac{-3}{5}\times\dfrac{1}{3}$ ومنه $\dfrac{-3}{5}u_n+\dfrac{1}{5}\prec\dfrac{-3}{5}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}$ ومنه $u_{n+1}-u_n\prec 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

دراسة المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b \quad (a \neq 0)$

(u_n) متتالية حدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = au_n + b$ حيث a و b عددان حقيقيان و $a \neq 0$

نلاحظ أن $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة التآلفية $f : x \mapsto ax + b$.



تمرين :

لتكن المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ وبالعلاقة $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

أ) نفرض أن $\alpha=3$

1- أحسب u_1 ، u_2 و u_3 . ضع تخمينا حول طبيعة المتتالية $\left(u_n\right)$ ثم أثبت صحة تخمينك

2- هل المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة ؟

ب) نفرض $\alpha=2$ ونعتبر المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n=u_n-3$

1) أثبت أن المتتالية $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

3) بين أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة محددا نهايتها .

4) أدرس اتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$.

ج) نفرض $\alpha=6$ ، أدرس اتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$.

الحل:

أ) لدينا $\alpha=3$ ومنه $u_0=3$

1- لدينا : $u_1=\frac{1}{3}\times u_0+2=\frac{1}{3}\times 3+2=3$ ، $u_2=\frac{1}{3}\times u_1+2=\frac{1}{3}\times 3+2=3$ و $u_3=\frac{1}{3}\times u_2+2=\frac{1}{3}\times 3+2=3$

إثبات صحة التخمين:

المرحلة الأولى : من أجل $n=0$: $u_0=3$ صحيحة

المرحلة الثانية : نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n=3$ ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}=3$

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{3}\times u_n+2=\frac{1}{3}\times 3+2=3$ ومنه $u_{n+1}=3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي : الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية $\left(u_n\right)$ ثابتة .

2- نعم المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة وتتقارب نحو العدد 3 .

ب) لدينا $\alpha=2$ ومنه $u_0=2$

1- إثبات أن المتتالية $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية و تعيين أساسها

$$v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}\left(u_n-3\right)=\frac{1}{3}v_n$$

ومنه $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$.

- تعيين الحد الأول : $v_0=u_0-3=2-3=-1$

2- كتابة v_n بدلالة n : $v_n=v_0\times q^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

- كتابة u_n بدلالة n : لدينا $v_n=u_n-3$ ومنه $u_n=v_n+3$ وبالتالي $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$

3- بما أن $-1\prec\frac{1}{3}\prec 1$ فان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\right]=3$ ونستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ $\left(u_n\right)$ متقاربة وتتقارب نحو العدد 3.

4- نلاحظ أن $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ حيث $f:x\mapsto\frac{1}{3}x+2$ ، بما أن $\frac{1}{3}\succ 0$ و $u_1-u_0\succ 0$ ($u_1-u_0=\frac{2}{3}$) فان المتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة

ج) لدينا $\alpha=6$ ومنه $u_0=6$

بما أن $\frac{1}{3}\succ 0$ و $u_1-u_0\prec 0$ ($u_1-u_0=-2$) فان المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة.

تمارين المتتاليات في بكالوريا تسيير واقتصاد
(من 2011 إلى 2020)

دورة 2011 الموضوع (2) :

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث : $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+\frac{1}{5}$.

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \succ \frac{1}{3}$.

3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

4) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-\frac{1}{3}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

جـ - أحسب نهاية المتتالية (u_n).

دورة 2012 الموضوع (1):

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{3u_n+4}{9}$.

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \succ \frac{2}{3}$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n-\frac{2}{3}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية ، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\right]$.

جـ- ماهي نهاية المتتالية (u_n)؟

3) أحسب ، بدلالة n، المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

دورة 2012 الموضوع (2) :

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره $50000DA$ في صندوق التوفير والاحتياط . يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا . يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره $5000DA$ (بعد حساب الفوائد) .

يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008+n$.

1) أ- أحسب كلا من u_0 ، u_1 و u_2.

ب – هل المتتالية (u_n) هندسية ؟ هل هي حسابية ؟ برر إجابتك.

جـ - بين لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا ، $u_{n+1}=1.05u_n-5000$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-100000$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، حدد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=-50000\times(1.05)^n+100000$.

