الأستاذ قرابعية سمير

ثانوية سعدي الصديق تبسة

التحضير الجيد لبكالوريا 2021

كل ما يحتاجه تلميذ البكالوريا في الدوال العددية

1) تذكير : إشارة ثنائي الحد $(ax+b)$ حيث $a \neq 0$

$ax+b=0$ أي : $ax=-b$ أي : $x=\frac{-b}{a}$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
الإشارة	مخالف لإشارة a		موافق لإشارة a

2) حلول معادلة من الدرجة الثانية و تحليلها إلى جداء عاملين

$ax^2+bx+c=0$ حيث $(a \neq 0)$ ، نحسب المميز $\Delta = b^2-4ac$

إذا كان	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$ في $\mathbb{R}$	لا تقبل حل	حل مضاعف $x_0=\frac{-b}{2a}$	حلين هما : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
تحليل ax^2+bx+c	لا تقبل تحليل	$a(x-x_0)^2$	$a(x-x_1)(x-x_2)$

إشارة ax^2+bx+c حيث $(a \neq 0)$

إذا كان	فإن الإشارة كمايلي
$\Delta < 0$	الجدول (أ)
$\Delta = 0$	الجدول (ب)
$\Delta > 0$	$x_1 < x_2$ ، الجدول (ج)

الجدول (أ):

x	$-\infty$	$+\infty$
الإشارة	موافق لإشارة a	

الجدول (ب):

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
الإشارة	موافق لإشارة a		موافق لإشارة a

$x_1 < x_2$

الجدول (ج):

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
الإشارة	موافق لإشارة a		مخالف لإشارة a		موافق لإشارة a

3) النهايات

نهاية مجموع دالين

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح.ع.ت	$-\infty$

نهاية جداء دالين

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right]$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح.ع.ت	ح.ع.ت

نهاية حاصل قسمة دالين

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$l\in\mathbb{R}$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح.ع.ت	ح.ع.ت	ح.ع.ت	ح.ع.ت

تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات " عدم التعيين "

و تتمثل في : $-\infty+\infty$ ، $\dfrac{\infty}{\infty}$ ، $\dfrac{0}{0}$ ، $0\times\infty$

ملاحظة :

1) نهاية كثير الحدود لما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية الحد ذو الأعلى درجة .

2) نهاية كسر ناطق لما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية نسبة أعلى درجة في البسط على أعلى درجة في المقام .

4) المستقيمات المقاربة

التفسير الهندسي	النهاية
المنحنى C_f يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=a$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$
المنحنى C_f يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=b$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$

المنحنى C_f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = ax + b$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$

ملاحظة : إذا كانت الدّالة f تكتب من الشكل : $f(x) = ax + b + g(x)$ و كانت $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f بجوار ∞ .

5) الإشتقاق

الدالة المشتقة	مجالات قابلية الإشتقاق	الدالة
$x \to 0$	$\mathbb{R}$	$x \to a \;/ a \in \mathbb{R}$
$x \to a$	$\mathbb{R}$	$x \to ax + b$
$x \to n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$x \to x^n \;/ \; n \in \mathbb{N}$
$x \to -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$x \to \dfrac{1}{x}$
$x \to -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$x \to \dfrac{1}{x^n} \;/ \; (n \in \mathbb{N})$
$x \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+ = \left]0;+\infty\right[$	$x \to \sqrt{x}$
$x \to \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \to \sin x$
$x \to -\sin x$	$\mathbb{R}$	$x \to \cos x$
$U' + V'$		$U + V$
$\lambda.U'$		$\lambda.U \;/\; (\lambda \in \mathbb{R})$
$U'V + UV'$		$U.V$
$-\dfrac{U'}{U^2}$		$\dfrac{1}{U}$
$\dfrac{U'V - UV'}{V^2}$		$\dfrac{U}{V}$
$x \to au'(ax+b)$		$x \to u(ax+b)$ حيث $a \neq 0$

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$ ، $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ، $(u \circ v)'(x) = v'\left[u(x)\right] \times u'(x)$

6) الوضع النسبي بين المنحنى و المستقيم المقارب المائل

لدراسة وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (ax+b)$ و نميز الحالات التالية :

إشارة الفرق	الوضع النسبي
$f(x)-(ax+b)<0$	C_f تحت (Δ)
$f(x)-(ax+b)>0$	C_f فوق (Δ)
$f(x)-(ax+b)=0$	C_f يقطع (Δ)

