مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال اللوغاريتمية)

الدروس // الشعبة: الثالثة علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

دروس: حول الدّوال اللوغاريتمية// التحضير الجيد للبكالوريا// الشعبة: 03 ع؛ تر.

❶ الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية:

① النشاط 02 ص 77:

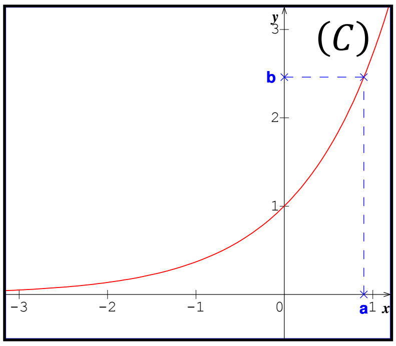
الهدف: تعريف الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية.

الدّالة الأسية **مستمرة ومتزايدة تماما** على $\mathbb{R}$

ولدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة**، من أجل كل عدد حقيقي b من $]0;+\infty[$ يُوجد **عدد حقيقي وحيد** a من $\mathbb{R}$ بحيث $e^a = b$.

❑ بوضع: $a = \ln(b)$ نكون بذلك قد عرفنا دّالة جديدة.



تعريف:

تسمى هذه الدّالة " **الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية** "، ونرمز إليها بالرمز " ln ".

1) حساب بعض الصور:

حساب الأعداد التالية $\ln(1)$، $\ln(e)$، $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ و $\ln(e^2)$:

❍ بما أنّ: $e^0 = 1$، فإنّ: $\boxed{\ln 1 = 0}$.

❍ بما أنّ: $e^1 = e$، فإنّ: $\boxed{\ln e = 1}$.

❍ بما أنّ: $e^{-1} = \frac{1}{e}$، فإنّ: $\boxed{\ln \frac{1}{e} = -1}$، وَ $\boxed{\ln e^2 = 2}$.

تعيين قيمة مقربة إلى 10^{-3} **للعدد** $\ln(2)$:

لدينا: $\boxed{\ln(2) \simeq 0{,}693}$

تبيان أنّ $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$**، ثمّ استنتاج قيمة مقربة إلى** 10^{-3} **للعدد** $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$:

❍ بوضع: $\alpha = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 2$

نجد: $e^\alpha = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln 2} = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \times e^{\ln 2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1 = e^0$

أي: $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 2 = 0$ ومنه: $\boxed{\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2}$.

وعليه: $\boxed{\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}693}$.

2) التمثيل البياني:

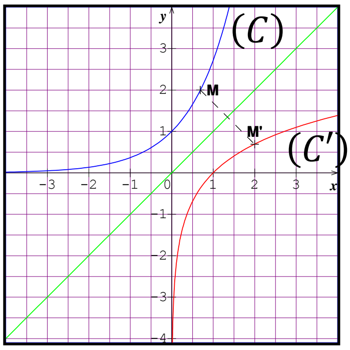
نعتبر في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المنحنيين (C) و (C') الممثلين على التوالي للدّالتين " exp " و " ln ".

❑ النقطتين $M(x;y)$ و $M(y;x)$ **متناظرتان بالنسبة للمنصف الأول** (المستقيم الذي معادلته $y = x$).

❑ بما أنّ: $b = e^a$ وَ $\ln b = a$، فالقول أنّ: $M(a;b)$ تنتمي إلى (C) معناه: $M'(b;a)$ تنتمي إلى (C').

⌫ بما أنّ: $M(a;b)$ وَ $M'(b;a)$ **متناظرتان بالنسبة إلى المنصف الأول**، فإنّ: (C) و (C') كذلك **متناظرين بالنسبة المنصف الأوّل.**

رسم المنحنى (C) ثمّ المنحنى (C') في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$:



3) وضع تخمينات:

✪ الدّالة " ln " **متزايدة تماما** على المجال $]0;+\infty[$.

✪ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ ، وَ $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

① اللوغاريتم النيبيري لعدد:

مبرهنة وتعريف:

من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$، **يوجد عدد حقيقي وحيد** b بحيث $e^b = a$.