3) أ- ماهو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 ؟

ب – ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة ؟

دورة 2013 الموضوع (1):

$\left(u_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=\left(\frac{2a+1}{3}\right)u_n-\frac{2a+4}{3}$ ، حيث a وسيط حقيقي .

1- عين قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية $\left(u_n\right)$ ثابتة .

2- نفرض $a\neq\frac{5}{2}$. عين قيمة a حتى تكون المتتالية $\left(u_n\right)$ حسابية ، ثم احسب عندئذ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية .

3- عين قيمة a حتى تكون المتتالية $\left(u_n\right)$ هندسية ، ثم عين في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها .

4- نفرض أن $a=4$. برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، فان : $u_n=3^n+2$ ، ثم بين أن :

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{1}{2}\left(3^{n+1}+4n+3\right)$$

دورة 2013 الموضوع (2) :

$\left(u_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+6$.

1) أ- أحسب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .

ب – هل المتتالية $\left(u_n\right)$ رتيبة على ؟ برر إجابتك .

2) أ- بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي ، $u_{n+1}-4=-\frac{1}{2}\left(u_n-4\right)$.

ب – استنتج أن المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرفة على بـ : $v_n=u_n-4$ هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

جـ - أكتب v_n ، ثم u_n بدلالة n .

د – بين أن $\left(u_n\right)$ متقاربة .

3) باستعمال عبارة u_n ، تأكد ثانية من نتيجة السؤال 1) ب .

دورة 2014 الموضوع (1):

أجب بصحيح أو خطأ ، مع التبرير ، في كل حالة من الحالات الآتية :

1/ $\left(u_n\right)$ متتالية عددية معرفة على حدودها موجبة تماما و $\left(v_n\right)$ المتتالية المعرفة على بـ : $v_n=\ln u_n$

أ) إذا كانت $\left(u_n\right)$ متقاربة فان $\left(v_n\right)$ متقاربة .

ب) إذا كانت $\left(u_n\right)$ متناقصة فان $\left(v_n\right)$ متناقصة .

جـ) إذا كانت $\left(u_n\right)$ هندسية فان $\left(v_n\right)$ حسابية .

دورة 2014 الموضوع (2):

المتتالية العددية $\left(u_n\right)$ معرفة كما يلي : $u_0=3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-1$

1- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $u_n\succ-3$

ب) بين أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة تماما .

جـ) استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة .

2- لتكن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث : $v_0=6$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_0+v_1+\ldots+v_n\right)=18$

أ) بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(v_0+v_1+\ldots+v_n\right)=\frac{v_0}{1-q}$

ب) أحسب الأساس q ثم عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

جـ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=v_n-3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

دورة 2015 الموضوع (1):

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام : $u_n = 5\times 2^n \times 3^{n-1}$.

أ) (u_n) حسابية ، ب) (u_n) هندسية ، ج) (u_n) ليست هندسية ولا حسابية.

2) (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 1$ وأساسها 4 ، قيمة n التي من أجلها يكون $v_1 + v_2 + ... + v_n = 2015$ هي :

أ) $n = 31$ ، ب) $n = 32$ ، ج) $n = 33$.

دورة 2015 الموضوع (2) :

بينت دراسة أن 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنويا وبالمقابل يوظف 3000 عامل سنويا . علما أن سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ : u_n لعدد العمال سنة $2012+n$ أي $u_0 = 50$.

1) أحسب u_1 و u_2.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0.95u_n + 3$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية .

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = 60 - u_n$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ) قدر عدد العمال سنة2017.

د) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n).

هـ) أحسب نهاية المتتالية (u_n) . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل ؟

دورة 2016 الموضوع (1):

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $v_0 = 18$ والعلاقة : $v_0 + v_1 + v_2 = 38$

/1 بين أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$.

/2 أ) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n).

جـ) أحسب نهاية (v_n).

/3 نضع $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

أ) أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.

ب) جد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$.

دورة 2016 الموضوع (2) :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$

1) أحسب الحدين u_1 و u_2.

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 1$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

جـ- ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (u_n)؟

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - 1$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية معينا أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$.

جـ - أحسب نهاية (u_n).

دورة 2017 الموضوع (1) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

1) أ. برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \prec 3$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

2) (v_n) المتتالية المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=3-u_n$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ثم عين حدها الأول .

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n=3(n-1)+2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

دورة 2017 الموضوع (2) :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=2$ ومن أجل كل n طبيعي، $u_{n+1}=3u_n-2$

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـ : من أجل كل n طبيعي، $v_n=u_{n+1}-u_n$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول .

ب) عين v_n بدلالة n ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$.

أ) أحسب S_n بدلالة n.

ب) بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=S_n+u_0$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n

دورة 2018 الموضوع (1) :

I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي :

$u_0=50$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=0.7u_n+6$ و $v_n=u_n-20$

1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 0.7 يطلب تعيين حدها الأول v_0 ، وكتابة عبارة v_n بدلالة n.

2) أ. أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n.

ب. عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016 . بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد .

نعتبر المئة هي الوحدة : ونرمز بـ u_n لعدد المشتركين في سنة $2016+n$ أي $u_0=50$

1) ماهو عدد المشتركين في سنة 2017 ؟ ثم في سنة 2018 ؟

2) أ. برر العبارة $u_{n+1}=0.7u_n+6$.

ب. ابتداء من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك ؟

دورة 2018 الموضوع (2) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=-1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $2u_{n+1}=u_n+6$

1) أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \prec 6$.

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$.

أ. بين ان (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول v_0 .

ب.أكتب v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أحسب بدلالة n ما يلي : $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times v_2\times...\times v_n$

الموضوع2019دورة (1):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=-4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2$.

1) أ) أحسب كلا من u_1 و u_2 .

ب) برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \prec 8$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $v_n=u_n-\alpha$ ، حيث α عدد حقيقي .

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n-\frac{1}{4}\alpha+2$.

ب) عين قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

جـ) نضع $\alpha=8$ ، عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=-12\left(\frac{3}{4}\right)^n+8$.

4) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

دورة 2019 الموضوع (2) :

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_2+2u_5=27 \\ u_1=\frac{9}{2} \end{cases}$

1) أحسب حدها الاول u_0 وأساسها r .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3) بين أن العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية ثم أحسب كلا من المجموعين S_1 و S_2 .

حيث $S_1=u_1+u_2+u_3+...+u_{1344}$ و $S_2=u_2+u_4+u_6+...+u_{1344}$.

- استنتج حساب المجموع S_3 حيث : $S_3=u_1+u_3+u_5+...+u_{1343}$.

4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=e^{6-2u_n}$.

- أحسب المجموع $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+...+\frac{1}{v_n}$

دورة 2020 الموضوع (1) :

يتقاضى موظف خلال 2019 راتبا شهريا ثابتا يقدر بـ $70000\ DA$ ، في شهر جانفي استهلك منه 80% وابتداء من شهر فيفري قرر تخفيض مبلغ الاستهلاك شهريا بنسبة 5% من المبلغ المستهلك في الشهر الذي قبله .

1) أ. ماهو المبلغ المستهلك في شهر جانفي ؟

ب. حدد المبلغ المستهلك في شهر فيفري .

2) نضع : u_1 المبلغ المستهلك في شهر جانفي و u_n المبلغ المستهلك في الشهر n ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n واستنتج إن (u_n) متتالية هندسية أساسها 0.95.

3) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

4) أ. احسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019.

ب. أوجد المبلغ المدخر خلال هذه السنة .

دورة 2020 الموضوع (1):

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{3}{2}$.

1) أ. برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \prec \frac{9}{2}$.

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-\frac{9}{2}$.

أ.بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب حساب حدها الأول v_0.

ب. عبر عن v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

أحسب S_n بدلالة n.

دورة 2020 الموضوع (2):

المتتالية الهندسية (v_n) حدها الأول v_0 وأساسها q موجبان تماما و : $\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8\ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2\ln 2 \end{cases}$

1) بين أن : $v_5 = 32$ و $v_3 = 8$.

2) أ.بين أن : $q = 32$ و $v_0 = 1$.

ب. أكتب v_n بدلالة n.

جـ. هل العدد 1024 حد من حدود المتتالية (v_n)؟

3) المتتالية (w_n) معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = 2n - 3 + 2^n$

أ. تحقق أن : $w_n = u_n + v_n$ ، حيث (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_0.

ب. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = (n+1)(n-3) + 2^{n+1} - 1$

دورة 2020 الموضوع (2):

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث : $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7}$.

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 3$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .

3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 3$.

أ.بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب. أكتب عبارة v_n بدلالة n .

جـ . استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\times\left(\frac{5}{7}\right)^n + 3$ و أحسب نهاية (u_n)

4) عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n \prec \frac{7}{2}$.