7) تقاطع المنحنى C_f مع محور الفواصل : نحل المعادلة $f(x)=0$

8) تقاطع المنحنى C_f مع محور التراتيب يعني حساب $f(0)$

9) مركز التناظر

$w(\alpha;\beta)$ مركز تناظر للمنحنى C_f يعني :

$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ بشرط $x\in D_f$ و $(2\alpha-x)\in D_f$

أو بالقانون $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$ بشرط $x\in D_f$ ، $(\alpha-x)\in D_f$ و $(\alpha+x)\in D_f$

✓ المسألة العكسية : يطلب منا مثلا إثبات أن : $f(-6-x)+f(x)=4$

لتفسيرها هندسيا نقوم بالمطابقة : $\begin{cases}2\alpha=-6\\2\beta=4\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha=-3\\\beta=2\end{cases}$ و منه نقول أن النقطة $A(-3;2)$ مركز تناظر للمنحنى C_f .

10) محور تناظر :

المستقيم $(D):x=\alpha$ محور تناظر للمنحنى C_f يعني :

$f(2\alpha-x)=f(x)$ بشرط $x\in D_f$ و $(2\alpha-x)\in D_f$

أو بالقانون : $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$ بشرط $x\in D_f$ ، $(\alpha-x)\in D_f$ و $(\alpha+x)\in D_f$

✓ المسألة العكسية يطلب منا مثلا إثبات أن : $f(-8-x)=f(x)$

لتفسيرها هندسيا نقوم بالمطابقة : أي $2\alpha=-8$ و منه $\alpha=-4$

و منه نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x=-4$ محور تناظر للمنحنى C_f

11) الدّالة الزوجية و الدّالة الفردية

مجال مجموعة التعريف متناظر بالنسبة للصفر أي $x\in D_f$ فإن $(-x)\in D_f$

الدّالة الزوجية تحقق $f(-x)=f(x)$ و تمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

الدّالة الفردية تحقق $f(-x)=-f(x)$ و تمثيلها البياني متناظر بالنسبة للمبدأ .

12) نقطة الإنعطاف

نقول أن C_f يقبل النقطة $A(x_0;f(x_0))$ كنقطة إنعطاف إذا تحقق أحد الشروط التالية :

أ) المشتق الثاني $f''(x)$ ينعدم عند x_0 و يغير إشارته عندها .

ب) المشتق الأول $f'(x)$ ينعدم عند x_0 و لا يغير إشارته عندها .

ج) المماس عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ يخترق المنحنى C_f .

13) مبرهنة القيم المتوسطة (الحالة الخاصة)

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$

و كان $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $f(\alpha)=0$ حيث : $\alpha\in]a;b[$

مبرهنة القيم المتوسطة (الحالة العامة)

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[a;b]$

و كان k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيد α يحقق $f(\alpha)=k$ حيث : $\alpha\in]a;b[$

14) العدد المشتق و تفسيره الهندسي

التفسير الهندسي	قابلية الاشتقاق	النهاية	
C_f يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه l	f قابلة للإشتقاق عند x_0	$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l\neq 0$	1
C_f يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موازيا لحامل محور الفواصل (أفقي)	f قابلة للإشتقاق عند x_0	$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	2
C_f يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موازيا لحامل محور التراتيب (عمودي) معادلته $x=x_0$	f غير قابلة للإشتقاق عند x_0	$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$	3
C_f يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ و تسمى النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة زاوية.	f قابلة للإشتقاق على يمين و على يسار x_0. لكن غير قابلة للإشتقاق عند x_0	$\lim_{x\xrightarrow{<}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$ $\lim_{x\xrightarrow{>}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$ و $l_1\neq l_2$	4
C_f يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موازيا لحامل محور التراتيب (عمودي) معادلته $x=x_0$ و تسمى النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة إنعطاف للمنحنى C_f	f غير قابلة للإشتقاق على يمين و على يسار x_0 و غير قابلة للإشتقاق عند x_0	$\lim_{x\xrightarrow{<}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$ $\lim_{x\xrightarrow{>}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$ بحيث النهايتين معا $+\infty$ أو $-\infty$	5

6	$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ بحيث إحدى النهايتين $-\infty$ و الأخرى $+\infty$	f غير قابلة للإشتقاق على يمين و على يسار x_0 و غير قابلة للإشتقاق عند	C_f يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موازيين لحامل محور التراتيب (عموديان) معادلتيهما $x = x_0$ و تسمى النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة رجوع للمنحنى C_f