يسمى هذا العدد " **اللوغاريتم النيبيري للعدد** a "؛ ونرمز إليه بالرمز " $\ln a$ ".

مثال:

العدد الحقيقي الوحيد b الذي يُحقق $e^b = 2$، هو إذن $\ln 2$.

② تعريف الدّالة " ln ":

تعريف:

نسمي " **الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية** " الدّالة التي نرمز إليها بالرمز " $\ln$ "، والتي تُرفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج:

❍ من أجل كل x من $]0;+\infty[$، ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$، $x = e^y$ يعني $y = \ln x$.

❍ من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\boxed{e^{\ln x} = x}$.

❍ من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\boxed{\ln(e^x) = x}$.

❍ بما أنّ: $e^0 = 1$، فإنّ: $\boxed{\ln 1 = 0}$

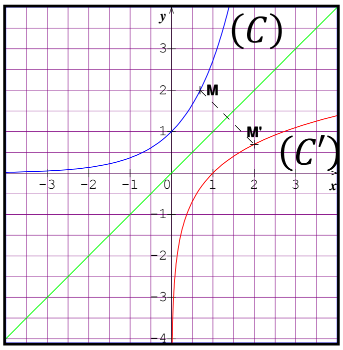
وبما أنّ: $e^1 = e$، فإنّ: $\boxed{\ln e = 1}$.

ملاحظة:

نُعبر عن النتيجة " 1 " بالقول أنّ **الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية "ln" هي الدّالة العكسية للدّالة الأسية "exp"**.

خاصية:

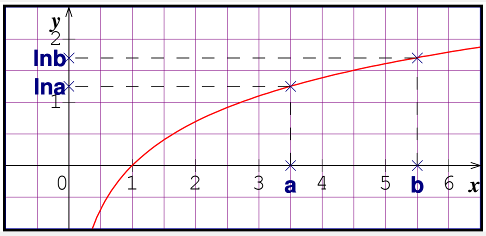
في معلم متعامد ومتجانس، **التمثيلان البيانيان للدّالتين الأسية واللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (المنصف الأول)**.



③ اتجاه تغيّر الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية:

خاصية:

الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية **متزايدة تماما** على المجال $]0;+\infty[$.



نتائج:

❑ من أجل كل **عددين حقيقيين** a و b من $]0;+\infty[$، لدينا:

$a < b$ **يعني** $\ln a < \ln b$

$a = b$ **يعني** $\ln a = \ln b$

$a > b$ **يعني** $\ln a > \ln b$

❑ من أجل كل **عدد حقيقي موجب تماماً** x لدينا:

$x > 1$ **يعني** $\ln x > 0$

$0 < x < 1$ **يعني** $\ln x < 0$

كما أنّ $\ln 1 = 0$.

طريقة 01.

المعادلة $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$ **تعني** $u(x) = v(x)$.

المتراجحة $\ln[u(x)] \geq \ln[v(x)]$ **تعني** $u(x) \geq v(x)$.

طريقة 02.

لحل معادلة من الشكل $a[\ln(x)]^2 + b\ln(x) + c = 0$ مع $a \neq 0$

نضع $\boxed{X = \ln(x)}$.

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$، ثم نستنتج قيم x في حالة وجودها.

التمرين 52 و53 ص106:

• في التمارين من **52** إلى **56** عين مجموعة تعريف الدّالة f للمتغير الحقيقي x :

52 (1 $f : x \mapsto \ln(x+1)$

(2 $f : x \mapsto \ln(-2x+3)$

(3 $f : x \mapsto 2\ln(x^2+1)$

(4 $f : x \mapsto \ln|x|$.

53 (1 $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$

(2 $f : x \mapsto \ln(x^2-4)$

(3 $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x-2)$

(4 $f : x \mapsto \ln(x^2+2x-3)$.

الحل:

(1 $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$ ،

f معرّفة من أجل $\frac{1}{x-1} > 0$ أي: $x > 1$

ومنه: $\boxed{D_f =]1;+\infty[}$.

(2 $f : x \mapsto \ln(x^2-4)$ ،

f معرّفة من أجل $x^2 - 4 > 0$ أي: ($x > 2$ **أو** $x < -2$)

ومنه: $\boxed{D_f =]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[}$.

