الاستدلال بالتراجع – المتتاليات العددية

1- الاستدلال التراجع

مبرهنة	$P(n)$ خاصية متعلقة بمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ و n_0 عدد طبيعي. للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن نثبت: الشطر 1- نتأكد من صحة الخاصية من أجل $n=n_0$ أي أن $P(n_0)$ صحيحة. الشطر 2- نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي n_0 (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ من أجل $n+1$.
ملاحظات	❖ إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $n_0=0$ وإذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن $n_0=1$ وهكذا...

2- المتتاليات العددية: (u_n) متتالية عددية

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
الأساس	(u_n) متتالية حسابية معناه: $u_{n+1}-u_n=r$ أو $u_{n+1}=u_n+r$ حيث $r \in \mathbb{R}$	(u_n) متتالية هندسية معناه: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ أو $u_{n+1}=q\times u_n$ حيث $q \in \mathbb{R}_+^*$
عبارة الحد العام	بصفة عامة: عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هي من الشكل: $u_n=u_p+(n-p)r$ حيث: ✓ u_p الحد الأول في المتتالية (u_n). ✓ p دليل الحد الأول. ✓ r الأساس المتتالية (u_n).	بصفة عامة: عبارة الحد العام للمتتالية الحسابية هي من الشكل: $u_n=u_p\times q^{n-p}$ حيث: ✓ u_p الحد الأول في المتتالية (u_n). ✓ p دليل الحد الأول. ✓ r الأساس المتتالية (u_n).
الوسط	الوسط الحسابي: إذا كانت $a;b$ و c بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية فإن: $2b=a+c$	الوسط الهندسي: إذا كانت $a;b$ و c بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن: $b^2=a\times c$
المجموع	المجموع $=\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\left(\text{الحد الأول}+\text{الحد الأخير}\right)$	المجموع $=$ الحد الأول $\left(\frac{1-\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1-\text{الأساس}}\right)$
	عدد الحدود $=$ دليل الحد الأخير $-$ دليل الحد الأول $+1$	
اتجاه التغير	☑ إذا كان $r>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ☑ إذا كان $r<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ☑ إذا كان $r=0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة	☑ إذا كان $q>1$ و $u_p>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ☑ إذا كان $0<q<1$ و $u_p>0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ☑ إذا كان $q=1$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة تماما ☑ إذا كان $q>1$ و $u_p<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ☑ إذا كان $0<q<1$ و $u_p<0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

❖ متتالية محدودة من الأعلى، متتالية محدودة من الأسفل، متتالية محدودة:

✍ نقول عن المتتالية (u_n) أنها محدودة من الأعلى إذا كان $u_n \leq A$ (أو $u_n < A$) حيث A عدد حقيقي

✍ نقول عن المتتالية (u_n) أنها محدودة من الأسفل إذا كان $u_n \geq B$ (أو $u_n > B$) حيث B عدد حقيقي

✍ نقول عن المتتالية أنها محدودة إذا كان محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل.

❖ تقارب متتالية:

✍ إذا كانت متتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فإن (u_n) متقاربة.

✍ إذا كانت متتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فإن (u_n) متقاربة.

✍ إذا كانت نهاية المتتالية نهاية منتهية فإن (u_n) متقاربة.

تقارب أو تباعد متتالية حسابية	تقارب أو تباعد متتالية هندسية
☑ إذا كان $r > 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ☑ إذا كان $r < 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ إذن المتتالية الحسابية دوما متباعدة.	☑ إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ هذا يعني أن المتتالية الهندسية في هذه الحالة متباعدة. ☑ إذا كان $0 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ هذا يعني أن المتتالية الهندسية في هذه الحالة متقاربة.

❖ المتتاليتان المتجاورتان: غير مقرر هذا العام

تكون المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$