

• شعب أدبية

• المتتاليات العددية

ملخصات الباك

السور الأول

مفهوم المتتالية



1 تعريف

- متتالية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$ والذي نرمز له بالرمز u_n .
- + نرمز للمتتالية u بـ (u_n) .
 - + يسمى u_n الحد العام للمتتالية (u_n) ، أو الحد الذي دبله n .
 - + رتبة الحد u_b باعتبار u_a هو الحد الأول للمتتالية (u_n) هي $b-a+1$.
 - + إذا كانت (u_n) معرفة على \mathbb{N} فإنّ حدها الأول هو u_0 ، وإذا كانت معرفة على \mathbb{N}^* فإنّ حدها الأول هو u_1 .

2 طرق توليد متتالية

يمكن توليد متتالية عدديّة بإعطاء

علاقة تراجعية



عبارة الحد العام

مثال

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} بـ:

$$\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = 4v_n - 1 \end{cases}$$

- لحساب أي حد v_p يجب معرفة الحد الذي قبله v_{p-1} .

$$v_1 = 4v_0 - 1 = 4(-3) - 1 = -13$$

$$v_2 = 4v_1 - 1 = 4(-13) - 1 = -53$$

$$v_3 = 4v_2 - 1 = 4(-53) - 1 = -213$$

مثال

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على \mathbb{N} بـ:

$$u_n = 2n + 5$$

- لحساب أي حد u_p يكفي تعويض p في عبارة الحد العام لـ (u_n) .

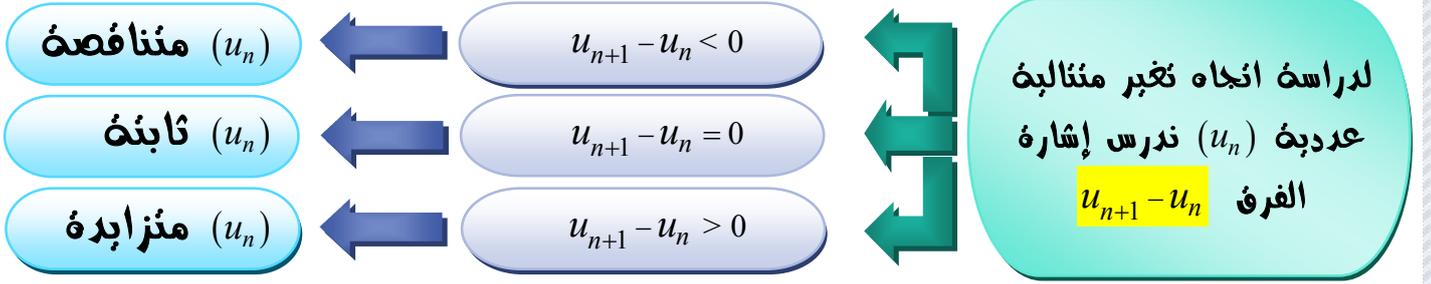
$$u_0 = 2 \times 0 + 5 = 5$$

$$u_1 = 2 \times 1 + 5 = 7$$

$$u_{2021} = 2 \times 2021 + 5 = 4047$$



اتجاه تغير متتالية عددية



ملاحظة: القول عن متتالية عددية (u_n) أنها **رتبية** معناه أنها إما متزايدة وإما متناقصة

المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

المتتالية الهندسية

نقول إن (u_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \times q$ ، بسمي q أساس المتتالية (u_n) .

- (u_n) معرفة على \mathbb{N} معناه: $u_n = u_0 \times q^n$
- (u_n) معرفة على \mathbb{N}^* معناه: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
- في الحالة العامة: $u_n = u_p \times q^{n-p}$

a, b, c ثلاث حدود غير معدومة ومتعاقبة من متتالية هندسية بآف $a \times c = b^2$.
بسمي الوسط الهندسي للعددين a و c .

المتتالية الحسية

نقول إن (u_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$ ، بسمي r أساس المتتالية (u_n) .