ملاحظة: صيغة أخرى لقانون قابلية الإشتقاق : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

15) المماس (السؤال و طريقة الإجابة عليه)

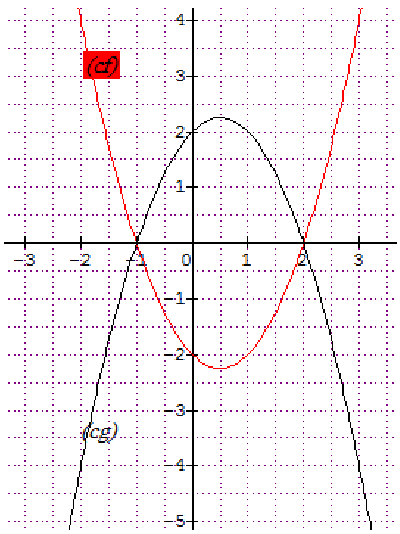
	السؤال	كيفية البحث عن الفاصلة x بكتابة معادلة المماس
1	أكتب معادلة المماس للمنحنى C_f عند النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب القانون : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ نعوض x بقيمتها المعطاة
2	أكتب معادلة المماس للمنحنى C_f عند النقطة ذات الترتيبة y_0	نحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ و عند تعيين x_0 نطبق القانون كما في (1)
3	بيّن أنه يوجد مماس للمنحنى C_f ميله أو (معامل توجيهه) يساوي a	نحل المعادلة $f'(x_0) = a$ و عند تعيين x_0 نطبق القانون كما في (1)
4	بيّن أنه يوجد مماس للمنحنى C_f يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$	نحل المعادلة $f'(x_0) = a$ و عند تعيين x_0 نطبق القانون كما في (1)
5	بيّن أنه يوجد مماس للمنحنى C_f يعامد المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$	نحل المعادلة $f'(x_0) = \frac{-1}{a}$ و عند تعيين x_0 نطبق القانون كما في (1)
6	بيّن أنه يوجد مماس للمنحنى C_f يشمل النقطة $M(\alpha;\beta)$	نحل المعادلة : $\beta = f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$ عند إيجاد x_0 نطبقالقانون كما في (1) .

إستنتاج منحنى من منحنى بياني اخر

الحالة الاولى $g(x) = -f(x)$

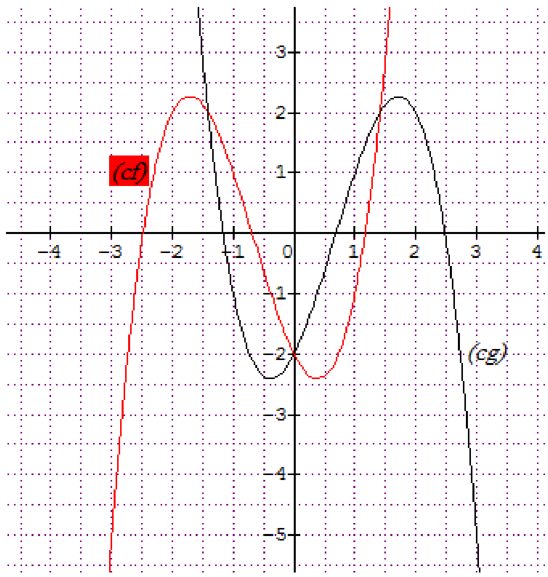
C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل

مثال:



الحالة الثانية $g(x) = f(-x)$

C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب



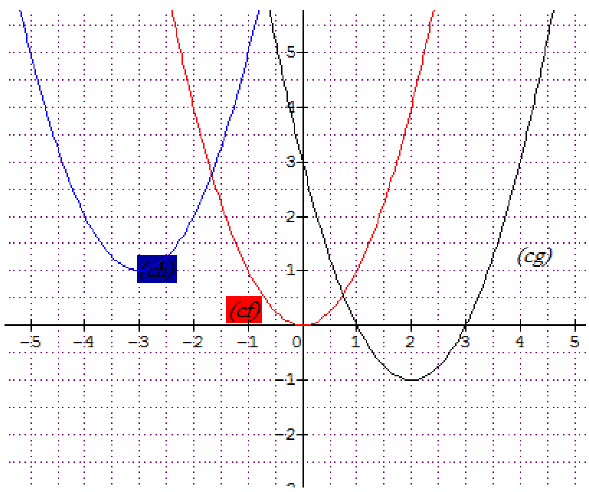
الحالة الثالثة $g(x) = f(x+a)+b$

C_g هو صورة C_f بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$

مثال: $f(x) = x^2$ ، $g(x) = (x-2)^2 - 1$ ،

$h(x) = (x+3)^2 + 1$

C_g هو صورة C_f بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

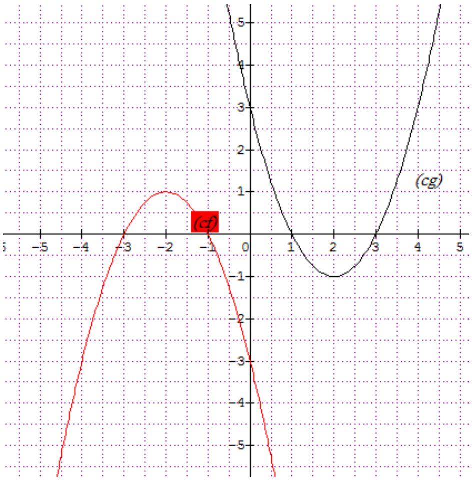


C_h هو صورة C_f بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

الحالة الرابعة $g(x) = -f(-x)$

C_g هو نظير C_f بالنسبة للمبدأ

مثال:

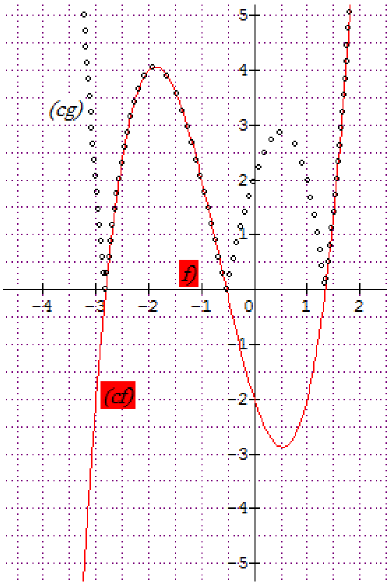


الحالة الخامسة $g(x) = \left|f(x)\right|$

✓ C_g ينطبق على C_f لما $f(x) \geq 0$ أي" C_f يقع فوق محور الفواصل "

✓ C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل لما $f(x) \leq 0$ أي" C_f يقع تحت محور الفواصل "

مثال:

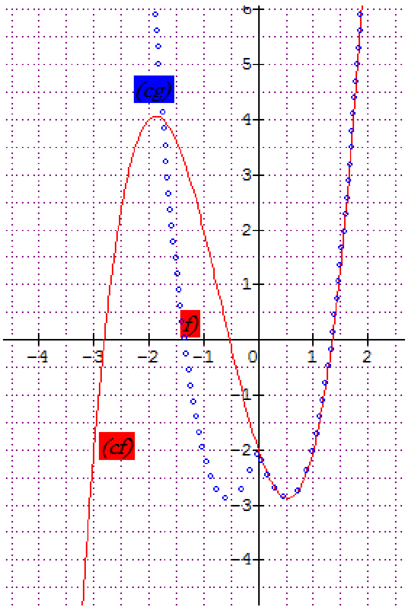


الحالة السادسة $g(x) = f\left|x\right|$

عادة ما يطلب إثبات أن الدّالة g دالة زوجية

لما $x \geq 0$ أي في المجال الموجب يكون : C_g منطبق على C_f

لما $x \leq 0$ أي في المجال السالب يكون : C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب



التمرين الأول - باك علوم تجريبية 2014 -

❖ لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,7 < \alpha < 0,8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

❖ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1) + \dfrac{1-3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

جـ) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

3) أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{x.g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$ ، حيث f' مشتقة

ب) استنتج اشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

(نأخذ $f(\alpha) \approx -0.1$)

4) أحسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = 0$

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $h(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$

و (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$.

أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$

ب) استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ؛ ثم أنشئ (C_h)

التمرين الثاني - باك تقني رياضي 2017

✓ نعتبر الدّالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 + 6x + 12$

1) أدرس اتجاه تعير الدّالة g .

2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in \left]-1,48;-1,47\right[$

ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

✓✓ نعتبر الدّالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = \dfrac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$

1)أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$

ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

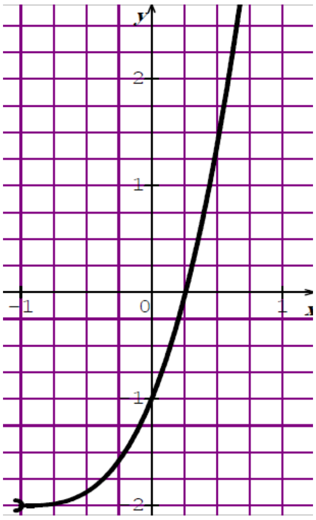
2) أ) بيّن أن المتستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f وَ

ب) أدرس الوضع النسبي بين المنحنى و المستقيم (Δ) .

3) بيّن أن $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصر لـ $f(\alpha)$.

4) أرسم المنحنى C_f و وَ (Δ)

التمرين الثالث



المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالّة العددية g على المجال $]-1;+\infty[$ كمايلي :

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$

1) أ) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدّالة g و حدد $g(0)$ و إشارة $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كمايلي :

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$

أ) بيّن أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$.

ب) عيّن دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا .

ج)أحسب $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ و فسر النتيجتين بيانيا .

د) شكل جدول تغيرات الدّالة f .

3) نأخذ $\alpha\approx 0,26$ أ) عيّن مدور $f(\alpha)$ الى 10^{-2} .

ب) أرسم (Γ)

التمرين الرابع

الجزء الأول

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3-3x-3$

1)أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) أدرس اتجاه تغير الدّالة g على $\mathbb{R}$.

3) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال: $\left[2;\frac{9}{4}\right]$ ، ثم أعط حصرا للعدد α بتقريب 10^{-2} . عين إشارة $g(x)$.

$2,09$	$-0,14$
$2,10$	$-0,04$
$2,11$	$0,06$
$2,12$	$0,17$

الجزء الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\ -1;1$ كمايلي :

$$f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}+1$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب نهايات الدّالة f بجوار مجموعة تعريفها .ماذا تستنتج

2) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\ -1;1$: $f'(x)=\dfrac{2x.g(x)}{(x^2-1)^2}$.

3) أدرس إتجاه تغير الدّالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) بيّن أن $f(\alpha)=3\alpha+1$ ثم عين حصر للعدد $f(\alpha)$.

5) برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) . ثم أدرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f)

6) جد فواصل النقط من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم المقارب (Δ)

7) أرسم (C_f) و المستقيمات المقاربة.

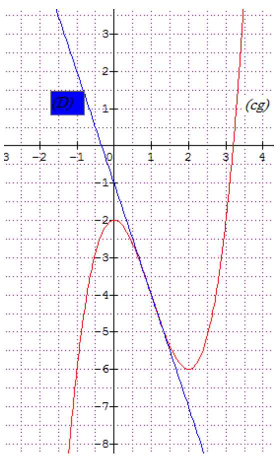
8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m$

التمرين الخامس

الجزء الأول

g الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=x^3-3x^2-2$ و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل :

المستقيم (D) هو مماس للمنحنى (C_g) في النقطة ذات الفاصلة 1



بقراءة بيانية : 1) عيّن $g'(0)$ ، $g'(2)$ ، $g'(1)$ ، $g''(1)$

2) شكل جدول تغيرات الدّالة g .

3) حدد إشارة $g(3)$ و $g\left(\frac{7}{2}\right)$ ثم استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]3;\frac{7}{2}\right[$ بحيث : $g(\alpha)=0$. ثم تحقق أن $3,1<\alpha<3,2$

4) إستنتج إشارة الدّالة g على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني

f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}-\ 1$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أحسب $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$ ، $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$. ماذا تستنتج ؟

3) بيّن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \ 1$ فإن : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^3}$

استنتج إتجاه تغير الدّالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أحسب $\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (x+2) \right]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

5) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

6) عيّن دون حساب $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$

7) بيّن أن $f(\alpha) = 3 + \dfrac{6\alpha}{(\alpha - 1)^2}$ ثم أعط حصر لـ $f(\alpha)$ تدور النتائج إلى 10^{-2} .

8) أكتب معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\dfrac{1}{3}$.

9) جد نقط تقاطع (C_f) مع محوري الإحداثيات .

10) أرسم (C_f) ، (Δ) و (T) .

11) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$

الجزء الثالث

h الدّالة المعرفة على $\mathbb{R} - \ 1$ بـ : $h(x) = \left| f(x) \right|$ و (C_h) تمثيلها البياني

1) أكتب h دون رمز القيمة المطلقة .

2) بيّن كيفية رسم (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه .