المحور : الدوال الأسية

الدالة الأسية

توجد دالة وحيدة f تحقق الشرطين $f' = f$ و $f(0)=1$ تسمى الدالة الأسية (النيبيرية) و يرمز لها بـ " exp " إصطلاحا : من أجل كل عدد حقيقي x نضع : $\exp(x) = e^x$

نتائج: من التعريف نجد $\exp(0)=1$ و $\exp'(x)=\exp(x)$

خواص من أجل كل عددين حقيقيين y,x و n عدد صحيح:

$\bullet e^0 = 1$	$\bullet e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
$\bullet (e^x)' = e^x$	$\bullet e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
$\bullet e^x > 0$	$\bullet e^{nx} = \left(e^x\right)^n$
$\bullet e^{x+y} = e^x \times e^y$	

نتيجة: من أجل كل عددين a و b من $\mathbb{R}$ لدينا:

- $e^b < e^a$ معناه : $b<a$
- $e^b = e^a$ معناه : $b=a$

مشتقة الدالة الاسية $\boxed{\left(e^{g(x)}\right)' = g'(x)\times e^{g(x)}}$

دراسة إشارة بعض العبارات الأسية:

- إذا كانت العبارة تكتب من الشكل $g(x)e^{h(x)}$ فالإشارة من إشارة $g(x)$
- إذا كانت العبارة تكتب من الشكل $ae^{\alpha x+\beta}+b$ نميز ثلاث حالات :

1- إذا كان a و b موجبان فإن $ae^{\alpha x+\beta}+b>0$

2- إذا كان a و b سالبان فإن $ae^{\alpha x+\beta}+b<0$

3- إذا كان a و b مختلفان فالإشارة فإنه يوجد حل وحيد x_0 بحيث

$$ae^{\alpha x+\beta}+b=0$$
$$ae^{\alpha x+\beta}=-b$$
$$e^{\alpha x+\beta}=-\frac{b}{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -\frac{b}{a}\succ 0$$
$$\alpha x+\beta=\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$$
$$\boxed{x=\frac{-\beta+\ln\left(-\frac{b}{a}\right)}{\alpha}}$$

و الإشارة كمايلي :

x		x_0	
إشارة $a.e^{\alpha x+\beta}+b$	عكس إشارة $a.\alpha$	0	حسب إشارة $a.\alpha$

دراسة إشارة العبارة الأسية من الشكل: $ae^{2x}+be^x+c$ **بحيث** $a.b.c\neq 0$:

- نستعمل طريقة تبديل المتغير نضع $e^x=t$ فنتحصل على at^2+bt+c
- ثم نعين قيم t إذا كانت المعادلة تقبل حلول
- نستنتج قيم x و ندرس إشارة العبارة مستخدمين القواعد المعروفة لإشارة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية

ملاحظة : العبارة $ae^{2x}+be^{x}+c$ تحلل من الشكل $a\left(e^{x}-t_1\right)\left(e^{x}-t_2\right)$ بحيث $t_1.t_2$ حلي للمعادلة at^2+bt+c

نهايات الدالة الاسية

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0}$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0}$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x}=+\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty}$ و $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^{n}e^{x}=0}$

سلسلة تمرينات متنوعة للتدرب على خواص الدالة الأسية

التمرين الأول: بسط العبارات التالية:

$\boxed{1}\ \frac{e^{-x}}{e^{x}+1}-\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$ $\boxed{2}\ \frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2e^{x}}$ $\boxed{3}\ (e^{x}+e^{-x})^2-(e^{x}-e^{-x})^2$ $\boxed{4}\ (e^{x})^3e^{-2x}$

$\boxed{5}\ \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{2x}}$ $\boxed{6}\ \frac{e^{2x+1}}{e^{-x+1}}$ $\boxed{7}\ e^{-x}-e^{-2x}$ $\boxed{8}\ \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

التمرين الثاني: أدرس إشارة العبارات التالية

$\boxed{1}\ 2e^{x+1}+2$ $\boxed{2}\ -2e^{x+1}-2$ $\boxed{3}\ \frac{1}{2}e^{2x-1}-2$ $\boxed{4}\ e^{2-x}-4$

$\boxed{5}\ -4e^{x+1}+12$ $\boxed{6}\ e^{2x}+e^{x}-6$ $\boxed{7}\ e^{2x}-7e^{x}+12$ $\boxed{8}\ e^{2x}+5e^{x}+6$

$\boxed{9}\ (2x-1)e^{-2x}$ $\boxed{10}\ -4e^{-2x}+(2x-2)e^{-2x}$ $\boxed{11}\ e^{x+1}=e^{\frac{2}{x}}$ $\boxed{12}\ \frac{2e^{2x}}{e^{x}+1}=\frac{1}{e^{-x}}$

التمرين الثالث :

-أحسب نهايات الدالة f من أجل $x\mapsto+\infty$:

$f(x)=\frac{e^{x^2}}{x}$ ، $f(x)=e^{-x+1}$ ، $f(x)=\frac{e^{x^3}}{x^3}$ ، $f(x)=e^{2x}-4x$ ، $f(x)=\frac{e^{3x}-5x^3+2}{x^3}$ ،

$f(x)=\frac{e^{x-2}}{x}$ ، $f(x)=xe^{-5x}$

-أحسب نهايات الدالة f من أجل $x\mapsto 0$

$f(x)=\frac{e^{4x}-1}{x}$ ، $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{x^2}$ ، $f(x)=\frac{x}{e^{2x}-1}$ $f(x)=\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{x^2}$ ،

$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{4x^2+6x}$ ، $f(x)=\frac{-e^{-x}+1}{x^2-x}$ $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$

أحسب نهايات الدوال التالية عند $+\infty;-\infty$

$\boxed{1}\ e^{x}+x+1$ $\boxed{2}\ e^{x}-x-4$ $\boxed{3}\ (x-1)e^{x}+x+2$ $\boxed{4}\ (x-1)e^{-x}+x-3$

$\boxed{5}\ \frac{-e^{x}+3}{e^{x}+2}$ $\boxed{6}\ \frac{e^{x}+x-1}{4x}$ $\boxed{7}\ e^{2x}-e^{x}+2$ $\boxed{8}\ \frac{x^3}{e^{-x}-1}$ $\boxed{9}\ e^{2x}-e^{x}$ $\boxed{10}\ xe^{\frac{1}{x}}$

التمرين الرابع : أدرس تغيرات الدوال التالية

1) $f(x)=2+(x-1)e^{-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=2-x^2e^{1-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$

4) $f(x)=x^2e^{x}-e$ ، $D_f=\mathbb{R}$

5) $f(x)=x-\frac{1}{e^{x}-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$

6) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}-x$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$

7) $f(x)=1+(x^2+x-1)e^{-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

8) $f(x)=2e^{x}-x^2-x$ ، $D_f=\mathbb{R}$

9) $f(x)=1-2x-e^{2x-2}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

10) $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

11) $f(x)=\frac{2x-2}{e^{x}-2x}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

12) $f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

13) $f(x)=xe^{-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

14) $f(x)=(x+1)(1+2e^{-x})$ ، $D_f=\mathbb{R}$

15) $f(x)=\frac{3xe^{x}-3x-4}{3(e^{x}-1)}$ ، $D_f=\mathbb{R}^*$

التمرين الخامس : f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$

1/ أدرس تغيرات الدالة f 2/ بين أن (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة

3/ بين أن $A(0;1)$ مركز تناظر ثم أرسم (C_f)

4/ g دالة عددية حيث : $g(x)=\dfrac{2e^x}{|e^x-1|}$ أ/ أكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$

ب/ استنتج رسم (C_g) من رسم (C_f)

5/ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة :

$(m-3)|e^x-1|=2e^x$

التمرين السادس :

I. لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على $]-2,+\infty[$ بـ : $g(x)=-1+(x+2)e^x$.

1) أدرس تغيرات الدّالّة g ، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α بحيث $-0,5<\alpha<-0,4$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

تمرينات من بكالوريات تجريبية سابقة للأستاذ زايدي علاء الدين

التمرين الأول: لتكن الدالة f المعرفة على بـ : $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد

1- عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

2- نضع $a=1$ ، $b=0$ ، $=-3$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3- أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

4- أرسم (T) و (C_f) .

5- m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2-3+me^x=0$.

I. **التمرين الثاني:** g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$g(x)=1-(x^2-2x+2)\ell^{-x}$.

1) أدرس تغيرات الدالة g مشكلا جدول تغيراتها .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,35\prec\alpha\prec0,36$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II. f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x-1+(x^2+2)\ell^{-x}$ و (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(0;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $(2cm)$.

1. أدرس تغيرات الدالة f مشكلا جدول تغيراتها
2. بين أن: $f(\alpha)=\alpha(1+2\ell^{-\alpha})$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.
3. استنتج معادلة للمستقيم (Δ) المقارب المائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$، ثم أدرس الوضع النسبي لهما .
4. أنشئ كلا من : (Δ) و (C_f)،ثم عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة : $(x^2+2)\ell^{-x}-m-1=0$ حلا وحيد موجب.

I. **التمرين الثالث:** لتكن الدالة g المعرفة على IR كمايلي :

$g(x)=xe^{-x}-1$.

1) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة g .

2) استنتج إشارة $g(x)$ على IR .

II. نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x، المعرفة على IR كمايلي :

$f(x)=\left(xe^{-x}-1\right)^2$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة 2cm)

1) أ ـ أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب ـ بين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ و أن

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ، ماذا تستنتج ؟ .

2) أ ـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x)=2g(x)g'(x)$ ، ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

ب ـ أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4) أرسم : (T) و (C_f) .

التمرين الرابع :

(C_g) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=(ax+b)e^{-x}+c$

حيث b,a و c أعداد حقيقية.

المنحنى (C_g) يمر من النقطتين $A(-2;2)$ ، $O(0;0)$ و يقبل في النقطة $O(0;0)$ مماسا (T) يمر من النقطة $B(-2;-2)$.

المنحنى (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مواز لحامل محور الفواصل معادلته: $y=2$ بجوار $+\infty$.

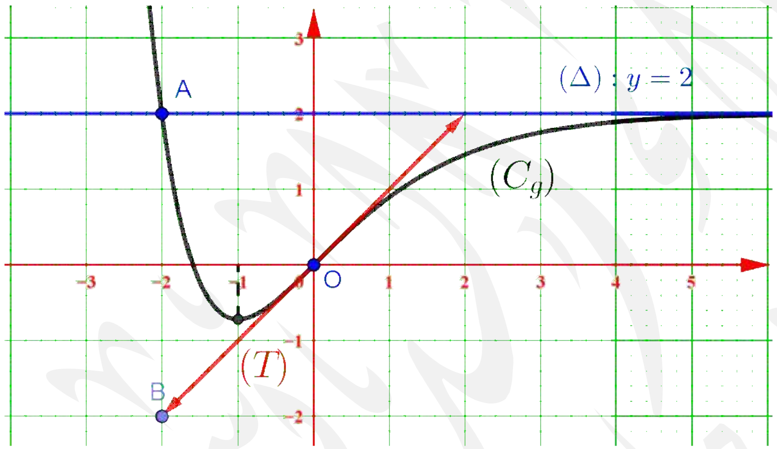
1) بقراءة بيانية عين كل من: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، $g(0), g(-2), g'(-1)$ و $g'(0)$.

2) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

3) أحسب عبارة $g'(x)$ بدلالة كل من العددين الحقيقيين a و b.

4) بإستعمال المعطيات السابقة عين كل من الأعداد الحقيقية b,a و c ثمّ إستنتج عبارة $g(x)$.

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $g(x)=mx$



التّمرين الخامس: (07 نقاط)

II. لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2-(2x+1)e^{2x}$.

1) أدرس تغيرات الدّالّة g ، ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

2) بيـن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبـل حـلا وحيـد α بحيـث $0,1<\alpha<0,3$ ، ثـم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

III. لتكن f دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x-1-xe^{2x}$

و ليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

1) أحسُب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا.

2) أثبت أن اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة f، و شكّل جدول تغيُّراتها.

3) أثبت أن المستقيم (Δ) ذاالمعادلة $y=2x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$ ،ثم أدرس الوضع النسبي لـ$\left(C_f\right)$ و (Δ).

4) بين أن $f(\alpha)=-1+\dfrac{4\alpha^2}{2\alpha+1}$،جد حصرا لـ $f(\alpha)$ ثم أنشئ $\left(C_f\right)$ و (Δ).

5) ناقش، بيانيّاً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x، حيثُ $xe^{2x}+1+m=0$

IV. لتكن h دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=\left|f(x)\right|$

و ليكن $\left(C_h\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

- اشرح كيفة رسم $\left(C_h\right)$ انطلاقا من $\left(C_f\right)$
- أنشئ $\left(C_h\right)$

التمرين السادس

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ بـ: $g(x)=x+2-e^x$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g على $\left[0;+\infty\right[$ ، وَ عيّن نهاية g عند $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α على $\left]0;+\infty\right[$.

ب) تحقّق أنّ : $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $\left[0;+\infty\right[$.

II) نعرّف على المجال $\left[0;+\infty\right[$ الدالة f كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$ ، و ليكن $\left(C_f\right)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\left[0;+\infty\right[$: $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل ، x من $\left[0;+\infty\right[$: $f'(x)=\dfrac{e^x\times g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f على $\left[0;+\infty\right[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

ج) بيّن أنّ : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $\left[0;+\infty\right[$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$ ، حيث : $u(x)=e^x-xe^x-1$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة u على $\left[0;+\infty\right[$ ، ثمّ إستنتج إشارة $u(x)$.

ج) إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحني $\left(C_f\right)$ بالنسبة إلى (T) .

د) أرسم كلا من (T) و المنحني $\left(C_f\right)$ ، الوحدة : $4cm$.

ه) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة

$$\frac{e^m-1}{me^m+1}-\frac{e^x-1}{xe^x+1}=0$$

التمرين السابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ بـ : $g(x)=x+2-e^x$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g على $\left[0;+\infty\right[$ ، وَ عيّن نهاية g عند $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α على $]0;+\infty[$.

ب) تحقّق أنّ : $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $[0;+\infty[$.

II) نعرّف على المجال $[0;+\infty[$ الدالة f كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل ، x من $[0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{e^x\times g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f على $[0;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

ج) بيّن أنّ : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$ ،

حيث : $u(x)=e^x-xe^x-1$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة u على $[0;+\infty[$ ، ثمّ إستنتج إشارة $u(x)$.

ج) إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

د) أرسم كلا من (T) و المنحني (C_f) ، الوحدة : $4cm$.

التمرين الثامن :

الجزء الأوّل:

لتكن g دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ و تُحقّق العلاقة $g(x)-2g(1-x)=e^x-2e^{1-x}-3x+3$.

1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x . (إرشاد: ضع $t=x$ تارةً و $t=1-x$ تارةً أخرى)

2) أدرُس تغيّرات الدّالّة g ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة h المُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=1-g(-x)$.

4) أثبت أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيثُ $-1{,}15<\alpha<-1{,}14$ و $1{,}84<\beta<1{,}85$.

5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعاً لقيم العدد الحقيقي x.

الجزء الثّاني:

لتكن f دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{x+g(x)}{1+g(x)}$، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

1) أُحسُب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. فسِّر هندسيّاً النّتائج.

2) أ) أثبت أنّ الدّالّة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أنّ $f'(x)=\dfrac{e^x\times h(x)}{\left[1+g(x)\right]^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالّة f ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

3) أحسُب $f(0)$ ثُمّ أرسم (C_f).

بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا

زايدي علاء الدين

التصحيح النموذجي لبعض تمرينات السلسلة

التمرين الأول صفحة 03

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0;-3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x)=0$.

$f(0)=-3$ و هذا يعني $c=-3$

و لدينا

$$f'(x)=(2ax+b)\ e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}$$

$f'(0)=3$ يعني أن ; $b-c=3$ و منه $b=0$

$f(\sqrt{3})=0$ يعني ان $f(\sqrt{3})=(3a-3)e^{-\sqrt{3}}=0$ و منه $a=1$

2- نضع $a=1$, $b=0$, $c=-3$ تصبح $f(x)=(x^2-3)e^{-x}$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ لأنه بوضع $x=2t$ نجد

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4t^2}{e^{2t}}\right]=4\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{e^t}\right)^2=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2)e^{-x}=+\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x)=(-x^2+2x+3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2+2x+3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ متزايدة على المجال $[-1;3]$

و شكل جدول تغيراتها :

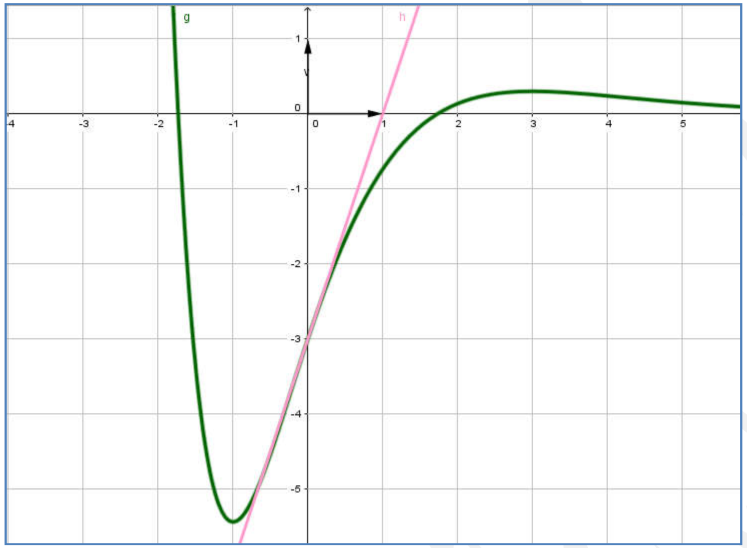
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$\frac{6}{e^3}$	$\searrow$	0

3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y=3x-3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

$f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$.اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3};0)$ و $C(-\sqrt{3};0)$

4- رسم (T) و (C_f)



5- m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة
$x^2-3+me^x=0$

المعادلة تكافئ $me^x=-\left(x^2-3\right)$ أي ان $-m=\left(x^2-3\right)e^{-x}$ يكافئ
$-m=f\left(x\right)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ المستقيم $\left(\Delta_m\right)$ ذو المعادلة
$y=-m$

المناقشة

لما $-m<-2e$ أي ان $m>2e$ نلاحظ ان $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $-m=-2e$ أي ان $m=2e$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

لما $-3>-m>-2e$ أي ان $3<m<2e$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m=-3$ أي ان $m=3$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب .

لما $0\geq -m>-3$ أي ان $0\leq m<3$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في نقطتين فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة .

لما $\frac{6}{e^3}>-m>0$ أي ان $-\frac{6}{e^3}<m<0$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلاتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما $-m=\frac{6}{e^3}$ أي أن $m=-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في نقطتنh فاصلاتهما مختلفان في الاشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة

لما $-m>\frac{6}{e^3}$ أي ان $m<-\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن $\left(\Delta_m\right)$ و $\left(C_f\right)$ يتقاطعان في نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

تصحيح التمرين الثامن

الجزء الأول:

1) من أجل $t=x$ يكون لدينا $g(t)-2g(1-t)=e^t-2e^{1-t}-3t+3....(1)$

من أجل $t=1-x$ يكون لدينا $g(1-t)-2g(t)=e^{1-t}-2e^t+3t....(2)$

بضرب المعادلة (2) في 2 والجمع مع المعادلة (1) طرفاً لطرف نجد أنّ $g(t)=e^t-t-1$، إذن الدّالّة g مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=e^x-x-1$.

2) الدّالّة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالّتها المشتقّة $g'(x)=e^x-1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدّالّة g متزايدة تماماً على $\left[0,+\infty\right[$ و متناقصة تماماً على $\left]-\infty,0\right]$.

لدينا $\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$، و

تغيُّرات الدّالّة g مُوضّحة في الجدول الآتي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) الدّالّة h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالّتها المشتقّة $h'(x)=e^{-x}-1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	

الدّالّة h متناقصة تماماً على $\left[0,+\infty\right[$ و متزايدة تماماً على $\left]-\infty,0\right]$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$ ، و تغيُّرات الدّالّة h مُوضّحة في الجدول الآتي

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$+\infty$

4) الدّالّة h مستمرّة و رتيبة تماماً على كلّ مجال من المجالين $\left]-1{,}15;-1{,}14\right[$ و $\left]1{,}84;1{,}85\right[$ و لدينا $h(-1{,}15)\times h(-1{,}14)<0$ و كذلك $h(1{,}85)\times h(1{,}84)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيثُ $-1{,}15<\alpha<-1{,}14$ و $1{,}84<\beta<1{,}85$.

5) إشارة $g(x)$ و $h(x)$ مُوضّحتان في الجدولين

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

x	$-\infty$		α		β		1
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء الثاني:

الدّالّة f مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^x}}{1-\dfrac{x}{e^x}}=1$ ، و منه

المستقيمان $(\Delta):y=1$ و $(\Delta'):y=0$ مقاربان أفقيّان لـ (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$ على التّرتيب.

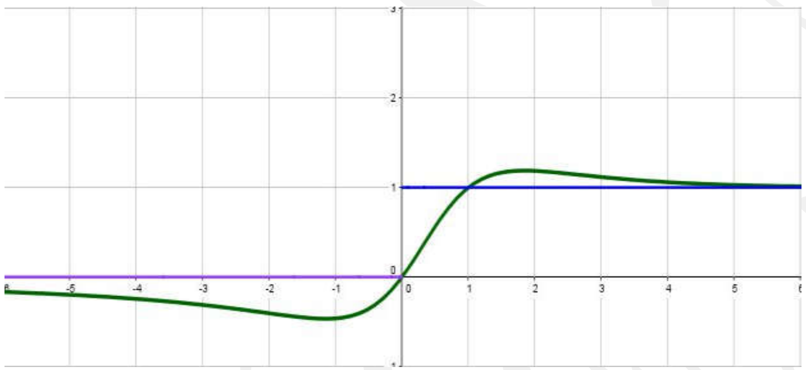
أ) الدّالّتان $x\mapsto x$ و $x\mapsto e^x$ قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و عليه تكون الدّالّة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالّتها المشتقة هي $f'(x)=\dfrac{e^x\times h(x)}{\left[e^x-x\right]^2}$.

ب) بما أنّ $\dfrac{e^x}{\left[e^x-x\right]^2}>0$ من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

الدّالّة f متناقصة تماماً على $\left]-\infty,\alpha\right]\cup\left[\beta,+\infty\right[$ و متزايدة تماماً على $\left[\alpha,\beta\right]$، و جدول تغيُّراتها هو

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

1) لدينا $f(0)=0$ ، و (C_f) مُوضّح في الرّسم المُرفق



بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا

زايدي علاء الدين