- (u_n) معرفة على \mathbb{N} معناه: $u_n = u_0 + nr$
- (u_n) معرفة على \mathbb{N}^* معناه: $u_n = u_1 + (n-1)r$
- في الحالة العامة: $u_n = u_p + (n-p)r$

a, b, c ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية بآف $a + c = 2b$.
بسمي الوسط الحسابي للعددين a و c .

(u_n) متتالية حسابية أساسها r .
لدينا: $u_{n+1} - u_n = r$.

فإن	إذا كان
(u_n) متناقص	$r < 0$
(u_n) ثابت	$r = 0$
(u_n) متزايد	$r > 0$

- إذا كان $q < 0$ فإن (u_n) ليست رتبية.
- إذا كان $q = 0$ فإن جميع حدود (u_n) معدومة ابتداء من الحد الثاني.
- إذا كان $q > 0$ ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$.

	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$u_0 < 0$	(u_n) متزايدة	(u_n) ثابت	(u_n) متناقص
$u_0 > 0$	(u_n) متناقص	(u_n) ثابت	(u_n) متزايدة

تعريف
عبارة الحد العام
خاصية

اتجاه التغير

المتتالية الهندسية

المتتالية الحسابية

مجموع الحدود

$$\text{مجموع الحدود} = \frac{\text{الحد الأول}}{1 - \text{الأساس}} (1 - \text{عدد الحدود الأساس})$$

$$1 + \text{دليل الحد الأول} - \text{دليل الحد الأخير} = \text{عدد الحدود}$$

$$\text{مجموع الحدود} = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})$$

$$1 + \text{دليل الحد الأول} - \text{دليل الحد الأخير} = \text{عدد الحدود}$$

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{u_p}{1-q} (1 - q^{n-p+1}); q \neq 1$$

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{n-p+1}{2} (u_p + u_n)$$

المتتاليات التراجعية

(u_n) متناوبة معرفة على \mathbb{N}^* بدورها الأول u_1 و بالعلاقة $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$.

الحالة 3 $a \neq 1$ و $u_0 \neq \frac{b}{1-a}$

الحالة 2 $a \neq 1$ و $u_0 = \frac{b}{1-a}$

الحالة 1 $a = 1$

لدراسة المتناوبة التراجعية (u_n)
نستعين بالمتناوبة (v_n) ذات الحد العام
 $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$

(u_n) متناوبة ثابتة أي:

$$u_{n+1} = u_n = \dots = u_0 = \frac{b}{1-a}$$

(u_n) متناوبة حسابية
أساسها $r = b$

(u_n) متناوبة معرفة على \mathbb{N}^* :-

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

لكن (v_n) المتناوبة المعرفة على \mathbb{N}^* بدورها العام: $v_n = u_n + 3$.

• (v_n) متناوبة هندسية أساسها $q = 2$ و حدها الأول $v_1 = 4$.

• من أجل كل n من \mathbb{N}^* :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 2^{n+1}$$

• ومنه لكل n من \mathbb{N}^* :

$$u_n = v_n - 3 = 2^{n+1} - 3$$

• المجموع:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= v_1 - 3 + v_2 - 3 + \dots + v_n - 3 \\ &= 4(2^n - 1) - 3n \end{aligned}$$

(u_n) متناوبة معرفة على \mathbb{N}^* :-

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

• بحساب الحدود الأولى نجد: $u_2 = -3, u_3 = -3, u_4 = -3, \dots$

• باستعمال البرهان بالتراجع يمكن إثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = -3 \text{ (ثابتة).}$$

• المجموع:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= nu_1 \\ &= -3n \end{aligned}$$

(u_n) متناوبة معرفة على \mathbb{N}^* :-

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$$

• بما أن $u_{n+1} - u_n = -3$ فإن (u_n) متناوبة حسابية

أساسها $r = -3$ و حدها الأول $u_1 = 2$.

• عبارة الحد العام:

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)r \\ &= -3n + 5 \end{aligned}$$

• المجموع:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= \frac{n+1-1}{2} (u_1 + u_n) \\ &= \frac{n(7-3n)}{2} \end{aligned}$$

طبيعة المتناوبة

مثال تطبيقي

تكرار المحاولة يهون كل صعب
والإرادة في النجاح تشق كل دريب

