5 min

CHABANE Oussama

Maths مجلة

#اصدار- جديد

3AS

المتتاليات العددية

شعبة: تسيير و اقتصاد

من اعداد الأستاذ

شعبان أسامة

ملخص الدرس

سؤال و جواب

تمارين مقترحة

تمارين محلولة

اصدار 14 نوفمبر 2020- تلمسان

Facebook / Telegram/ Instagram/ Google : 5min Maths

بسم الله الرحمن الرحيم

اليك أيها التلميذ " مجلة 5min Maths" للسنة الثالثة ثانوي لشعبة تسيير و اقتصاد

محور المتتاليات العددية وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد لاجتياز بكالوريا دورة 2021 ، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد و ربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة ,

في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا التي سهرت دائما على نجاحي بعد توفيق المولى عز و جل.

و ثانيا لجميع تلامذتي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر...أحبكم

الأستاذ شعبان أسامة

مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف مستوياته الثلاثة، تم اصدار أول نسخة بتاريخ: 2019/09/13

5 min Maths

CHABANE Oussama

تجدون في هذا العمل

المتتاليات العددية

- ملخص الدرس+ تطبيقات
- سؤال و جواب
- تمارين محلولة
- تمارين مقترحة

" سيتم نشر المحاور الأخرى الخاصة بهذه الشعبة تدريجيا حسب التوزيع السنوي

#5min Maths

ملخص الدرس

1.متتالية عددية

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ، أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$

ترميز: نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$. هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل .

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0.

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

u_n هو الحد الذي دليله n و يسمى كذالك الحد العام للمتتالية u .

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

أمثلة:
- المتتالية (u_n) حيث : $u_n=-5n^2+2$ معرفة على $\mathbb{N}$.
- المتتالية v حيث : $v_n=\dfrac{5}{n}$ معرفة على $\mathbb{N}-\{0\}$ و نكتب $(v_n)_{n\geq1}$.
- المتتالية w حيث : $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq6$ و نكتب $(w_n)_{n\geq6}$.

ملاحظة: في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته .

مثال: المتتالية w حيث أن $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq6$ ، 6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة حد u_b ($b\in\mathbb{N}$) من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b-a+1$.

2.طرق توليد متتالية عددية.(يقصد بتوليد متتالية معرفة حدودها)

أ-توليد متتالية عددية بالحد العام:

- إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما . و لحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0 .

مثال: المتتالية u المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n=-n^2+3$ معرفة بحدها العام .ويمكن حساب أي حد من الحدود .

ملاحظة: يمكن التعبيرعن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال دالة f و نكتب $u_n=f(n)$ حيث $f:x\mapsto -x^2+3$.

ب- توليد متتالية عددية بعلاقة تراجعية:

• لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x \in D$ فإن $f(x) \in D$. المتتالية u المعرفة بحدها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n \geq n_0$

الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u.

مثال: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n$.

لدينا $u_0 = 1$ و منه $u_1 = 3u_0 = 3$ ، $u_2 = 3u_1 = 9$ ، $u_3 = 3u_2 = 27$ و هكذا ...

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n^2 + 1$.

1) أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_{20} و u_{134} .
2) أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2}

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . وحيث من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -3x^2 + 1$.

حل: 1) $u_0 = -3(0)^2 + 1 = 1$ ، $u_1 = -3(1)^2 + 1 = -2$ ، $u_2 = -3(2)^2 + 1 = -11$ ، $u_3 = -3(3)^2 + 1 = -26$

$u_{20} = -3(20)^2 + 1 = -1199$ ، $u_{134} = -3(134)^2 + 1 = -53867$.

2) $u_{n+1} = -3(n+1)^2 + 1 = -3n^2 - 6n - 2$ ، $u_{2n} = -3(2n)^2 + 1 = -12n^2 + 1$

$u_{3n+2} = -3(3n+2)^2 + 1 = -27n^2 - 36n - 11$.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 2$ من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = \dfrac{3}{2+u_n}$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .
2) أحسب u_{10} ، u_{11} و u_{12} .ثم ضع تخمينا

ملاحظة: المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بها . و من أجل عدد حقيقي موجب x : $f(x) = \dfrac{3}{2+x}$. هذه الدالة معرفة على $[0, +\infty[$ وبما أن $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$

1) $u_1 = \dfrac{3}{2+u_0} = \dfrac{3}{4}$ ، $u_2 = \dfrac{3}{2+u_1} = \dfrac{3}{2+\dfrac{3}{4}} = \dfrac{12}{11}$ ، $u_3 = \dfrac{3}{2+u_2} = \dfrac{3}{2+\dfrac{12}{11}} = \dfrac{33}{34}$.

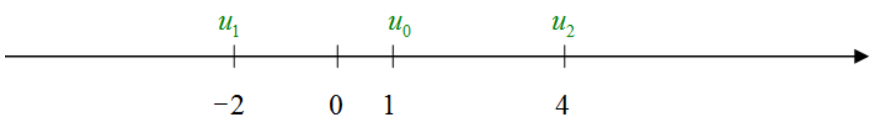
2) الحاسبات تبين أن $u_{10} \approx 1$ ، $u_{11} \approx 1$ و $u_{12} \approx 1$. نلاحظ أن (u_n) تستقر على القيمة 1 إنطلاقا من $n = 10$.

3.التمثيل البياني لمتتالية عددية.

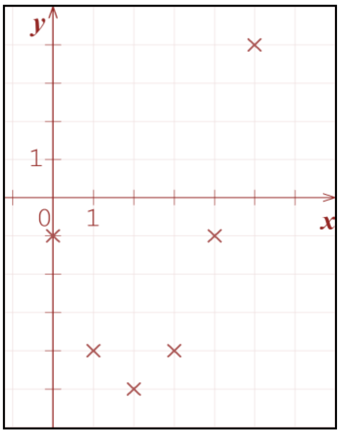
1.متتالية معرفة بالحد العام.

- يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحدها العام على محور

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=(-2)^n$.



- يمكن تمثيل حدود متتالية عددية معرفة بحدها العام (ترفق هذه المتتالية بدالة f).



مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=n^2-4n-1$.

(u_n) معرفة كذالك $u_n=f(n)$ حيث: $f:x\mapsto x^2-4x-1$ نعرف f على المجال

$[0,+\infty[$ بما أن n عدد طبيعي. في الرسم المقابل النقط الممثلة إحداثياها $(n,f(n))$

من أجل $n=0$ ، $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ ، $n=4$ و $n=5$ في المستوي المنسوب

إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. **مجموعة النقط** $M(n,f(n))$ **هي التمثيل البياني للمتتالية** (u_n) .

2.متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f دالة معرفة على $\mathbb{R}$.

مجموعة النقط $M(u_n,f(u_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية (كيفية الإنشاء في الصفحة المقابلة) .

4. إتجاه تغير متتالية عددية.

❶.متتالية متزايدة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\geq u_n$ (على الترتيب $u_{n+1}>u_n$) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

❷.متتالية متناقصة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب)إبتداءا من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1}\leq u_n$ (على الترتيب $u_{n+1}<u_n$) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

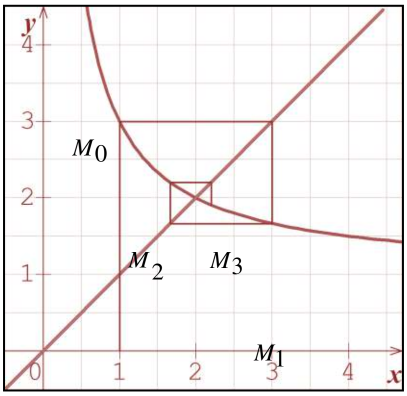
❸.متتالية ثابتة: تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إبتداءا من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1}=u_n$. من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0.

❹. متتالية رتيبة: المتتالية الرتيبة على مجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ أو متناقصة (متناقصة تماما على الترتيب) على المجال I من $\mathbb{N}$ (رتيبة تماما على الترتيب)

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\dfrac{2+u_n}{u_n}$ حيث n عدد طبيعي

- مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) .

➢ **طريقة:** لتمثيل **المتتالية** (u_n) بيانيا ننشئ الرسم البياني للدالة f المرفقة **بالمتتالية** (u_n) ثم ننشئ المستقيم ذا المعادلة $y=x$. لأن المتتالية من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$ والتمثيل البياني هو مجموعة النقط $M(u_n,u_{n+1})$.