(3 $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x-2)$ ،

f معرّفة من أجل ($x > 2$ **و** $x > -1$) ومنه: $\boxed{D_f =]2;+\infty[}$.

(4 $f : x \mapsto \ln(x^2+2x-3)$ ،

f معرّفة من أجل $x^2 + 2x - 3 > 0$

ومنه: $\boxed{D_f =]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[}$.

التمرين 54 ص106:

54 (1 $f : x \mapsto \ln\sqrt{2-3x}$ ؛ (2 $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

(3 $f : x \mapsto \frac{1-x}{\ln x}$ ؛ (4 $f : x \mapsto \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$.

الحل:

1) $f: x \mapsto \ln\sqrt{2-3x}$؛

f معرّفة إذا وفقط إذا كان: $2-3x>0$

ومنه: $x<\frac{2}{3}$

إذن: $\boxed{D_f = \left]-\infty; \frac{2}{3}\right[}$.

2) $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$؛

f معرّفة إذا وفقط إذا كان: $x>0$

إذن: $\boxed{D_f =]0; +\infty[}$.

3) $f: x \mapsto \frac{1-x}{\ln x}$؛

f معرّفة إذا وفقط إذا كان: $\begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$

إذن: $\boxed{D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[}$.

4) $f: x \mapsto \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$؛

f معرّفة إذا وفقط إذا كان: $\begin{cases} \frac{x}{x-1} \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

إذن: $\boxed{D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[}$.

التمرين 58 ص106:

58 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

أ) $\ln x = 2$، ب) $\ln x = -3$،

ج) $7\ln x = 2$، د) $\ln x + \ln 3 = 0$.

الحل:

أ) $\ln x = 2$،

لتكن D_1 مجموعة تعريفها نجد: $D_1 =]0; +\infty[$.

❑ $\ln x = 2$ معناه: $x = e^2 \in D_1$ إذن: $\boxed{S_1 = \{e^2\}}$.

ب) $\ln x = -3$،

لتكن D_2 مجموعة تعريفها نجد: $D_2 =]0; +\infty[$.

❑ $\ln x = -3$ معناه: $x = e^{-3} \in D_2$ إذن: $\boxed{S_2 = \{e^{-3}\}}$.

ج) $7\ln x = 2$،

لتكن D_3 مجموعة تعريفها نجد: $D_3 =]0; +\infty[$.

❑ $7\ln x = 2$ معناه: $x = e^{\frac{2}{7}} \in D_3$ إذن: $\boxed{S_3 = \left\{e^{\frac{2}{7}}\right\}}$.

د) $\ln x + \ln 3 = 0$،

لتكن D_4 مجموعة تعريفها نجد: $D_4 =]0; +\infty[$.

❑ $\ln x + \ln 3 = 0$ ومنه: $\ln x = -\ln 3$

وعليه: $\ln x = \ln\frac{1}{3}$

وبالتالي: $x = \frac{1}{3} \in D_4$

إذن: $\boxed{S_4 = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$.

التمرين 59 ص106:

59 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(2x-3) = \ln(x+4)$؛

2) $\ln(x^2+x) = 1$؛

3) $\ln|1-x| = \ln 3$؛ **4)** $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1$.

الحل:

1) $\ln(2x-3) = \ln(x+4)$؛

لتكن D_1 مجموعة تعريفها نجد:

$D_1 = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[\cap]-4; +\infty[= \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

⌫ لدينا: $\ln(2x-3) = \ln(x+4)$

معناه: $(2x-3) = (x+4)$

ومنه: $x = 7 \in D_1$ إذن: $\boxed{S_1 = \{7\}}$.

2) $\ln(x^2+x) = 1$؛

لتكن D_2 مجموعة تعريفها نجد:

$D_2 =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

⌫ $\ln(x^2+x) = 1$ معناه: $\ln(x^2+x) = \ln e$

أي: $x^2+x = e$

ومنه: $x^2+x-e = 0$

مميزها $\Delta = 1+4e > 0$، **وبالتالي:**

$\begin{cases} x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2} \in D_2 \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4e}}{2} \in D_2 \end{cases}$؛

إذن: $\boxed{S_2 = \left\{\frac{-1-\sqrt{1+4e}}{2}; \frac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}\right\}}$.

3) $\ln|1-x| = \ln 3$؛

لتكن D_3 مجموعة تعريفها نجد: $D_3 = \mathbb{R} - \{1\}$.

⌫ $\ln|1-x| = \ln 3$ معناه: $|1-x| = 3$

وهذا يعني أنّ: $\left[\begin{array}{l} 1-x = 3 \\ \text{أو} \\ 1-x = -3 \end{array}\right.$

ومنه: $\left[\begin{array}{l} x = -2 \in D_3 \\ \text{أو} \\ x = 4 \in D_3 \end{array}\right.$؛

إذن: $\boxed{S_3 = \{-2; 4\}}$.

4) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1$؛ لتكن D_4 مجموعة تعريفها نجد:

$D_4 =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

⌫ $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1$ معناه: $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln e^{-1}$

أي: $\frac{x+1}{x-1} = e^{-1}$

ومنه: $x = \frac{1+e}{1-e} \in D_4$

إذن: $\boxed{S_4 = \left\{\frac{1+e}{1-e}\right\}}$.

التمرين 61 ص106: 61 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $\ln x < 1$؛ 2) $\ln 2x > -1$؛

3) $\ln(2x+3) < 5$؛ 4) $\ln(1-x) \leq 2$؛

5) $\ln x > \ln(2x-1)$؛ 6) $x\ln x - \ln x \geq 0$.

الحل:

1) $\ln x < 1$؛

لتكن D_1 مجموعة تعريفها نجد: $D_1 =]0; +\infty[$.

⌫ $\ln x < 1$ معناه: $\ln x < \ln e$؛ أي: $0 < x < e$

إذن: $\boxed{S_1 =]0; e[}$.

2) $\ln 2x > -1$؛

لتكن D_2 مجموعة تعريفها نجد: $D_2 =]0; +\infty[$.

⌫ $\ln 2x > -1$ معناه: $\ln 2x > \ln e^{-1}$؛

أي: $2x > e^{-1}$

إذن: $\boxed{S_2 = \left]\frac{1}{2e}; +\infty\right[}$.

3) $\ln(2x+3) < 5$؛

لتكن D_3 مجموعة تعريفها نجد: $D_3 = \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

⌫ $\ln(2x+3) < 5$ معناه: $\ln(2x+3) < \ln e^5$

أي: $2x + 3 < e^5$

ومنه: $0 < x < \frac{e^5-3}{2}$

إذن: $\boxed{S_3 = \left]0; \frac{e^5-3}{2}\right[}$.

4) $\ln(1-x) \leq 2$؛

لتكن D_4 مجموعة تعريفها نجد: $D_4 =]-\infty و 1[$.

⌫ $\ln(1-x) \leq 2$ معناه: $\ln(1-x) \leq \ln e^2$

أي: $1 - x \leq e^2$

ومنه: $x \geq 1 - e^2$

إذن: $\boxed{S_4 = [1-e^2; 1[}$.

5) $\ln x > \ln(2x-1)$؛

لتكن D_5 مجموعة تعريفها نجد:

$D_5 =]0; +\infty[\cap \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[= \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

⌫ $\ln x > \ln(2x-1)$ معناه: $x > 2x - 1$

ومنه: $x < 1$

إذن: $\boxed{S_5 = \left]\frac{1}{2}; 1\right[}$.

6) $x\ln x - \ln x \geq 0$؛

لتكن D_6 مجموعة تعريفها نجد: $D_6 =]0; +\infty[$.

⌫ $x\ln x - \ln x \geq 0$ معناه: $(x-1)\ln x \geq 0$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	▮	-	0	+	
$\ln x$	▮	-	0	+	
$(x-1)\ln x$	▮	+	0	+	

إذن: $\boxed{S_6 =]0; +\infty[}$.

❷ الخواص الجبرية للدّالة اللوغاريتمية:

تمهيد:

a وَ b عددان حقيقيان موجبان تماما،

لدينا: $\begin{cases} e^{\ln(ab)} = ab \\ e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab \end{cases}$

إذن: $\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$.

① الخاصية الأساسية:

خاصية:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$ ،

$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$.