حل: (C_f) هوالرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي $f(x)=\frac{2+x}{x}$

نعرف الدالة f على المجال $]0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$. النقطة

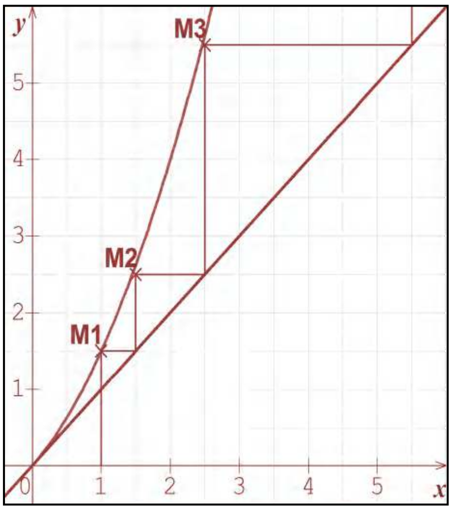
$M_0(u_0,u_1)$ أي $M_0(1,3)$ هي أول نقطة نحصل عليها. نسقط M_0 على (Δ) وفق

(Ox) ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C_f) وفق (Oy) وبهذا نحصل على

النقطة $M_1(u_1,u_2)$ أي $M_1\left(3,\frac{5}{3}\right)$. نكرر العملية للحصول على M_2 ثم M_3 إلى آخره.

❑**مثال:** لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بحدها الأول $u_1=1$

و العلاقة التراجعية $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n^2+u_n$.



- مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O,I,J) .

حل: (C_f) هو الرسم البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n). أي

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$ المعرفة على $]0,+\infty[$. (Δ) المستقيم ذو المعادلة

$y=x$. نستعمل نفس الطريقة المستعملة في التمرين السابق 3

❑**مثال:**

أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي $u_n=\frac{n+1}{3^n}$ و $v_n=\frac{2n-1}{n+3}$

➢**طريقة:** لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن:

1) **ندرس إشارة** $u_{n+1}-u_n$ أو

2) **نقارن بين** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ **و 1** .

3) **إذا وجدت دالة** f **حيث من أجل كل عدد طبيعي** n : $u_n=f(n)$ **ندرس تغيرات الدالة** f .

حل: • اتجاه تغير المتتالية (u_n). $u_{n+1}-u_n=\frac{-2n-1}{3^{n+1}}$ إذن $u_{n+1}-u_n<0$ و منه (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

• (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ لأن الدالة f حيث $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

5. المتتالية الحسابية و الهندسية

المتتالية الحسابية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n:
$u_{n+1} = u_n + r$.

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n = u_p + (n-p)r$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 + nr$ و $u_n = u_1 + (n-1)r$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

عدد الحدود=دليل الحد الأخير-دليل الحد الأول +1

الوسط الحسابي

تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a + c = 2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 وأساسها r

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = r$ و منه:

- إذا كان r سالبا تماما $r < 0$ فإن المتتالية متناقصة.
- إذا كان r موجبا تماما $r > 0$ فإن المتتالية متزايدة.
- إذا كان r معدوما $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1. أحسب u_0 و u_1.
2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.
3. أحسب، بدلالة n، المجموع: $S = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

الحل:

1. $u_0 = -3(0) + 2 = 2$ و $u_1 = -3(1) + 2 = -1$.
2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+1} - u_n = [-3(n+1) + 2] - [-3n + 2] = -3$$

.

المتتالية الهندسية

تعريف

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي)إذا وفقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = u_n \times q \quad \text{أو} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

عبارة الحد العام

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

حالات خاصة: $u_n = u_0 \times q^n$ و $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

حساب المجموع

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن:

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = u_0\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

عدد الحدود=دليل الحد الأخير-دليل الحد الأول +1

حالة خاصة: إذا كان $q = 1$ فإن:
$S = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = (n+1)u_0$.

الوسط الهندسي

تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان: $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

اتجاه التغير

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، حدها الأول u_0 وأساسها q.

نعلم أن: $u_n = u_0 q^n$. نستنتج أنه:

*إذا كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة. * كان $0 < q < 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

* إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

*إذا كان $q > 1$ وكان $u_0 < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

*إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.

*إذا كان $q = 0$ تكون كل حدودالمتتالية معدومة ابتداء من الحد 2 .

مثال

(v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$.

1. أحسب v_2 و v_3.
2. أحسب، بدلالة n ، الحد العام v_n.
3. أحسب، بدلالة n ، المجموع.

نستنتج هكذا أن المتتالية $\left(u_n\right)$ حسابية أساسها $r=-3$.

3. لدينا:

$$=\left(n+1\right)\times\frac{u_0+u_n}{2}=\left(n+1\right)\times\frac{2-3n+2}{2}$$

و منه $S=\frac{\left(n+1\right)\left(4-3n\right)}{2}$.

$S=v_1+v_2+\dots\dots+v_n$.

الحل:

1. $v_2=v_1\times q=3\times 2=6$ ،

$v_3=v_2\times q=6\times 2=12$.

2. $v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times 2^{n-1}$.

$$S=v_1+v_2+\dots\dots+v_n=v_1\times\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

و منه: $S=3\times\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right)=-3\left(1-2^n\right)=3\left(2^n-1\right)$

6. المتتاليات المحدودة و الرتيبة

أ- المتتاليات المحدودة

تعريف: $\left(u_n\right)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

1. القول أن المتتالية $\left(u_n\right)$ محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\le A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى.
2. القول أن المتتالية $\left(u_n\right)$ محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كلعدد طبيعي n : $B\le u_n$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل.
3. القول أن المتتالية $\left(u_n\right)$ محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل.

مثال: لتكن u_n المتتالية المعرفة من أجل

كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $u_n=2+\frac{3}{n}$.

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $\frac{3}{n}\le 3$ و منه $u_n\le 5$ نستنتج أن u_n محدودة من الأعلى بـ 5.

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $\frac{3}{n}>0$ و منه $u_n>2$. نستنتج أن u_n محدودة من الأسفل بـ 2.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $2<u_n\le 5$. نستنتج أن المتتالية محدودة.

ملاحظة: العدد 5 عنصر حاد من الأعلى لـ u_n . كل عدد حقيقي A أكبر من 5 هو كذلك عنصر حاد من الأعلى

للمتتالية u_n (نفس الملاحظة بالنسبة للعنصر الحاد من الأسفل).

ب- المتتاليات الرتيبة

تعريف: $\left(u_n\right)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

1. القول عن $\left(u_n\right)$ أنها متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$.
2. القول عن $\left(u_n\right)$ أنها متناقصة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \leq u_n$.
3. القول عن $\left(u_n\right)$ أنها ثابتة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n$.
4. القول عن $\left(u_n\right)$ أنها رتيبة يعني أنها إما متزايدة و إما متناقصة.

ملاحظة:

* تبقى التعاريف السابقة صحيحة في حالة متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ معرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$.

* توجد متتاليات ليست متزايدة و ليست متناقصة. نقول عنها أنها غير رتيبة و نذكر على سبيل المثال المتتالية $\left(u_n\right)$

المعرفة بحدها العام $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

* تكون المتتالية $\left(u_n\right)$ ثابتة إذا و فقط إذا و جد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = k$.

7. نهاية متتالية

أ- المتتاليات المتقاربة

لما تأخذ الحدود u_n لمتتالية u_n قيما قريبة بالقدر الذي نريد من عدد حقيقي l لما يأخذ العدد الطبيعي n قيما كبيرة بالقدر الكافي، نقول أن نهاية المتتالية u_n هي l لما يؤول n إلى $+\infty$ و أن المتتالية u_n متقاربة و تتقارب نحو l .

و نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

ملاحظة:

- ندرس دائما نهاية متتالية عند $+\infty$ و غالبا ما يطلب دراسة نهاية متتالية بدون التحديد عند $+\infty$.
- إذا لم تكن متتالية متقاربة نقول عنها أنها متباعدة.

مثال: لتكن u_n المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $u_n = 3 - \dfrac{1}{n}$.

يمكن إثبات أن u_n يبقى قريب من 3 بالقدر الذي نريد بشرط أن يكون n كبيرا بالقدر الكافي. نستنتج أن المتتالية u_n تتقارب نحو العدد 3 و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

ب- المتتاليات ذات الحد العام $u_n = f\left(n\right)$

خاصية: يمثل α عددا حقيقيا ، $-\infty$ أو $+\infty$. $\left(u_n\right)$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام $u_n = f\left(n\right)$ حيث f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = \alpha$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

ملاحظة: العمليات على النهايات الخاصة بالدوال تبقى صحيحة بالنسبة للمتتاليات.

مثال: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=3$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$.

ج-الرتابة و التقارب

مبرهنة: (1) إذا كانت متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإن هذه المتتالية متقاربة.

(2) إذا كانت متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإن هذه المتتالية متقاربة.

ملاحظة: تسمح هذه المبرهنة بإثبات تقارب متتالية و لكن لا تعطي النهاية.

مثال: نعتبر المتتالية u_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_n=\frac{2n^2-5n+1}{n^2+5}$ ، بين المتتالية u_n متقاربة.

الحل:

نلاحظ أن $u_n=f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{2x^2-5x+1}{x^2+5}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

نستنتج أن المتتالية u_n متقاربة و تتقارب نحو العدد 2 .

د-نهاية متتالية هندسية

مبرهنة: (1) إذا كان $-1<q<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$.

(2) إذا كان $q=1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=1$.

(3) إذا كان $q>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$.

(4) إذا كان $q\le -1$ فإنه ليس للمتتالية (q^n) نهاية.

مثال: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n=+\infty$.

مثال: u_n متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدها الأول $u_0=2$.

نضع، من أجل كل عدد طبيعي n، كما يلي : $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$.

1. عبر عن u_n بدلالة n ثم أدرس نهاية المتتالية u_n .

2. عبر عن S_n بدلالة n ثم أدرس نهاية المتتالية S_n .

الحل:

4. من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = u_0 \times q^n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

بما أن $-1<\frac{2}{3}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ و هكذا فإن المتتالية u_n متقاربة نحو 0.

5. من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n = u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$ ومنه $S_n = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

بما أن $-1<\frac{2}{3}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$. نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 6$.و هكذا فإن المتتالية S_n متقاربة نحو 6

7.الاستدلال (البرهان) بالتراجع

مبدأ الاستدلال بالتراجع

مسلمة: $P\ n$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي.

للبرهان على صحة الخاصية $P\ n$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن:

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P\ n_0$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P\ n_0$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P\ n+1$.

الخلاصة:			
من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 $P(n)$ صحيحة.	$P(n+1)$ صحيحة	فإن ← إذا كانت $P(n)$ صحيحة	$P(n_0)$ صحيحة
	المرحلة 2		المرحلة 1

مثال: الخاصية:" من أجل كل عدد طبيعي n، 3^n مضاعف للعدد5 " خاطئة رغم أنها وراثية. بالفعل:

إذا كان 3^n مضاعفا للعدد5 فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث $3^n = 5k$.

لدينا إذن $3^{n+1} = 3\times 3^n = 3(5k) = 5(3K)$ و منه 3^{n+1} هو الآخر مضاعف للعدد5.

مثال:

لنثبت صحة الخاصية التالية: " من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ "

المرحلة الأولى: من أجل $n=1$ لدينا: $\frac{1\times 2}{2}=1$ و منه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

المرحلة الثانية (الوراثة):

- نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$ أي: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.
- لنبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي: $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

لدينا: $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$

و منه $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

الخلاصة: " من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ "

مثال: (u_n) متتالية حدها الأول $u_0=4$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$.

1. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.
2. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2. ما ذا تستنتج ؟

الحل:

1. البرهان على أن (u_n) متناقصة يؤول إلى إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}\leq u_n$ $(u_{n+1}-u_n\leq 0)$.

المرحلة 1: لدينا $u_1=\frac{1}{2}\times 4-1=1$ و منه $u_1\leq u_0$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي $u_{n+1}\leq u_n$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+2}\leq u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1}\leq u_n$ و منه $\frac{1}{2}u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}u_n-1$ أي $u_{n+2}\leq u_{n+1}$ و منه فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}\leq u_n$. و منه المتتالية (u_n) متناقصة.

2. البرهان على أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2 يؤول إلى إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n\geq -2$.

المرحلة 1: لدينا $u_0=4$ و منه $u_0\geq -2$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي $u_n\geq -2$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}\geq -2$.

لدينا $u_n\geq -2$ و منه $\frac{1}{2}u_n-1\geq\frac{1}{2}(-2)-1$ أي $u_{n+1}\geq -2$ و منه فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq -2$ و منه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -2.

نستنتج من السؤالين السابقين أن المتتالية (u_n) متقاربة .

8. دراسة المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ حيث $a \neq 0$

نتيجة: إذا كانت متتالية (u_n) تحقق العلاقة $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ و كانت الدالة f متزايدة تكون المتتالية (u_n) رتيبة و إشارة $u_1 - u_0$ هي التي تحدد إذا كانت (u_n) متزايدة، متناقصة أو ثابتة.

مثال: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = \alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

أ) نفرض $\alpha = 3$

1. أحسب u_1، u_2 و u_3. ضع تخمينا حول طبيعة المتتالية (u_n) ثم أثبت صحة تخمينك.
2. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

ب) نفرض $\alpha = 2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة محددا نهايتها.
4. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج) نفرض $\alpha = 6$. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

الحل:

أ) $\alpha = 3$ و منه $u_0 = 3$

1. نجد بعد الحساب: $u_1 = 3$ ، $u_2 = 3$ و $u_3 = 3$. يظهر أن المتتالية (u_n) ثابتة.

لنبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3$.

* المرحلة 1: الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 3$.

* المرحلة 2: نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي $u_n = 3$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$ و منه $u_{n+1} = 3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

* **الخلاصة:** نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n . إذن (u_n) ثابتة.

2. نعم المتتالية (u_n) متقاربة و تتقارب نحو العدد 3 .

ب) $\alpha = 2$ و منه $u_0 = 2$

1. $u_n - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_{n+1} - 3 = v_{n+1}$ و منه $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$.

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = -1$ $(v_0 = u_0 - 3)$.

2. لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و بما أن $u_n = v_n + 3$ فإن $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.

3. بما أن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ و منه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$. نستنتج أن (u_n) متقاربة و تتقارب نحو 3.

4. نلاحظ أن $u_{n+1} = f\ u_n$ حيث $f : x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$. بما أن $\frac{1}{3} > 0$ و $u_1 - u_0 > 0$ $\left(u_1 - u_0 = \frac{2}{3}\right)$

فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

ج) $\alpha = 6$ و منه $u_0 = 6$.

بما أن $\frac{1}{3} > 0$ و $u_1 - u_0 < 0$ $(u_1 - u_0 = -2)$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

سؤال و جواب

اختبر معلوماتك

1. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n^2+1$.

1. أحسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_{20}.   2. أكتب بدلالة n الحدود u_{n+1} ، u_{2n} ، u_{3n+2} .

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=-2u_n+1$.

* أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_0=-3$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=2v_n+5$.

1. أحسب v_1 و v_2.   2. عبر بدلالة v_n عن كل من v_{n+2} و v_{n-1}.

4. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=-3n+2$.

1. أحسب u_0 و u_1.   2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.

3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S=u_0+u_1+........+u_n$.

5. (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$.

1 . أحسب v_2 و v_3.   2. أحسب، بدلالة n ، الحد العام v_n.   3. أحسب، بدلالة n ، المجموع $S=v_1+v_2+........+v_n$.

6. لتكن المتتالية المعرفة (u_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n=n^2-n$.

1. أحسب $u_{n+1}-u_n$ من اجل كل عدد طبيعي n .   2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

7. لتكن المتتالية المعرفة (v_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{3^n}{2^{n+1}}$.

1.بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.   2. ما هو اتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟

8. بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و 3630 نسمة سنة 2007.

نفرض أن α نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدينة ثابتة.

1. عين α نسبة تزايد سكان المدينة..   2. كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات.

9. (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$، أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ ، و $u_5=\dfrac{1}{32}$.

1. أحسب u_{2007} .   2. أحسب $S=u_0+u_1+........+u_{28}+u_{29}$.

الأجوبة

حل السؤال 1:

1. $u_0=-3(0)^2+1=1$ ، $u_1=-3(1)^2+1=-2$ ، $u_2=-3(2)^2+1=-11$ ، $u_{20}=-3(20)^2+1=-1199$.
2. $u_{n+1}=-3(n+1)^2+1=-3n^2-6n-2$ ، $u_{2n}=-3(2n)^2+1=-12n^2+1$

حل السؤال 2:

$$u_1=-2u_0+1=-2\times2+1=-3$$
$$u_2=-2u_1+1=-2(-3)+1=7$$
$$u_3=-2u_2+1=-2\times7+1=-13$$

حل السؤال 3:

1. $v_1=2v_0+3=2(-3)+5=-1$ و $v_2=2v_1+5=2(-1)+5=3$.
2. $v_{n+2}=2v_{n+1}+5=2(2v_n+5)+5$

و منه $v_{n+2}=4v_n+15$.

من $v_{n+1}=2v_n+5$ نستنتج أن $v_n=2v_{n-1}+5$ و بالتالي $2v_{n-1}=v_n-5$

و منه $v_{n-1}=\dfrac{v_n-5}{2}$.

حل السؤال 4:

طريقة: لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $u_{n+1}-u_n$ عدد ثابت r.

1. $u_0=-3(0)+2=2$ و $u_1=-3(1)+2=-1$.
2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=[-3(n+1)+2]-[-3n+2]=-3$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=-3$.

3. لدينا: $S=(n+1)\times\dfrac{u_0+u_n}{2}=(n+1)\times\dfrac{2-3n+2}{2}$ و منه $S=\dfrac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

حل السؤال 5:

1. $v_2=v_1\times q=3\times2=6$ ، $v_3=v_2\times q=6\times2=12$.
2. $v_n=v_1\times q^{n-1}=3\times2^{n-1}$.

$S = 3\times\frac{1-2^n}{1-2} = -3\left(1-2^n\right) = 3\left(2^n-1\right)$ و منه $S = v_1 + v_2 + ... + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

حل السؤال 6:

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) لا يكفي المقارنة بين u_1 و u_0 أو بين u_3 و u_2 أو ... و إنما يجب المقارنة بين u_{n+1} و u_n من أجل كل عدد طبيعي n.

1. $u_{n+1} - u_n = \left[(n+1)^2 - (n+1)\right] - \left(n^2 - n\right)$ و منه $u_{n+1} - u_n = 2n$.
2. من أجل كل عدد طبيعي n، $2n \geq 0$ أي من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متزايدة.

حل السؤال 7:

1. $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{3\times 3^n}{2\times 2^{n+1}} = \frac{3}{2}\times\frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}v_n$. و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$
2. بما أن $\frac{3}{2} > 1$ و $v_0 > 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة $\left(v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$.

حل السؤال 8:

طريقة: يتم نمذجة المقادير التي تتغير بنسبة ثابتة α بمتتالية هندسية أساسها $q = 1+\alpha$.

لنرمز بـ u_n مثلا إلى عدد سكان المدينة السنة $2005+n$ و منه $u_0 = 3000$ و $u_2 = 3630$.

1. بما أن نسبة التزايد α ثابتة فإن العلاقة بين عدد السكان خلال السنة $2005+n$ وعدد السكان خلال السنة الموالية هي: $u_{n+1} = u_n + \alpha u_n$ أي $u_{n+1} = (1+\alpha)u_n$. نستنتج أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1+\alpha$.

لدينا إذن $u_2 = u_0 \times q^2$ و منه $q^2 = \frac{u_2}{u_0}$. نجد هكذا $q^2 = 1,21$ و بالتالي $q = 1,1$. نستنتج أن $\alpha = 0,1 = 10\%$.

2. نلاحظ أن $2030 = 2005 + 25$. لدينا $u_{25} = u_0 \times q^{25}$ و منه $u_{25} = 3000\times(1,1)^{25}$ أي $u_{25} \approx 32504,12$.

يكون عدد سكان المدينة سنة 2030 حوالي 32500 نسمة.

حل السؤال 9:

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي p أصغر من n : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

إذا $u_{2007} = u_5 \times q^{2007-5} = \frac{1}{32}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2002} = \frac{1}{2^{2007}}$.

- نعلم أنه إذا كان $q \neq 1$ لدينا $S = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ و و منه $S = 2\left(1-\frac{1}{2^{30}}\right)$

تمارين محلولة

التمارين

.1

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n - 2$.

1.احسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3.

2.بين أن المتتالية (u_n) حسابية وعين أساسها.

3.أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5.أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

ب-عين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

.2

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$

1. احسب الحد الأول u_0.

2. أكتب الحد العام u_n بدلالة n.

3.عين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

4. احسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{49}$.

5.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{49}$.

.3

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

1.بين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثم استنتج قيمة الحد السابع.

3.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

4.استنتج قيمة المجموع: $S' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_6$

.4

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.

1.عين الأساس r للمتتالية (u_n).

2.بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = 6n - 5$.

3.أثبت أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، ماهي رتبته؟

4. احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S : $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

.5

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.أحسبالحد u_4 علما أن: $u_3 + u_5 = 20$.

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4-u_5=7$.

3.استنتج قيمة r واحسب u_0.

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=3n-2$.

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

6.جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n=33$.

.6

في كل من الحالات الأربع التالية اقترحت ثلاثة اجابات. واحدة منها صحيحة ، يطلب تعيينها مع التعليل.

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

أ- -17 ب- -14 ج- -11 .

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

أ- $\frac{3^{101}-1}{2}$ ب- $\frac{1-3^{100}}{2}$ ج- $\frac{3^{100}-1}{2}$.

3.نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $a=2x+2$ ، $b=6x-3$ ، $c=4x$.الأعداد الحقيقية a ، b ، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x=\frac{4}{3}$ ب- $x=0$ ج- $x=\frac{3}{4}$

4.المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ-حسابية أساسها 1 ب-هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

.7

اقراح الجواب الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة التالية ، مع التبرير:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n=n^2-1$ ، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما ب- متناقصة تماما ج- ليست رتيبة

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1=3$ و أساسها $q=2$ ، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

أ- $v_n=3\times 2^n$ ب- $v_n=3\times 2^{n-1}$ ج- $v_n=2\times 3^n$

3.المجموع : $S_n=v_1+v_2+...+v_n$ يساوي:

أ- $3\left(2^n-1\right)$ ب- $\left(2^n-1\right)$ ج- $2\left(3^n-1\right)$

.8

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0\times u_2=576$ و $u_0+u_1=30$

1.بين أن $u_1=24$، ثم استنتج قيمة u_0.

2.بين أن $q=4$ ، ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3.أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4.احسب 4^4 ، ثم تحقق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعين رتبته.

5.احسب بدلالة المجموع: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

.9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

أ) نفرض $\alpha = 3$

اثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة ثم أحسب، بدلالة n، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$.

ب) نفرض $\alpha = 2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - 3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3. أحسب، بدلالة n، المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$.
4. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n)؟

.10

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول . أحسب w_n بدلالة n .

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة .

3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. و أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) عين u_n و v_n بدلالة n .

.11

في 1 جانفي 2001 أودع زكرياء رصيد $10000\,DA$ ببنك يقدم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أن مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ $1500\,DA$ في نهاية كل سنة (بعد حساب الفوائد).

نرمز بِ u_n إلى رصيد زكرياء في أول جانفي من السنة $2001+n$.

1. عين u_0 ثم احسب u_1. كم كان رصيد زكرياء في أول جانفي 2003 ؟
2. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 1{,}05\,u_n - 1500$.
3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
4. نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 30000$.
   - بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
   - ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟
5. ابتداء من أي سنة يكون رصيد زكرياء دائنا ؟

.12

I. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$.

1) عين أساس هذه المتتالية مستنتجا اتجاه تغيرها.

2) أكتب u_n بدلالة n.

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = \left(u_1 + \dfrac{1}{2}\right) + \left(u_2 + \dfrac{1}{2}\right) + \dots + \left(u_n + \dfrac{1}{2}\right)$.

.13

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون $6u_{n+1} = 5u_n + 4$.

1) أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $u_n < 4$.

ب - بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 4$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{5}{6}$ ، يطلب تعيين حدّها الأول v_0.

ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ - أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_0+u_1+...+u_n=15\left(\frac{5}{6}\right)^n+4n-14$.

.14

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول : $u_0=\alpha$ (α عدد حقيقي) و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2u_n-3$.

I) عيّن قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

II) في كل ما يلي : $\alpha=-1$.

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-3$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0.

ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n.

3) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=-4\times 2^n$ ، ثم استنتج إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

4) أحسب ، بدلالة n ، المجموع : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

.15

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-1$.

1) احسب u_1 و u_2 .

2) لتكن (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_{n+1}=u_{n+1}-u_n$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$ ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n) و عين حدها الأول v_1.

ب) عبر عن v_n بدلالة n.

ج) عبر عن v_n بدلالة u_n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}-3$.

د) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n). ما هي نهايتها.

.16

I. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases} u_2+u_4=4 \\ u_0=-1 \end{cases}$.

1) عين أساس هذه المتتالية مستنتجا اتجاه تغيرها.

2) أكتب u_n بدلالة n.

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n=\left(u_1+\frac{1}{2}\right)+\left(u_2+\frac{1}{2}\right)+...+\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$.

II. (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$\begin{cases} v_{n+1}=(a^2-3)v_n+2a^2-a \\ v_0=\frac{1}{2} \end{cases}$ ، a عدد حقيقي

1) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية

2) عين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية.

.17

في 1 جانفي 2001 أودع زكرياء رصيد $10000DA$ ببنك يقدم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أن مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ $1500DA$ في نهاية كل سنة (بعد حساب الفوائد).

نرمز بـ u_n إلى رصيد زكرياء في أول جانفي من السنة $2001+n$.

6. عين u_0 ثم احسب u_1. كم كان رصيد زكرياء في أول جانفي 2003 ؟
7. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1,05u_n-1500$.
8. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
9. نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=u_n-30000$.
   - بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
   - ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟
10. ابتداء من أي سنة يكون رصيد زكرياء دائنا ؟

.18

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2$.

1) أحسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2) أ- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq 8$.

ب - بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

جـ - إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-8$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .

ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم إستنتج u_n بدلالة n.

جـ - أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n و الجداء P_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times v_2\times...\times v_n$.

.19

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$.

1. أحسب u_1, u_2, u_3.
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.
3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
4. عين العدد الطبيعي n بحيث $81u_n=245$.
5. أحسب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+u_2+........+u_n$ ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty}S_n$
6. نعرف متتالية عددية (v_n) كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln\left(\frac{u_n-3}{2}\right)$.

أ- حدد طبيعة هذه المتتالية وعناصرها المميزة.

ب- عين العدد الطبيعي n حتى يكون $v_1+v_2+v_3+.......+v_n=-28\ln 3$.

.20

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\ln u_1+\ln u_5=-12$ و $\ln u_2-\ln u_4=4$.

1) عيّن أساس المتتالية (u_n) و حدّها الأول u_0 .

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. استنتج $\lim_{n \to +\infty} S_n$

4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها.

ب - أحسب بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

حلول مقترحة

حل التمرين 1:

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n - 2$.

1.حساب u_0، u_1 ، u_2 و u_3.

$$u_0 = -2$$
$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 4$$
$$u_3 = 7$$

2.اثبات أن المتتالية (u_n) حسابية.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 2 - 3n + 2 \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

اذن: (u_n) متتالية حسابية أساسها 3.

3.دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n). بما أن $r = 3 > 0$ اذن (u_n) متتالية متزايدة.

4.بين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية

(u_n) نقوم بحل المعادلة:

أي: $u_n = 1954$ معناه: $3n - 2 = 1954$، $n = 652 \in \mathbb{N}$ ، $u_{652} = 1954$ رتبته 653 لأن الحد الأول هو u_0.

5-أ. حساب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

و منه

$$\begin{aligned} &= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) \\ &= (n+1)\frac{(-2 + 3n - 2)}{2} \\ &= (n+1)\left(\frac{-4 + 3n}{2}\right) \end{aligned}$$

نقوم بالنشر نتحصل على: $S_n = \dfrac{3n^2 - n - 4}{2}$

ب-تعين العدد بحيث يكون: $S_n = 328$.

$$\frac{3n^2-n-4}{2}=328$$

معناه: $3n^2-n-4=2(328)$

$3n^2-n-660=0$

هي معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلان هما : $n_1=15\in\mathbb{N}$ و $n_2=\frac{-44}{3}\notin\mathbb{N}$ و بالتالي من أجل $n=15$ لدينا: $S_n=328$

حل التمرين 2: ❑

(u_n) التي أساسها 3 وحدها الأول u_0 و تحقق: $u_0+u_1+u_2+u_3=10$

$$\begin{cases} u_1=u_0+r=u_0+3 \\ u_2=u_0+2r=u_0+6 \\ u_3=u_0+3r=u_0+9 \end{cases}$$

نجمع المعادلات نتحصل : $u_0+u_0+3+u_0+6+u_0+9=10$ أي: $4u_0+18=10$ و بالتالي: $u_0=-2$.

2. كتابة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n=-2+3n$

3.تعين العدد الطبيعي n بحيث: $u_n=145$.

أي: $u_n=-2+3n=145$ $n=49$ يعني: $u_{49}=145$

4. حساب المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+u_2+...+u_{49}$.

$$\begin{aligned} S&=u_0+u_1+u_2+...+u_{49} \\ &=50\left(\frac{u_0+u_{49}}{2}\right) \\ &=50\left(\frac{-2+145}{2}\right) \\ &=3575 \end{aligned}$$

5.نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $v_n=2u_n+3$.

احسب المجموع S' حيث: $S'=v_0+v_1+v_2+...+v_{49}$.

$$\begin{aligned} S'&=v_0+v_1+v_2+...+v_{49} \\ &=2S+3(50) \\ &=2(3575)+150 \\ &=7300 \end{aligned}$$

حل التمرين 3: ❑

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1=20$ و $u_3=320$.

1.اثبات أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5.

من القانون : نضع: $n=3; p=1$

$$u_3=u_1\times q^{3-1}$$
$$\frac{u_3}{u_1}=q^2$$
$$q^2=\frac{320}{20}=16$$
$$q=4, q=-4$$

$q=-4$ مرفوض لأن موجبة تماما. و بالتالي: $q=4$

2.أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n: $u_n=u_0\times q^n=5(4)^n$.

استنتج قيمة الحد السابع. $u_7=5(4)^7=20480$

3.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$$
$$=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$
$$=5\left(\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right)$$
$$=\frac{-5}{3}\left(1-4^{n+1}\right)$$

4.استنتاج قيمة المجموع: $S'=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_6$ $S'=\frac{-5}{3}\left(1-4^{6+1}\right)=27305$

حل التمرين 4:

(u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة بحدها الأول: $u_0=-5$ و $u_3+u_7=50$.

1.تعين الأساس r للمتتالية (u_n).

$$\begin{cases} u_3=u_0+3r=-5+3r \\ u_7=u_0+7r=-5+7r \end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

و منه:

$$-5+3r-5+7r=50$$
$$10r-10=50$$
$$10r=60$$
$$r=6$$

2. من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=6n-5$.

لدينا: $u_0=-5$ و $r=6$ و بالتالي: $u_n=6n-5$

3.أثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)،

نحل المعادلة:
$$6n-5=2017$$
$$n=337\in\mathbb{N}$$

رتبته 338 لان: حدها الأول: $u_0=-5$

4. حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S:

أي:
$$\begin{aligned}S&=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n\\&=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)\\&=(n+1)\left(\frac{-5+6n-5}{2}\right)\\&=(n+1)\left(\frac{-10+6n}{2}\right)\\&=(n+1)(-5+3n)\\&=3n^2-2n-5\end{aligned}$$

حل التمرين 5: ❑

المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 و أساسها r .

1.حساب الحد u_4 علما أن: $u_3+u_5=20$.

باستعمال خاصية الوسط الحسابي:

و بالتالي:
$$u_3+u_5=2u_4$$
$$2u_4=20$$
$$u_4=10$$

2.أحسب الحد u_5 علما أن: $2u_4-u_5=7$.لدينا:

معناه:
$$u_4=10$$
$$2u_4-u_5=7$$
$$2(10)-u_5=7$$
$$u_5=13$$

3.استنتاج قيمة r بما أن (u_n) متتالية حسابية فان:
$$r=u_5-u_4$$
$$r=13-10$$
$$r=3$$

$u_4 = u_0 + 4r$

حساب u_0.نأخذ المعادلة: $u_0 + 4(3) = 10$

$u_0 = -2$

4.تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = 3n - 2$.

لدينا: $u_0 = -2$ و $r = 3$ و بالتالي: $u_n = 3n - 2$

5.احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث:

و بالتالي:

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{-2 + 3n - 2}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{-4 + 3n}{2}\right) \end{aligned}$$

6.ايجاد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

$$(n+1)\left(\frac{-4+3n}{2}\right) = 33$$

أي: $(n+1)(-4+3n) = 66$ و تصبح: $3n^2 - n - 70 = 0$.

و نتحصل على حلان أحدهما مرفوض لأنه ليس عدد طبيعي و نقبل: $n = 5$

حل التمرين 6: ❑

1.الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها -3 وحدها الأول 1 هو:

ب- -14

2.مجموع 100 حد الأولى لمتتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1 هو:

ج- $\frac{3^{100} - 1}{2}$.

3.نضع من أجل كل x عدد حقيقي : $a = 2x + 2$، $b = 6x - 3$، $c = 4x$.الأعداد الحقيقية a، b، c بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون :

أ- $x = \frac{4}{3}$

4.المتتالية المعرفة ب: و من أجل كل عدد طبيعي : هي متتالية:

أ-حسابية أساسها 1 ب-هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ج- لا حسابية ولا هندسية

حل التمرين 7:

1. (u_n) متتالية عددية معرفة على ب: $u_n = n^2 - 1$، (u_n) متتالية:

أ- متزايدة تماما

لأن $u_{n+1} - u_n > 0$:

2. (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$، عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

ب- $v_n = 3 \times 2^{n-1}$

لأن حدها الأول v_1.

3. المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ يساوي:

أ- $3(2^n - 1)$

حل التمرين 8:

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $u_0 \times u_2 = 576$ و $u_0 + u_1 = 30$

1. اثبات أن $u_1 = 24$،

لدينا: $u_0 \times u_2 = 576$ باستعمال خاصية الوسط الهندسي نجد:

و بالتالي:

$$u_0 \times u_2 = u_1^2$$
$$u_1^2 = 576$$
$$u_1 = 24; u_1 = -24$$

و بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما فان: $u_1 = 24$ استنتاج قيمة u_0:.

لأن:

$$u_0 + u_1 = 30$$
$$u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24$$
$$u_0 = 6$$

2. بين أن $q = 4$، نعلم أن:

$$u_1 = u_0 \times q$$
$$q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$$

، كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n: $u_n=6\times 4^n$

3.أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n$،

لدين: $u_n=6\times 4^n$ و بالتالي: $u_{n+1}=6\times 4^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= 6\times 4^{n+1}-6\times 4^n \\ &= 6\times 4^n\times 4^1-6\times 4^n \\ &= 6\times 4^n(4-1) \\ &= 6\times 4^n(3)=18\times 4^n \end{aligned}$$

و هو المطلوب

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بما أن: $u_{n+1}-u_n=18\times 4^n>0$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4.حساب 4^4 ،

لدينا: $4^4=256$

التحقق من أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n).

نقوم بحل المعادلة:

$$\begin{aligned} u_n &= 1536 \\ 6\times 4^n &= 1536 \\ 4^n &= \frac{1536}{6}=256 \end{aligned}$$

اذن: $4^n=4^4$ و نعلم أن n عدد طبيعي فبالتالي: $n=4$. رتبته: 5 لأن الحد الأول هو u_0.

5.احسب بدلالة المجموع : $S_n=u_1+u_2+\dots+u_n$

معناه:

أي:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \\ &= 24\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right) \\ &= 24\left(\frac{1-4^n}{-3}\right) \\ &= -6\left(1-4^n\right) \\ &= 6\left(4^n-1\right) \end{aligned}$$

حل التمرين 9: ❑

أ) $\alpha=3$ و منه $u_0=3$

لأن: (u_n) ثابتة معناه: $u_{n+1}=u_n=u_{n-1}=....=u_0=3$ (كل حدودها متساوية)

• من أجل كل عدد طبيعي n، $S_n=u_0+u_1+...+u_n=\ n+1\ u_0$ و منه $S_n=3\ n+1$.

ب) $\alpha=2$ و منه $u_0=2$

1. $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}\ u_n-3$ و منه $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $(v_0=u_0-3)$ $v_0=-1$.

2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0\times q^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

لدينا $v_n=u_n-3$ و منه $u_n=v_n+3$. إذن $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

3. لدينا $3+3+...+3\ +\ v_0+v_1+...+v_n\ =\ v_n+3\ +...+\ v_1+3\ +\ v_0+3\ =\ S$

و منه $S=S'+3\ n+1$ حيث $S'=v_0+v_1+...+v_n$ (عدد حدود المجموع هو $n+1$).

لدينا $S'=\ -1\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$ و منه $S=-\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+3(n+1)$.

4. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة.

حل التمرين 10: ❑ .

1) نحسب w_{n+1} بدلالة w_n.

$$w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+3v_n}{4}=\frac{4u_n+8v_n-3u_n-9v_n}{12}$$
$$=\frac{1}{12}(u_n-v_n)=\frac{1}{12}w_n$$

إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0=11$. ومنه $w_n=11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n$

2) نحسب t_{n+1} بدلالة t_n .

$$t_{n+1}=3u_{n+1}+8v_{n+1}=\frac{3(u_n+2v_n)}{3}+\frac{8(u_n+3v_n)}{4}=u_n+2v_n+2u_n+6v_n$$
$$=3u_n+8v_n=t_n$$

إذن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$. و منه من أجل كل عدد طبيعي n $t_n=t_0=3u_0+8v_0=44$

3) نحسب : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=-\frac{2}{3}(u_n-v_n)=-\frac{2}{3}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

نحسب : $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\frac{1}{4}(u_n-v_n)=\frac{1}{4}w_n$

بما أن من أجل كل عدد طبيعي n $w_n>0$ فإن $v_{n+1}-v_n>0$ و منه المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) $\begin{cases} u_n-v_n=11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n+8v_n=44 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u_n=4+8\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ u_n=4-3\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases}$

حل التمرين 11:

1) $u_0=10000$ ، $u_1=90000$ u_2 هو رصيد زكرياء في أول جانفي 2003.

حيث: $u_2=u_1+\frac{5}{100}\times u_1-1500$ و منه $u_2=7950$

2) $u_{n+1}=u_n+\frac{5}{100}\times 10000-1500$ و منه $u_{n+1}=1,05u_n-1500$

3) نلاحظ أن $u_{n+1}=f\ \ u_n$ ، $f\ \ x\ =1,05x-1500$

f متزايدة و منه المتتالية (u_n) رتيبة. و بما أن $u_1-u_0<0$

فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

4) . $v_{n+1}=u_{n+1}-30000=1,05u_n-31500$

و منه $v_{n+1}=1,05(u_n-30000)$ أي $v_{n+1}=1,05v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,05$ و حدها الأول $v_0=-20000$.

- لدينا $v_n = v_0 q^n = -2\times10^4\times(1,05)^n$.

بما أن $u_n = v_n + 30000$ فإن $u_n = -2\times10^4\times(1,05)^n + 3\times10^4$

و منه $\lim u_n = -\infty$

5) لدينا $u_8 = 540,89$ و $u_9 = -1027$

و بما أن u_9 هو رصيد زكرياء في 2010/01/01 فإن رصيده

يكون دائنا ابتداء من سنة 2010.

حل التمرين 12:

I. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$.

1) أساس هذه المتتالية : $\begin{matrix} u_2 = u_0 + 2r = -1 + 2r \\ u_4 = u_0 + 4r = -1 + 4r \end{matrix}$

و بالتعويض نجد : $r = 1$ بما أن : $r = 1 > 0$ فان (u_n) متتالية متزايدة

2) أكتب u_n بدلالة n. $u_n = -1 + n$

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = \left(u_1 + \frac{1}{2}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{1}{2}\right)$.

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \frac{1}{2}n$$
$$= n\left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right) + \frac{1}{2}n$$
$$= n\left(\frac{-1 + n}{2}\right) + \frac{1}{2}n$$

حل التمرين 13:

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + \frac{4}{6}$.

1) أ - البرهان بالتراجع أن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 4$.

لدينا $u_0 = 1$ و منه $u_0 < 4$. و بالتالي الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي : $u_n < 4$ ، و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} < 4$.

لدينا حسب الفرض $u_n < 4$ و منه $\frac{5}{6}u_n + \frac{4}{6} < \frac{5}{6}\times(4) + \frac{4}{6}$ أي $u_{n+1} < 4$ و منه فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n < 4$.

ب - تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

لندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{5}{6}u_n+\frac{4}{6}-u_n=-\frac{1}{6}u_n+\frac{4}{6}=-\frac{1}{6}(u_n-4)$.

و لدينا ممّا سبق أن: $u_n<4$ و منه $u_n-4<0$. إذن $-\frac{1}{6}(u_n-4)>0$.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n>0$.

و منه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

-. المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى ، إذن فهي متقاربة .

2) المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=u_n-4$

أ - إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-4=\frac{5}{6}u_n+\frac{4}{6}-4=\frac{5}{6}u_n-\frac{20}{6}=\frac{5}{6}u_n-\frac{5\times 4}{6}=\frac{5}{6}(u_n-4)=\frac{5}{6}v_n$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{5}{6}$. الحد الأول: $v_0=u_0-4=1-4=-3$.

ب - كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0\times q^n=-3\times\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n: $u_n=v_n+4=-3\times\left(\frac{5}{6}\right)^n+4$

جـ - $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3\times\left(\frac{5}{6}\right)^n+4\right)=4$. لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$ (لاحظ أن $0<\frac{5}{6}<1$)

د- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_0+u_1+\ldots+u_n=15\left(\frac{5}{6}\right)^n+4n-14$.

لدينا: $u_n=v_n+2$ و منه: $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=v_0+v_1+\ldots+v_n+4(n+1)$ أي :

$$S_n=v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)+4n+4=-3\left(\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{6}}\right)+4n+4=-18+18\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}+4n+4=15\left(\frac{5}{6}\right)^n+4n-14$$

حل التمرين 14:

I) تعيين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

(u_n) ثابتة يعني من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=u_n=u_0$.

أي: $\alpha=2\alpha-3$ ، ينتج : $\alpha=3$.

II) في كل ما يلي : $\alpha=-1$.

1) حساب الحدود :

$u_1=2u_0-3=2(-1)-3=-5$ ، $u_2=2u_1-3=2(-5)-3=-13$

2) أ - إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=u_{n+1}-3=2u_n-3-3=2u_n-2\times 3=2(u_n-3)=2v_n$$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=2$ و حدها الأول : $v_0=u_0-3=-1-3=-4$.

ب - كتابة عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0\times q^n$ و منه : $v_n=-4\times 2^n$.

كتابة u_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=v_n+3=-4\times 2^n+3$

3) حساب الفرق $u_{n+1}-u_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=-4\times 2^{n+1}+3-(-4\times 2^n+3)=-4\times 2^n(2-1)=-4\times 2^n$

لدينا : $u_{n+1}-u_n>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

4) حساب المجموع S_n بدلالة n :

لدينا: $u_n=v_n+3$ و منه :

$$u_0+u_1+...+u_n=v_0+v_1+...+v_n+3(n+1)=v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)+3n+3=4-4\times 2^{n+1}+3n+3=7+3n-4\times 2^{n+1}$$

حل التمرين 15: ❑

1) $u_1=1, u_2=\frac{-1}{3}$

2.أ) $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-1-\left(\frac{2}{3}u_{n-1}-1\right)=\frac{2}{3}v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول v_1 حيث: $v_1=u_1-u_0=-2$

ب) v_n بدلالة n: $v_n=v_1r^{n-1}=-1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ج) $v_n=\frac{1}{2}(-u_n-3)$ ومنه $u_n=-2v_n-3=4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3=\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}-3$

د) المتتالية (u_n) متناقصة تماما لأن: $u_{n+1}-u_n=-2\left(\frac{2}{3}\right)^n\prec 0$

نهاية المتتالية (u_n) هي -3.

حل التمرين 16: ❑

I. (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة: $\begin{cases}u_2+u_4=4\\u_0=-1\end{cases}$.

1) أساس هذه المتتالية : $\begin{array}{l}u_2=u_0+2r=-1+2r\\u_4=u_0+4r=-1+4r\end{array}$

و بالتعويض نجد : $r=1$

بما أن : $r=1>0$ فان (u_n) متتالية متزايدة

2) أكتب u_n بدلالة n. $\quad u_n=-1+n$

3) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n=\left(u_1+\frac{1}{2}\right)+\left(u_2+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(u_n+\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} S_n &= u_1+u_2+\ldots+u_n+\frac{1}{2}n \\ &= n\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)+\frac{1}{2}n \\ &= n\left(\frac{-1+n}{2}\right)+\frac{1}{2}n \end{aligned}$$

II. (v_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} v_{n+1}=\left(a^2-3\right)v_n+2a^2-a \\ v_0=\frac{1}{2} \end{cases}$$

a عدد حقيقي

1) تعين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية حسابية:

يعني العلاقة التراجعية يجب أن تكتب من الشكل: $v_{n+1}=v_n+2a^2-a$ أي: $\left(a^2-3\right)=1$ نقوم بحل المعادلة نجد: $a=-2, a=2$.

2) تعين قيمة a بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية .

يعني العلاقة التراجعية يجب أن تكتب من الشكل: $v_{n+1}=\left(a^2-3\right)v_n$ أي: $2a^2-a=0$ نقوم بحل المعادلة نجد: $a=\frac{1}{2}, a=0$.

حل التمرين 17:

1) $u_0=10000$ ، $u_1=90000$ $\quad u_2$ هو رصيد زكرياء في أول جانفي 2003.

حيث: $u_2=u_1+\frac{5}{100}\times u_1-1500$ و منه $u_2=7950$

2) $u_{n+1}=u_n+\frac{5}{100}\times 10000-1500$ و منه $\quad u_{n+1}=1{,}05u_n-1500$

3) نلاحظ أن $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ ، $f\left(x\right)=1{,}05x-1500$

f متزايدة و منه المتتالية (u_n) رتيبة. و بما أن $u_1-u_0<0$

فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

4) . $v_{n+1}=u_{n+1}-30000=1,05u_n-31500$

و منه $v_{n+1}=1,05(u_n-30000)$ أي $v_{n+1}=1,05v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,05$ و حدها الأول $v_0=-20000$.

- لدينا $v_n=v_0q^n=-2\times10^4\times(1,05)^n$.

بما أن $u_n=v_n+30000$ فإن $u_n=-2\times10^4\times(1,05)^n+3\times10^4$

و منه $\lim u_n=-\infty$

5) لدينا $u_8=540,89$ و $u_9=-1027$

و بما أن u_9 هو رصيد زكرياء في $2010/01/01$ فإن رصيده

يكون دائنا ابتداء من سنة 2010.

حل التمرين 18:

المتتالية العددية (u_n) معرفة كما يلي: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2$.

1) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

$u_1=\frac{3}{4}u_0+2=\frac{3}{4}\times1+2=\frac{3}{4}+2=\frac{11}{4}$ ، $u_2=\frac{3}{4}u_1+2=\frac{3}{4}\times\frac{11}{4}+2=\frac{33}{16}+2=\frac{65}{16}$ و $u_3=\frac{323}{64}$

2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le8$.

ب - تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

جـ - إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى إذن فهي متقاربة .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n-8$.

أ- تبيان أن (v_n) متتالية هندسية مع تحديد أساسها وحدّها الأول .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=u_{n+1}-8=\frac{3}{4}u_n+2-8=\frac{3}{4}u_n-6=\frac{3}{4}u_n-\frac{3\times8}{4}=\frac{3}{4}(u_n-8)=\frac{3}{4}v_n.$$

أي : من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n$. إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{3}{4}$ وحدّها الأول $v_0=u_0-8=-7$.

ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=v_0\times q^n$ و منه : $v_n=-7\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

كتابة u_n بدلالة n:

من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - 8$ و منه: $u_n = v_n + 8$. إذن : $u_n = -7\times\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$.

ج - أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-7\times\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8\right] = 8$ لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ (لاحظ أن: $0 < \frac{3}{4} < 1$).

4) حساب المجموع S_n بدلالة n :

$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \times\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right] = -7\left[\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)}\right]$ ، إذن: $S_n = 28\times\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right)$

حساب الجداء P_n بدلالة n :

$$\begin{aligned}P_n &= v_0 \times v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n\\ &= v_0 \times (v_0\times q)\times(v_0\times q^2)\times\ldots\times(v_0\times q^n)\\ &= (v_0\times v_0\times v_0\times\ldots\ldots\times v_0)(q\times q^2 \ldots\times q^n)\\ &= {v_0}^{n+1}\times q^{1+2+\ldots.+n}\end{aligned}$$

و منه : $P_n = (-7)^{n+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

حل التمرين 19:

1) لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ و $u_0 = 5$

إذن $u_1 = \frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}$ ، $u_2 = \frac{11}{9} + 2 = \frac{29}{9}$ ، $u_3 = \frac{29}{27} + 2 = \frac{83}{27}$

2) نبرهن بالتراجع على: $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

نتحقق من أجل $n = 0$: $u_0 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 3 = 2 + 3 = 5$ وهي صحيحية.

نفرض أنها صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$ ...فرضية التراجع

ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي نبرهن على أن $u_{n+1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3$.

البرهان : لدينا في نص التمرين :

$$u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2=\frac{1}{3}\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\right]+2=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\frac{3}{3}+2=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+3$$

وهو المطلوب. وأخيرا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$

3) تغيرات المتتالية (u_n) : $u_{n+1}-u_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+3-2\left(\frac{1}{3}\right)^n-3=2\left(\frac{1}{3}\right)^n\left[\frac{1}{3}-1\right]=\frac{-4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n<0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

4) تعيين n بحيث $81u_n=245$

$81u_n=245$ تكافئ $81\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\right]=245$ ومنه $162\left(\frac{1}{3}\right)^n=245-243=2$

وبالتالي $\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{81}=\left(\frac{1}{3}\right)^4$ وأخيرا $n=4$.

5) حساب المجموع $S_n=u_0+u_1+u_2+........+u_n$

$$S_n=u_0+u_1+u_2+........+u_n$$
$$S_n=\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^0+3\right]+\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^1+3\right]+........+\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\right]$$
$$S_n=2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+.......+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]+3(n+1)$$
$$u_n=2\left[1\times\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}{\left(\frac{1}{3}\right)-1}\right]+3n+3=-3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right]+3n+3=-3^{-n}+3n+6$$

حساب $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$

6.أ- لدينا $u_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$ ومنه $\frac{u_n-3}{2}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ وبالتالي $v_n=\ln\left(\frac{u_n-3}{2}\right)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)^n=-n\ln 3$ ومنه (v_n)

متتالية حسابية أساسها $-\ln 3$ وحدها الأول $v_0=0$.

ب- تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $v_1+v_2+v_3+.......+v_n=-28\ln 3$

إذن $v_1+v_2+v_3+.......+v_n=\frac{n}{2}(v_1+v_n)=\frac{n}{2}(-\ln 3-n\ln 3)=-\frac{n(n+1)}{2}\ln 3$

ومنه $-\frac{n(n+1)}{2}\ln 3=-28\ln 3$ وبالتالي $\frac{n(n+1)}{2}=28$ $n=7$.

حل التمرين 20: ❑

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\ln u_1+\ln u_5=-12$ و $\ln u_2-\ln u_4=4$.

1) تعين أساس المتتالية (u_n) و حدّها الأول u_0 .

$$\begin{cases}\ln u_1+\ln u_5=-12\\ \ln u_2-\ln u_4=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\ln(u_1\times u_5)=-12\\ \ln\left(\frac{u_2}{u_4}\right)=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_1\times u_5=e^{-12}\\ \frac{u_2}{u_4}=e^{4}\end{cases}$$

نكتب كل الحدود بدلالة q و u_0 :

$$u_1=u_0\times q$$
$$u_2=u_0\times q^2$$
$$u_4=u_0\times q^4$$
$$u_5=u_0\times q^5$$

نقوم بالتعويض في المعادلة نجد:

$$\begin{cases}u_0\times q\times u_0\times q^5=e^{-12}\\ \frac{u_0\times q^2}{u_0\times q^4}=e^4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u_0^{\,2}\times q^6=e^{-12}\\ \frac{1}{q^2}=e^4\end{cases}\Rightarrow q^2=\frac{1}{e^4}\Rightarrow\begin{cases}q=\frac{1}{e^2}\\ q=-\frac{1}{e^2}\end{cases}$$

بما أن حدود المتتالية موجبة معناه: $(q>0)$ اذن: $q=\frac{1}{e^2}=e^{-2}$.

حساب u_0 :

لدينا:

$$u_0^{\,2}\times q^6=e^{-12}\Rightarrow u_0^{\,2}=\frac{e^{-12}}{q^6}=\frac{e^{-12}}{e^{-12}}=1$$

$$u_0^{\,2}=1\Rightarrow\begin{cases}u_0=1\\ u_0=-1\end{cases}$$

و بما أن: حدود المتتالية موجبة فان: $u_0=1$.

2) عبارة u_n بدلالة n .

لدينا: $q = e^{-2}$ و $u_0 = 1$ و بالتالي: $u_n = 1 \times \left(e^{-2}\right)^n = e^{-2n}$

3) حساب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

$$S_n = 1\left(\frac{1-\left(e^{-2}\right)^{n+1}}{1-e^{-2}}\right) = \left(\frac{1-e^{-2n-2}}{1-e^{-2}}\right)$$

. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-e^{-2n-2}}{1-e^{-2}}\right) = \frac{1}{1-e^{-2}}$.

4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$.

أ-اثبات أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها.

$v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1} = \ln\left(e^{-2n}\right) + \ln\left(e^{-2n-2}\right) = -2n - 2n - 2 = -4n - 2$.

و بالتالي: $v_n = -4n - 2$.

$v_{n+1} - v_n = -4$.

اذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -4$ ، و جدها الأول: $v_0 = -2$

ب - حساب بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

$$T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = (n+1)\left(\frac{-2-4n-2}{2}\right)$$

$$= (n+1)(-2-n) = -2n^2 - 4n - 2$$

تمارين مقترحة

❶

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_0=1$ ومن أجل $n\geq 1$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n-1}{2}$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) α عدد حقيقي غير معدوم . من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n=u_n+\alpha$.

- عين قيمة العدد α التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) هندسية .
- عبر عن v_n بدلالة n ؛ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4) عين نهاية المتتالية (u_n) .

5) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$. استنتج $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$

❷

(u_n) متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1 \end{cases}$

بين أنه من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $1\leq u_n<2$

أدرس رتابة المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟

نضع: $v_n=u_n-2$

بين أن (v_n) متتالية هندسية و عين أساسها r

اكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n

أحسب بدلالة n المجموع : $S=v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n$

❹

(u_n) متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+3} \end{cases}$

(v_n) متتالية عددية معرفة بالشكل : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$

برهن ان (v_n) متتالية حسابية يطلب عبارة حدها العام

أكتب u_n بدلالة n واحسب ، ماذا تستنتج ؟

❺

(u_n) متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{8} \end{cases}$

أحسب u_1 ، u_2

نضع: $v_n=u_n-\frac{1}{2}$

بين أن (v_n) متتالية هندسية و عين أساسها r

اكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n

أحسب بدلالة n المجموع : $S=v_0+v_1+\cdots\cdots+v_n$ ثم استنتج بدلالة n المجموع

$\acute{S}_n=u_0+u_1+\cdots\cdots+u_n$

❻

(u_n) متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_0=\propto \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3 \end{cases}$

عين قيمة $\propto$ حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة

نضع : $\propto=0$ ، بين أن بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n<4$

أدرس رتابة المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟

نضع: $v_n=u_n-4$ ، بين أن (v_n) متتالية هندسية و عين أساسها r

	اكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n أحسب $\lim u_n$
7	(u_n) متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 4 \end{cases}$ 1. أحسب : u_1 , u_2 , u_3 2. نضع : $v_n = u_n + \alpha$ ، عين قيمة $\propto$ حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 3. أكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n 4. نضع : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$ أحسب المجموع S ثم عين قيمة n حتى يكون $S = 729$
8	(u_n) متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 4 \end{cases}$ 1. أحسب : u_1 , u_2 , u_3 2. نضع : $v_n = u_n + \alpha$ ، عين قيمة $\propto$ حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 3. أكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n 4. نضع : $S = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \cdots\cdots + \frac{1}{v_n}$ أحسب المجموع S
9	(u_n) متتالية عددية حيث : $\begin{cases} u_0 = \propto \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \end{cases}$ عين قيمة $\propto$ حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة نضع : $\propto = 0$ ، بين أن بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \langle 1$ أدرس رتابة المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟ نضع: $v_n = u_n - 1$ ، بين أن (v_n) متتالية هندسية و عين أساسها r اكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$ أحسب بدلالة n المجموع : $S = {v_0}^2 + {v_1}^2 + \cdots\cdots + {v_n}^2$

هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ

و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي للصفحة

5min Maths