ملاحظة:

يتم تعميم إلى **عدة أعداد حقيقية موجبة تماما** وهكذا يكون لدينا:

من أجل كل أعداد حقيقية a_1، a_2، ...، a_n من $]0; +\infty[$،

$\boxed{\ln(a_1 a_2 \dots a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}$

② نتائج:

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0; +\infty[$، ومن أجل كل عدد صحيح نسبي n؛

نتيجة ❶: $\boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a}$، وَ $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$.

نتيجة ❷: $\boxed{\ln(a^n) = n\ln a}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

نتيجة ❸: $\boxed{\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a}$.

البرهان:

ليكن a و b عددين حقيقيين من $]0; +\infty[$، وليكن n عدد صحيح نسبي؛

❶ ❏ لدينا: $\begin{cases} \ln\left(\frac{a}{a}\right) = \ln 1 = 0 \\ \ln\left(\frac{a}{a}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{a} \end{cases}$

أي: $\ln a + \ln\frac{1}{a} = 0$، إذن: $\boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a}$.

❏ ويكون:

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$

أي: $\ln a + \ln\frac{1}{a} = 0$، إذن: $\boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a}$.

❷ ❏ **نستعمل البرهان بالتراجع** (محور المتتاليات العددية).

❸ ❏ لدينا: $\begin{cases} \left(\ln(\sqrt{a})\right)^2 = \ln a \\ \left(\ln(\sqrt{a})\right)^2 = 2\ln(\sqrt{a}) \end{cases}$

أي: $2\ln(\sqrt{a}) = \ln a$، إذن: $\boxed{\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a}$.

التمرين 67 ص107: (حلول المعادلات)

67 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $2\ln(x-3) = \ln 4$؛

2) $\ln x+\ln(x-1)=\ln 2+\ln 3$؛
3) $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$؛
4) $\ln x+\ln(4-x)=\ln(2x-1)+\ln 3$؛
5) $\ln(x+1)=-1+\ln(x-1)$.

الحل:

1) $2\ln(x-3)=\ln 4$؛
لتكن D_1 مجموعة تعريفها نجد: $D_1=]3;+\infty[$.
لدينا: $2\ln(x-3)=\ln 4$
تُكافئ: $\ln(x-3)^2=\ln 4$
أي: $(x-3)^2=4$
وعليه: $x-3=\sqrt{4}$ أو $x-3=-\sqrt{4}$
ويكون: $x=5\in D_1$ أو $x=1\notin D_1$
إذن: $\boxed{S_1=\{5\}}$.

2) $\ln x+\ln(x-1)=\ln 2+\ln 3$؛
لتكن D_2 مجموعة تعريفها نجد:
$D_2=]0;+\infty[\cap]1;+\infty[=]1;+\infty[$.
لدينا: $\ln x+\ln(x-1)=\ln 2+\ln 3$
تُكافئ: $\ln[x\times(x-1)]=\ln(2\times 3)$
أي: $x(x-1)=6$
ومنه: $x^2-x-6=0$
مميزها $\Delta=1-4(1)(-6)=25>0$، **وبالتالي:**
$$\begin{cases} x_1=\frac{1+\sqrt{25}}{2}=3\in D_2 \\ x_2=\frac{1-\sqrt{25}}{2}=-2\notin D_2 \end{cases}$$؛
إذن: $\boxed{S_2=\{3\}}$.

3) $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$؛
لتكن D_3 مجموعة تعريفها نجد:
$D_3=]-4;+\infty[\cap]0;+\infty[=]0;+\infty[$.
لدينا: $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$
تُكافئ: $\ln(x)^2=\ln[(x+4)(2x)]$
ومنه: $x^2=2x(x+4)$
وعليه: $x(x+8)=0$
ويكون: $x=0\notin D_3$ أو $x=-8\notin D_3$.
إذن: $\boxed{S_3=\{\ \ \}}$.

4) $\ln x+\ln(4-x)=\ln(2x-1)+\ln 3$؛
لتكن D_4 مجموعة تعريفها نجد:
$D_4=]0;+\infty[\cap]-\infty;4[\cap\left]\frac{1}{2};+\infty\right[=\left]\frac{1}{2};4\right[$.
لدينا: $\ln x+\ln(4-x)=\ln(2x-1)+\ln 3$
تُكافئ: $\ln[x(4-x)]=\ln[3(2x-1)]$
أي: $x(4-x)=3(2x-1)$
ومنه: $x^2+2x-3=0$
مميزها $\Delta=4-4(1)(-3)=16>0$، **وبالتالي:**
$$\begin{cases} x_1=\frac{-2+\sqrt{16}}{2}=1\in D_4 \\ x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{2}=-3\notin D_4 \end{cases}$$؛
إذن: $\boxed{S_4=\{1\}}$.

5) $\ln(x+1)=-1+\ln(x-1)$؛
لتكن D_5 مجموعة تعريفها نجد:
$D_5=]-1;+\infty[\cap]1;+\infty[=]1;+\infty[$.
لدينا: $\ln(x+1)=-1+\ln(x-1)$
تُكافئ: $\ln(x+1)=\ln e^{-1}+\ln(x-1)$
ويكون: $\ln(x+1)=\ln[e^{-1}(x-1)]$
أي: $(x+1)=e^{-1}(x-1)$
ومنه: $x+1=\frac{x-1}{e}$،
وعليه: $x=\frac{-(e+1)}{e-1}\notin D_5$
إذن: $\boxed{S_5=\{\ \ \}}$.

التمرين 68 ص107: (حلول المتراجحات)

68 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:
1) $\ln(x-1)-\ln 3>\ln 2-\ln(x+4)$؛
2) $\ln(x^2-2x)>\ln(4x-5)$؛
3) $\ln x+\ln(x+1)\leq\ln(x^2-2x+2)$؛
4) $\ln(35-8x)\geq 3\ln 2+\ln(x)^2$.

الحل:

1) $\ln(x-1)-\ln 3>\ln 2-\ln(x+4)$؛
لتكن D_1 مجموعة تعريفها نجد:
$D_1=]1;+\infty[\cap]-4;+\infty[=]1;+\infty[$.
لدينا: $\ln(x-1)-\ln 3>\ln 2-\ln(x+4)$
تُصبح: $\ln\frac{x-1}{3}>\ln\frac{2}{x+4}$
أي: $\frac{x-1}{3}>\frac{2}{x+4}$
معناه: $\frac{x-1}{3}-\frac{2}{x+4}>0$
ومنه: $\frac{(x-1)(x+4)-6}{3(x+4)}>0$
وعليه: $\frac{x^2+3x-10}{3(x+4)}>0$
إذن: $\boxed{S_1=]2;+\infty[}$.

2) $\ln(x^2-2x)>\ln(4x-5)$؛
لتكن D_2 مجموعة تعريفها نجد: $D_2=\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$.
لدينا: $\ln(x^2-2x)>\ln(4x-5)$
تُصبح: $x^2-2x>4x-5$
معناه: $x^2-6x+5>0$
ندرس إشارة x^2-6x+5.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
x^2-6x+5		+	0	-	0	+	

نجد: $\boxed{S_2 =]5;+\infty[}$.

3) $\ln x + \ln(x+1) \le \ln(x^2-2x+2)$؛

لتكن D_3 مجموعة تعريفها نجد: $D_3 =]0;+\infty[$.

⌫ لدينا: $\ln x + \ln(x+1) \le \ln(x^2-2x+2)$

ومنه: $\ln[x(x+1)] \le \ln(x^2-2x+2)$

وعليه: $x(x+1) \le (x^2-2x+2)$

ويكون: $x^2+x \le x^2-2x+2$

أي: $x \le \frac{2}{3}$

إذن: $\boxed{S_3 = \left]0;\frac{2}{3}\right[}$.

4) $\ln(35-8x) \ge 3\ln 2 + \ln(x)^2$؛

لتكن D_4 مجموعة تعريفها نجد:

$D_4 = \left]-\infty;\frac{35}{8}\right[\cap \mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup \left]0;\frac{35}{8}\right[$.

⌫ لدينا: $\ln(35-8x) \ge 3\ln 2 + \ln(x)^2$

تُكافئ: $\ln(35-8x) \ge \ln[2^3(x)^2]$

أي: $35-8x \ge 8x^2$

ومنه: $8x^2+8x-35 \le 0$

ندرس إشارة $8x^2+8x-35$.

x	$-\infty$		$\frac{-4-\sqrt{74}}{4}$		$\frac{-4+\sqrt{74}}{4}$		$+\infty$
$8x^2+8x-35$		+	0	-	0	+	

نجد: $\boxed{S_4 = \left]\frac{-4-\sqrt{74}}{4};0\right[\cup \left]0;\frac{-4+\sqrt{74}}{4}\right[}$.

التمرين 69 ص107: (دراسة الإشارة)

69 ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية على $]0;+\infty[$:

1) $\ln x - \ln 3$ **2)** $(\ln x+1)(\ln x-1)$

3) $\ln x\,(\ln x-1)$ **4)** $2x\ln(1-x)$

5) $-x^2\ln(x+1)$.

الحل:

1) **إشارة العبارة** $\ln x - \ln 3$ **على** $]0;+\infty[$:

لدينا: $\ln x - \ln 3 = \ln\frac{x}{3}$

⌫ $\ln\frac{x}{3} > 0$ معناه: $\frac{x}{3} > 1$ ومنه: $x > 3$

⌫ $\ln\frac{x}{3} = 0$ معناه: $\frac{x}{3} = 1$ ومنه: $x = 3$

⌫ $\ln\frac{x}{3} < 0$ معناه: $0 < \frac{x}{3} < 1$ ومنه: $0 < x < 3$

نُلخص ذلك في جدول:

x	0		3		$+\infty$
$\ln x - \ln 3$	‖	-	0	+	

2) **إشارة العبارة** $(\ln x+1)(\ln x-1)$ **على** $]0;+\infty[$:

لدينا: $(\ln x+1)(\ln x-1)$

⌫ نضع: $\ln x + 1 = 0$ نجد: $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

⌫ نضع: $\ln x - 1 = 0$ نجد: $x = e^{1} = e$.

نُلخص ذلك في جدول:

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$\ln x+1$	‖	-	0	+		+	
$\ln x-1$	‖	-		-	0	+	
الجداء	‖	+	0	-	0	+	

3) **إشارة العبارة** $\ln x\,(\ln x-1)$ **على** $]0;+\infty[$:

لدينا: $\ln x\,(\ln x-1)$

⌫ نعلم أنّ: $\ln x = 0$ من أجل: $x = 1$.

⌫ نضع: $\ln x - 1 = 0$ نجد: $x = e^{1} = e$.

نُلخص ذلك في جدول:

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	-	0	+		+	
$\ln x-1$	‖	-		-	0	+	
الجداء	‖	+	0	-	0	+	

4) **إشارة العبارة** $2x\ln(1-x)$ **على** $]0;+\infty[$:

لدينا: $2x\ln(1-x)$

⌫ $\ln(1-x) > 0$ معناه: $1-x > 1$ ومنه: $x < 0$

⌫ $\ln(1-x) = 0$ معناه: $1-x = 1$ ومنه: $x = 0$

⌫ $\ln(1-x) < 0$ معناه: $0 < 1-x < 1$

ومنه: $0 < x < 1$

نُلخص ذلك في جدول:

x	0		1
x	‖	+	‖
$\ln(1-x)$	‖	-	‖
$2x\ln(1-x)$	‖	-	‖

5) **إشارة العبارة** $-x^2\ln(x+1)$ **على** $]0;+\infty[$:

لدينا: $-x^2\ln(x+1)$

⌫ $\ln(x+1) > 0$ معناه: $x+1 > 1$ ومنه: $x > 0$

⌫ $\ln(x+1) = 0$ معناه: $x+1 = 1$ ومنه: $x = 0$

⌫ $\ln(x+1) < 0$ معناه: $0 < x+1 < 1$

ومنه: $-1 < x < 0$

نُلخص ذلك في جدول:

x	0		$+\infty$
$\ln(x+1)$	‖	+	
$-\ln(x+1)$	‖	-	
$-x^2\ln(x+1)$	‖	-	

3 دراسة الدّالة اللوغاريتمية النيبيرية:

① النهايات:

خواص:

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ ❷ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$.

② الاستمرارية والاشتقاقية:

خواص: